ÜBER KONTRAKTIONS-UND VERNICHTUNGSIDEALE IN DER ALLGEMEINEN MODULNTHEORIE

VON

A. ALMEIDA COSTA (PORTO)

1) **Einführung** — Unsere Betrachtungen schliessen sich an diejenigen unserer Arbeit «*Sobre os endomorfismos dos módulos*», [1], an. Neben den Linksidealen von Endomorphismen, die einen Modul in einem Untermodul abbilden, führen wir noch zwei Begriffe ein: I) Untermoduln, die von einer beliebigen Menge von Endomorphismen vernichtet werden; II) Rechtsideale, die einen beliebigen Untermodul vernichten. Wir nehmen selbstverständlich an, dass die Endomorphismensymbole rechts des Untermoduls geschrieben werden.

Dann werden wir Gelegenheit haben zu bemerken, dass die oben angegebenen Begriffe, I) und II), uns erlauben gewisse Sätze zu formulieren, die sich in einer bestimmten Verbindung mit anderen über die oben zitierten Linksideale befinden.

2) **Kontraktionsideale in Untermoduln** — $\mathfrak{M}$ ist ein Modul und $\mathfrak{A}$ sein Endomorphismenring. Ω ist eine Untermenge von $\mathfrak{A}$ und so ist $\mathfrak{M}$ ein Ω-Modul. Der Kommutator von Ω, in $\mathfrak{A}$, wird mit $\overline{\Omega}$ bezeichnet. Dann ist $\overline{\Omega}' \neq (0)$ ein Unterring von Ω. Ein Untermodul $\mathfrak{N}$, von $\mathfrak{M}$, kann man

verstehen als: 1) gewöhnlichen Untermodul; 2) Ω — Untermodul; 3) $\bar{\Omega}'$ — Untermodul; 4) $(\Omega, \bar{\Omega}')$ — Untermodul. In vier Fällen gibt es, dem Untermodul $\mathfrak{U}$ entsprechend, ein Linksideal $\mathfrak{u}$, von $\bar{\Omega}'$, das $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$ abbidelt, [1, § 2]. $\mathfrak{u}$ nennt man das *Kontraktionsideal* (künftig Ki.) von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$. Wir benutzen den Buchstaben $\mathfrak{u}$, wie für den Untermodul, jedoch klein. Die Elemente von $\bar{\Omega}'$ bezeichnet man mit $A, B, \cdots, S, T, \cdots$.

Satz 1: *Das Ki. im Durchschnitt* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$ *ist der Durchschnitt* $\mathfrak{u} = [\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2]$ *der Ki. in beiden* $\mathfrak{U}_j$, $(j = 1, 2)$.

Satz 2: *Das Ki. in der Summe* $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ *ist* $\mathfrak{u} \supseteq (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$, *wobei* $\mathfrak{u}_j$ *das Ki. in* $\mathfrak{U}_j$ *ist. Umgekehrt, wenn wir* $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$, *nehmen, wobei* $\mathfrak{u}_i$ *Linksideal von* $\bar{\Omega}'$ *ist, dann ist* $\mathfrak{M}\mathfrak{u} = (\mathfrak{M}\mathfrak{u}_1, \mathfrak{M}\mathfrak{u}_2)$. [Mit $\mathfrak{M}\mathfrak{u}_i$ meinen wir die Menge der endlichen Summen $\Sigma m_j A_j^{(i)}$, $m_j \in \mathfrak{M}$, $A_j^{(i)} \in \mathfrak{u}_i$].

Den vorhergehenden Satz kann man in einem Fall verfeinern:

Satz A: *Das Ki. in der direkten Summe* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$, *falls* $\bar{\Omega}' = \bar{\Omega}$ *angenommen wird und die* $\mathfrak{U}_i$ Ω*-Untermodul sind, ist die direkte Summe* $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$, [1, § 2]. Es seien $m \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{u}$, $mB \in \mathfrak{U}$, und $mB = n_1 + n_2$, wobei $n_i \in \mathfrak{U}_i$, $(i = 1, 2)$. Die Abbildungen $m \to n_i$, sind Ω-Endomorphismen von $\mathfrak{M}$, die wir mit A_i bezeichnen. Dann folgt $B = A_1 + A_2$, $\mathfrak{M}A_i \subseteq \mathfrak{U}_i$, $B \in (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$, mithin $\mathfrak{u} \subseteq (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$ und (Satz 2) $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$. Diese Summe ist direkt, denn aus $A_1 + A_2 = 0$, $(A_i \in \mathfrak{u}_i)$, folgt $A_i = 0$.

Das Ki. in einem Untermodul $\mathfrak{U}$ ist ein eindeutiges $\mathfrak{u}$, aber nicht umgekehrt. Es besteht folgender

Satz 3: *Wenn* $\mathfrak{u}$ *das Ki. in einem Untermodul* $\mathfrak{U}$ *ist, so ist auch* $\mathfrak{u}$ *das Ki. in einem* Ω*-Untermodul* $\mathfrak{U}' = \mathfrak{M}\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{U}$, [1, § 2].

$\mathfrak{C}$ sei eine Menge von Endomorphismen von $\bar{\Omega}'$ und man bildet $\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \mathfrak{U}$. Das Ideal $\mathfrak{u}$ enthält $\mathfrak{C}$, mithin $\mathfrak{M}\mathfrak{u} \supseteq \mathfrak{M}\mathfrak{C}$. Andererseits ist $\mathfrak{M}\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{C}$, und so schliessen wir daraus $\mathfrak{M}\mathfrak{u} = \mathfrak{M}\mathfrak{C}$. Es gilt:

Satz 4: *Wenn eine Menge* $\mathfrak{C}$ *von Elementen von* $\bar{\Omega}'$ *gegeben wird, gibt es immer ein Linksideal* $\mathfrak{u} \supseteq \mathfrak{C}$, *von* $\bar{\Omega}'$, *das Ki. in* $\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \mathfrak{M}\mathfrak{u}$ *ist.*

Man kann einen Fall angeben, wo $\mathfrak{u} = \mathfrak{C}$ ist. Im allgemeinen dürfte $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal von $\bar{\Omega}'$ und $\mathfrak{l}$ sein Linksvernichtungsideal in $\bar{\Omega}'$ sein. Wenn $\mathfrak{C} = \mathfrak{l}$ ist, so ist das Ki. in $\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \mathfrak{M}\mathfrak{l} = \mathfrak{U}$ genau $\mathfrak{u} = \mathfrak{l}$, denn aus $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = (0)$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{l}$ folgt $\mathfrak{M}\mathfrak{u}\mathfrak{r} = (0)$, $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{l}$. Hierbei ist $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ ein nilpotentes zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{r}$, das sich aus Elementen von $\mathfrak{l}$, die den Nullendomorphismus in $\mathfrak{M}\mathfrak{l}$ induzieren, zusammensetzt. Es gilt:

Satz 5: *Jedes Rechtsideal* $\mathfrak{r}$, *von* $\bar{\Omega}'$, *hat ein Linksvernichtungsideal* $\mathfrak{l}$, *in* $\bar{\Omega}'$, *das Kontraktionsideal in* $\mathfrak{M}\mathfrak{l}$ *ist. Der Durchschnitt* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ *ist ein nilpotentes zweiseitiges Ideal von* $\mathfrak{r}$ *(mit Exponenten 2), das sich aus allen Elementen von* $\mathfrak{r}$, *die* $\mathfrak{M}$ *in* $\mathfrak{M}\mathfrak{l}$ *abbilden, zusammensetzt. Nennt man* $\mathfrak{x}$ *das Rechtsvernichtungsideal von* $\mathfrak{l}$, *dann stellt der Durchschnitt* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{x}$ *zugleich die Gesamtheit der Elemente von* $\mathfrak{l}$ *und* $\mathfrak{x}$ *dar, die in* $\mathfrak{M}\mathfrak{l}$, *bzw. in* $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}\mathfrak{l}$ *den Nullendomorphismus induzieren.*

Wird $\mathfrak{U}$ gewählt und $A \in \bar{\Omega}'$ angenommen, gilt $\mathfrak{U}A \subseteq \mathfrak{U}$ im allgemeinen nicht. Ist die Bezichung gültig, dann zeigt sich: 1) $\mathfrak{U}$ ist $\bar{\Omega}'$-Untermodul; 2) das Ideal $\mathfrak{u}$ ist zweiseitig. Es kann aber sehr gut $\mathfrak{u}$ zweiseitig sein, ohne Gültigkeit der Beziehung $\mathfrak{U}A \subseteq \mathfrak{U}$. Es besteht folgender Zusammenhang:

Satz 6: *Ist $\mathfrak{N}$ ein $\bar{\Omega}'$-Untermodul, so ist $\mathfrak{n}$ zweiseitig. Falls $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ Ω-homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ ist, so ist $\mathfrak{N}T \subseteq \mathfrak{N}$, für ein beliebiges $T \in \bar{\Omega}'$, notwendig und hinreichend dafür, dass $\mathfrak{n}$ zweiseitig ist.* Allgemeiner gilt es:

Satz 7: *Ist ein Untermodul $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\mathfrak{n}$, so ist $\mathfrak{n}$ zweiseitig, dann und nur dann, wenn $\mathfrak{N}$ $\bar{\Omega}'$-Untermodul ist.*

Beispiele von Untermoduln deren Kontraktionsideale zweiseitig sind: $\mathfrak{N}\bar{\Omega}'$, $\mathfrak{N}\mathfrak{r}$, $m\mathfrak{r}$, wobei $\mathfrak{r}$ Rechtsideal von $\bar{\Omega}'$ und $m \in \mathfrak{M}$ ist. In diesen Beispielen handelt es sich um $\bar{\Omega}'$-Untermoduln; die beiden ersten sind auch Ω-Untermoduln, falls $\mathfrak{N}$ es ist.

Satz 8: *Ist $\mathfrak{r}$ ein maximales Rechtsideal von $\bar{\Omega}'$, dann hat der $(\Omega, \bar{\Omega}')$-Untermodul $\mathfrak{M}\mathfrak{r} = \mathfrak{N}$ ein zweiseitiges Kontraktionsideal, und es ist entweder $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{n} = \bar{\Omega}'$. Wenn $\mathfrak{r}$ einseitig ist, ist $\mathfrak{n} = \bar{\Omega}'$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{r} = \mathfrak{M}\bar{\Omega}$. Im Fall $\bar{\Omega}' = \bar{\Omega}$, gilt $\mathfrak{M}\mathfrak{r} = \mathfrak{M}$, wenn $\mathfrak{r}$ einseitig ist.*

Wir machen noch einige einfache Bemerkungen. Nehmen wir den Ω-Untermodul $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ an. Falls $\mathfrak{M}\mathfrak{n}$ maximal ist, hat man $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = \mathfrak{N}$. Wenn $\mathfrak{N}$ maximal ist, kann man $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = \mathfrak{N}$ nicht daraus entnehmen; wenn aber die Gleichheit gültig wird, dann ist $\mathfrak{M}\mathfrak{n}' = \mathfrak{M}$ für jedes $\mathfrak{n}' \supset \mathfrak{n}$. Für einen Ω-Modul $\mathfrak{M}$, in welchem jeder Ω-Untermodul $\mathfrak{N}$ eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ ist, können wir behaupten: 1) $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\mathfrak{n}$; 2) für jeden $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$ hat man $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2$. Hieraus schliesst man: die *Maximalbedingung* für Linksideale in $\bar{\Omega}'$, hat die *Maximalbedingung* für die Ω-Untermoduln in $\mathfrak{M}$ zur Folge.

Wir kommen auf dem Fall von einem $\bar{\Omega}'$-Untermodul $\mathfrak{N}$ zuruck, und bilden $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$, der $\bar{\Omega}'$ als Operatorenbereich zulässt. Wenn $x \in \mathfrak{M}$, $A \in \bar{\Omega}'$, so ist $\bar{x} = x + \mathfrak{N} \in \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$, $(x + \mathfrak{N})A = xA + \mathfrak{N}$. $\bar{\Omega}'$ hat eine homomorphe Abbildung $\bar{\bar{\Omega}}'$ im Endomorphismenring von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. Es ist $\bar{\bar{\Omega}}' \simeq \bar{\Omega}/\mathfrak{n}'$, wobei $\mathfrak{n}'$ ein zweiseitiges Ideal ist, das sich aus den Elementen $A \in \bar{\Omega}'$, für welche $xA \in \mathfrak{N}$ ($x \in \mathfrak{M}$ beliebig) ist, zusammensetzt. Mithin ist $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}$. Mann kann sagen:

Satz 9: *Ist $\mathfrak{N}$ ein $\bar{\Omega}'$-Untermodul, dann ist $\bar{\Omega}'/\mathfrak{n}$ eine isomorphe Abbildung eines Endomorphismenringes von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ (genau des Ringes, der sich aus den ausgezeichneten Endomorphismen, durch die Elementen von $\bar{\Omega}'$ induziert, zusammensetzt).*

Im Fall eines maximalen $\bar{\Omega}'$-Untermoduls $\mathfrak{N}$, ist die Differenzgruppe $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ $\bar{\bar{\Omega}}'$-irreduzibel. Indem wir $\bar{\bar{\Omega}}' \neq (0)$ annehmen, haben wir, für jedes $\bar{x} \neq 0$, $\bar{x}\bar{\bar{\Omega}}' = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$, [2, § 8]. Hieraus schliesst mann:

Satz 10: *Ist ein maximaler $\bar{\Omega}'$-Untermodul $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$ gegeben, dann hat man $\mathfrak{M}/\mathfrak{N} = \bar{x}\bar{\bar{\Omega}}'$, für jedes $\bar{x} \neq 0$, indem man $\bar{\bar{\Omega}}' = \bar{\Omega}'/\mathfrak{n} \neq (0)$ setzt. Falls $\bar{\bar{\Omega}}' = (0)$, so ist $\mathfrak{M}\bar{\Omega}' \subseteq \mathfrak{N}$.*

Korollar 1: *Wenn $\mathfrak{N}$ ein maximaler $\bar{\Omega}'$-Untermodul in $\mathfrak{M}$ ist, so ist der Jacobsonsche Radikal (J-Radikal) von $\bar{\Omega}'$ in $\mathfrak{n}$ enthalten,* [2, § 8].

3) **Vernichtungsideale der Untermoduln** — Für einen beliebigen Untermodul $\mathfrak{N}$, werden wir, neben dem Ki. $\mathfrak{n}$, das Rechtsideal $\mathfrak{s}$ von $\bar{\Omega}'$ betrachten, das sich aus der Gesamtheit der Elemente von $\bar{\Omega}'$, die $\mathfrak{N}$ auf Null abbilden, zusammensetzt. $\mathfrak{s}$ heisst *Vernichtungsideal* von $\mathfrak{N}$ (künftig Vi.). Ähnlich wie $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{N}$, gibt es hier einen Ω-Untermodul $\mathfrak{N}' \supseteq \mathfrak{N}$, der alle Elemente von $\mathfrak{M}$, die $\mathfrak{s}$ annu-

lieren, enthält. $\mathfrak{N}'$ heint *Annihilatormodul* von $\mathfrak{s}$ (künftig Am.). Beide Begriffe erlauben uns, wie schon erwähnt, mehrere Sätze anzugeben, die den vorigen entsprechen.

SATZ 1': *Das Vi. der Summe $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ ist der Durchschnitt $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2]$ der Vi. der Summanden.*

SATZ 2': *Das Vi. des Durchschnittes $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ ist $\mathfrak{s} \supseteqq (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$, wobei $\mathfrak{s}_j$ das Vi. von $\mathfrak{N}_j$ ist. Umgekehrt, wenn wir $\mathfrak{s} = (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ nehmen, wobei $\mathfrak{s}_i$ Rechtsideal von $\overline{\Omega}'$ ist, dann ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, wobei $\mathfrak{N}_j$ der Am. von $\mathfrak{s}_j$ ist.*

Das Vi. eines Moduls $\mathfrak{N}$ ist ein eindeutiges $\mathfrak{s}$, aber nicht umgekehrt. Es besteht folgender

SATZ 3': *Wenn $\mathfrak{s}$ das Vi. eines Moduls $\mathfrak{N}$ ist, so ist $\mathfrak{s}$ auch das Vi. eines Ω-Untermoduls $\mathfrak{N}' \supseteqq \mathfrak{N}$, genau der Am. von $\mathfrak{s}$.*

$\mathfrak{C}$ sei eine Menge von Endomorphismen von $\overline{\Omega}'$ und man nehme den Am. von $\mathfrak{C}$, etwa $\mathfrak{N}$. Das Vi. von $\mathfrak{N}$, etwa $\mathfrak{s}$, enthält $\mathfrak{C}$, mithin ist, für den Am. von $\mathfrak{s}$, etwa $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}' \subseteqq \mathfrak{N}$. Andererseits ist $\mathfrak{N} \supseteqq \mathfrak{N}'$, und so schliessen wir auf $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$. Es gilt:

SATZ 4': *Wenn eine Menge $\mathfrak{C}$ von Elementen von $\overline{\Omega}'$ gegeben wird, gibt es immer ein Rechtsideal $\mathfrak{s} \supseteqq \mathfrak{C}$, von $\overline{\Omega}'$, das Vi. von dem gemeinsamen Am. von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{s}$ ist.*

Mann kann einen Fall angeben wo $\mathfrak{s} = \mathfrak{C}$ ist. Im allgemeinen, dürfte $\mathfrak{l}$ ein Linksideal von $\overline{\Omega}'$ und $\mathfrak{r}$ sein Rechtsvernichtungsideal in $\overline{\Omega}$ sein. Wenn $\mathfrak{C} = \mathfrak{r}$ ist, dann ist $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}$ das Vi. des Am. $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{C} = \mathfrak{r}$. In der Tat, ist einerseits $\mathfrak{s} \supseteqq \mathfrak{r}$; andererseits aber, da $\mathfrak{M}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{N}$ ist, wird das Vi. von $\mathfrak{M}\mathfrak{l}$, genau $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ enthalten. Es gilt:

SATZ 5': *Jedes Linksideal $\mathfrak{l}$, von $\overline{\Omega}'$, hat ein Rechtsvernichtungsideal $\mathfrak{r}$, in $\overline{\Omega}'$, das Vi. des Am. $\mathfrak{N}$, von $\mathfrak{r}$, ist. Der Durchschnitt $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$ ist ein nilpotentes zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{l}$ (mit Exponenten 2), das sich aus allen Elementen von $\mathfrak{l}$, die $\mathfrak{N}$ auf Null abbilden, zusammensetzt. Nennt man $\mathfrak{q}$ das Linksvernichtungsideal von $\mathfrak{r}$, dann stellt der Durchschnitt $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{q}$ zugleich die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ dar, die $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$ abbilden bzw. in $\mathfrak{N}$ den Nullendomorphismus induzieren.*

SATZ 6': *Ist $\mathfrak{N}$ ein $\overline{\Omega}'$-Untermodul, so ist sein Vi. $\mathfrak{s}$ zweiseitig. Falls es ein $A \in \overline{\Omega}'$ gibt, dessen Am. genau $\mathfrak{N}$ ist, so ist $\mathfrak{N}T \subseteqq \mathfrak{N}$, für ein beliebiges $T \in \overline{\Omega}'$, notwendig und hinreichend dafür, dass $\mathfrak{s}$ zweiseitig ist.* Die erste Behauptung ist klar. Wir beweisen die zweite. Wenn $\mathfrak{N}$ $\overline{\Omega}'$-Untermodul und Am. von A ist, folgt zweifellos $\mathfrak{N}T \subseteqq \mathfrak{N}$ und die Zweiseitigkeit von $\mathfrak{s}$. Umgekehrt, nimmt man $\mathfrak{N}$ als die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{M}$, die von A vernichtet werden, und auch die Zweiseitigkeit von $\mathfrak{s}$ an, dann ist $\mathfrak{N}T \subseteqq \mathfrak{N}$, für ein beliebiges T, da für $A \in \mathfrak{s}$ auch $TA \in \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{N}TA = (0)$ ist, und deswegen $\mathfrak{N}T \subseteqq \mathfrak{N}$. Allgemeiner gilt es:

SATZ 7': *Nehmen wir an, dass $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{s}$ sich umgekehrt vernichten; so ist $\mathfrak{s}$ zweiseitig, dann und nur dann, wenn $\mathfrak{N}$ Ω'-Untermodul ist.*

Die Beispiele vom vorhergehenden Paragraphen $\mathfrak{N}\overline{\Omega}'$, $\mathfrak{N}\mathfrak{r}$, $m\mathfrak{r}$ haben ein zweiseitiges Vi. Wir können aber auch den Am. eines Linksideals $\mathfrak{l}$, von $\overline{\Omega}'$, betrachten. Man ergibt folgendes: Der Am. eines $\mathfrak{l}$ hat ein zweiseitiges Vi. In der Tat, aus $\mathfrak{N}\mathfrak{l} = (0)$ leitet man $\mathfrak{N}T\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{N}\mathfrak{l} = (0)$ ab und ergibt sich $\mathfrak{N}T \subseteqq \mathfrak{N}$. Der Am. eines $\mathfrak{l}$ ist deswegen ein $(\Omega, \overline{\Omega}')$-Untermodul.

Satz 8': *Ist $\mathfrak{e}$ ein maximales Linksideal von $\overline{\Omega}'$, dann hat der $(\Omega, \overline{\Omega}')$-Untermodul $\mathfrak{N} = ($Am. von $\mathfrak{e})$ ein zweiseitiges Vi. $\mathfrak{s}$, und es ist entweder $\mathfrak{s} = \mathfrak{e}$ oder $\mathfrak{s} = \overline{\Omega}'$. Wenn $\mathfrak{e}$ einseitig ist, so ist $\mathfrak{s} = \overline{\Omega}'$ und die Am. von $\mathfrak{e}$ und $\overline{\Omega}'$ sind gleich. Im Fall $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega}$, ist $\mathfrak{N} = (0)$, wenn $\mathfrak{e}$ einseitig ist.*

Wir machen noch einige einfache Bemerkungen. Nehmen wir den Ω-Untermodul $\mathfrak{N} \supset (0)$ an, und es sei $\mathfrak{s}$ sein Vi. Falls der Am. $\mathfrak{N}'$, von $\mathfrak{s}$, minimal ist, hat man $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$. Wenn $\mathfrak{N}$ minimal ist, kann man $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ nicht daraus entnehmen; wenn aber die Gleichheit gültig wird, dann ist für jedes $\mathfrak{s}' \supset \mathfrak{s}$ der Am. $= (0)$. Für einen Ω-Modul $\mathfrak{M}$, in welchem jeder Ω-Untermodul $\mathfrak{N}$ Am. eines Elementes $A \in \overline{\Omega}'$ ist, können wir behaupten: 1) $\mathfrak{N}$ ist Am. seines Vi; 2) für jeden $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2$ hat man $\mathfrak{s}_1 \subset \mathfrak{s}_2$. Hieraus schliesst man: die *Maximalbedingung* für Rechtsideal in $\overline{\Omega}'$ hat die *Minimalbedingung* für die Ω-Untermoduln in $\mathfrak{M}$ zur Folge.

Wir kommen auf dem Fall von einem $\overline{\Omega}'$-Untermodul zuruck. $\overline{\Omega}'$ hat eine homomorphe Abbildung $\overline{\overline{\Omega}}'$ im Endomorphismenring von $\mathfrak{N}$. Wenn $\overline{\overline{\Omega}}' \simeq \overline{\Omega}'/\mathfrak{a}'$ ist, dann setzt sich das zweiseitige Ideal $\mathfrak{a}'$ der Elemente $A \in \overline{\Omega}'$ für die $xA = 0$, $(x \in \mathfrak{N}$ beliebig). Es ergibt sich $\mathfrak{a}' = \mathfrak{s} =$ Vi. von $\mathfrak{N}$. Hieraus schliesst man:

Satz 9': *Ist $\mathfrak{N}$ ein $\overline{\Omega}'$-Untermodul und $\mathfrak{s}$ sein zweiseitiges Vi., dann ist $\overline{\Omega}'/\mathfrak{s}$ eine isomorphe Abbildung eines Endomorphismenringes von $\mathfrak{N}$ (genau des Ringes der sich aus den ausgezeichneten, durch die Elemente von $\overline{\Omega}'$ induziert, Endomorphismen zusammensetzt).*

Im Fall eines minimalen $\overline{\Omega}'$-Untermodul $\mathfrak{N}$, ist die Gruppe $\mathfrak{M}\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{N}$, wie $\mathfrak{N}$, $\overline{\Omega}'$-irreduzibel. Indem wir $\mathfrak{n} \neq (0)$

annehmen, ist $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = \mathfrak{N}$, und dieser ist $\overline{\Omega}'/\mathfrak{s}$-irreduzibel. Setzt man $\overline{\Omega}'/\mathfrak{s} = \overline{\overline{\Omega}}' \neq (0)$, dann hat man, für jedes, $x \neq 0$, das zu $\mathfrak{M}\mathfrak{n}$ gehört, $x\overline{\overline{\Omega}}' = \mathfrak{M}\mathfrak{n}$. Hieraus schliesst man:

Satz 10': *Ist ein minimaler $\overline{\Omega}'$-Untermodul $\mathfrak{N}$, mit $\mathfrak{n} \neq (0)$, in $\mathfrak{M}$ gegeben, dann hat man $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = x\overline{\overline{\Omega}}' = \mathfrak{N}$, für beliebig $x \neq 0$ das zu $\mathfrak{M}\mathfrak{n}$ gehört, indem wir $\overline{\overline{\Omega}}' = \overline{\Omega}'/\mathfrak{s} \neq (0)$ setzen. Falls $\overline{\overline{\Omega}}' = (0)$, dann ist $\mathfrak{N}$ im Am. von $\overline{\Omega}'$ enthalten.*

Korollar 1': *Wenn $\mathfrak{N}$ (mit $\mathfrak{n} \neq (0)$ ein minimaler $\overline{\Omega}'$-Untermodul in $\mathfrak{M}$ ist, so ist der J-Radikal von $\overline{\Omega}'$ in Vi. von $\mathfrak{N}$ enthalten.*

4) **Anwendung auf die irreduziblen Moduln** — Obwohl, wie die Überschrift angibt, unser Ziel in diesem Paragraphen sich auf irreduziblen Moduln erstreckt, wollen wir einige Sätze aussprechen, die zugleich Vernichtungs- -und Kontraktionsideale auf das Spiel setzen. Betrachten wir ein Rechtsideal $\mathfrak{r}$ und bezeichnen seinen Am. mit $\mathfrak{P}$. Der Satz 5 ergänzen wir mit zwei neuen Sätzen.

Satz 11: *Das Ki. in Am. $\mathfrak{P}$, von $\mathfrak{r}$, ist das Linksideal $\mathfrak{e}$, Annihilator von $\mathfrak{r}$ und des Vi. $\mathfrak{s}$, von $\mathfrak{P}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{s}$ ist ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{e}$ (mit Exponenten 2), der sich aus allen Elementen von $\mathfrak{e}$ die in $\mathfrak{P}$ den Nullendomorphismus induzieren, zusammensetzt.* In der Tat, ist $\mathfrak{P}\mathfrak{r} = (0)$ und $\mathfrak{e}$ wird durch die Gleichheit $\mathfrak{e}\mathfrak{r} = (0)$ definiert. Es gilt sodann die Beziehung $\mathfrak{M}\mathfrak{p}\mathfrak{r} = (0)$, wovon man auf $\mathfrak{p}\mathfrak{r} = (0)$ und $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{e}$ schliesst. Da auch $\mathfrak{M}\mathfrak{e}\mathfrak{r} = (0)$ ist, so ist $\mathfrak{M}\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{p}$, und $\mathfrak{p} = \mathfrak{e}$. Dann, falls $\mathfrak{s}$ das Vi. von $\mathfrak{P}$ ist, hat man noch $\mathfrak{e}\mathfrak{s} = (0)$, weil $\mathfrak{M}\mathfrak{p}\mathfrak{s} = \mathfrak{M}\mathfrak{e}\mathfrak{s} = (0)$. Wir können gelegentlich folgende Bemerkung machen: *wenn $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal, $\mathfrak{P}$ sein Am. und $\mathfrak{s}$ das Vi. von $\mathfrak{P}$ ist, haben $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ dasselbe*

Linksvernichtungsideal. Hier stellt der Durchschnitt $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}$ die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{l}$ die in $\mathfrak{p}$ den Nullendomorphismus induzieren dar. Die Ideale $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ (das letzte in Satz 5 definiert) sind in der Beziehung $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{t}$; sie haben aber dasselbe Linksvernichtungsideal $\mathfrak{l}$.

Satz 12: *Die Durchschnitte $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}$ stellen die Gesamtheiten der Elemente von $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{s}$ die in $\mathfrak{M}/\mathfrak{p}$ den Nullendomorphismus induzieren dar.*

In ähnlicher Weise ergänzen wir Satz 5' mit folgenden beiden Behauptungen:

Satz 11': *Das Vi. von $\mathfrak{Ml}$ ist das Rechtsideal $\mathfrak{r}$, das Vernichtungsideal von $\mathfrak{l}$ und dem Ki. $\mathfrak{n}$, in $\mathfrak{Ml}$, ist. Der Durchschnitt $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$ ist ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{r}$ (mit Exponenten 2), das sich aus allen Elementen von $\mathfrak{r}$, welche $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{Ml}$ abbilden, zusammensetzt.*

Satz 12': *Die Durchschnitte $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{n}$ stellen die Gesamtheiten der Elemente von $\mathfrak{l}$ bzw. $\mathfrak{n}$ die in $\mathfrak{Ml}$ den Nullendomorphismus induzieren dar.*

Danach gehen wir zu den zitierten Anwendungen über. Statt $\bar{\Omega}'$, hier als irreduzibel angenommen, nehmen wir sein Linksideal $\mathfrak{l}$. Die Annahme $x \neq 0$, $(x \in \mathfrak{M})$, hat $x\mathfrak{l} = \mathfrak{Ml}$ zur Folge. Für den Beweis, genügt es folgende Beziehungen zu berücksichtigen: $x\bar{\Omega}'\mathfrak{l} \subseteq x\mathfrak{l}$, $x\bar{\Omega}'\mathfrak{l} = \mathfrak{Ml}$, $\mathfrak{Ml} \supseteq x\mathfrak{l}$. Dann betrachten wir $\mathfrak{Ml}$ und das Rechtsvernichtungsideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{l}$. Wenn wir $0 \neq x \in \mathfrak{Ml}$ annehmen, ist es noch $x\mathfrak{l} = \mathfrak{Ml}$. Dies bedeutet dass $\mathfrak{Ml}$ $\mathfrak{l}$-irreduzibel ist. Nach Satz 12', $\mathfrak{Ml}$ ist auch $\mathfrak{l}/\mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$-irreduzibel. Wir können weiter behaupten: $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$ ist der J-Radikal von $\mathfrak{l}$, da $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$ nilpotent ist. Daraus ergibt sich:

Satz 13: *Wenn $\mathfrak{M}$ $\bar{\Omega}'$-ireduzibel ist, gilt für jedes Linksideal $\mathfrak{l}$, von $\bar{\Omega}'$, die Gleichheit $x\mathfrak{l} = \mathfrak{Ml}$, angenommen $0 \neq x \in \mathfrak{Ml}$. Betrachtet man den Untermodul $\mathfrak{Ml}$ und das Rechtsideal $\mathfrak{r}$, das $\mathfrak{l}$ vernichtet, kann man behaupten:* 1) *$\mathfrak{Ml}$ ist $\mathfrak{l}$-und $\mathfrak{l}/\mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$-irreduzibel;* 2) *der J-Radikal von $\mathfrak{l}$ ist $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$*, [3, § 2]. Die Sätze 11' und 12' erlauben noch folgenden

Zusatz: *Wenn $\mathfrak{n}$ das Ki. in $\mathfrak{Ml}$ ist, kann man behaupten:* 3) *$\mathfrak{Ml}$ ist $\mathfrak{n}$-und $\mathfrak{n}/\mathfrak{r} \cap \mathfrak{n}$ irreduzibel;* 4) *der J-Radikal von $\mathfrak{n}$ ist $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{n}$.*

Nun nehmen wir noch $\bar{\Omega}'$ als irreduzibel an, und betrachten sein Rechtsideal $\mathfrak{r}$. $\mathfrak{p}$ ist der Am. von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{l}$ das Linksvernichtungsideal von $\mathfrak{r}$. Falls $x \notin \mathfrak{p}$, ist die Klasse $\bar{x} = x + \mathfrak{p} (\in \mathfrak{M}/\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{M}}) \neq 0$. Der Modul $x\mathfrak{r} \neq (0)$ gibt uns die Gleichheit $x\mathfrak{r} = \mathfrak{M}$, und sodann ist $\bar{x}\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{M}}$. Dies bedeutet, dass $\mathfrak{M}/\mathfrak{p}$ $\mathfrak{r}$-irreduzibel ist. Nach dem Satz 12, ist auch $\mathfrak{r}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$-irreduzibel. Wir können noch behaupten: $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ ist der J-Radikal von $\mathfrak{r}$, da $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ nilpotent ist. Daraus ergibt sich:

Satz 13': *Wenn $\mathfrak{M}$ $\bar{\Omega}'$-irreduzibel ist, gilt für jedes Rechtsideal $\mathfrak{r}$, von $\bar{\Omega}'$, die Gleichheit $\bar{x}\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{M}}$, angenommen $0 \neq \bar{x} \in \bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}$ der Am. von $\mathfrak{r}$ ist. Betrachtet man das Linksideal $\mathfrak{l}$, das $\mathfrak{r}$ vernichtet, kann man behaupten:* 1') *$\mathfrak{M}/\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{r}$-und $\mathfrak{r}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$-irreduzibel;* 2') *der J-Radikal von $\mathfrak{r}$ ist $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$*, [3, § 2]. Die Sätze 11 und 12 erlauben noch folgenden

Zusatz: *Wenn $\mathfrak{s}$ das Vi. von $\mathfrak{p}$ ist, kann man behaupten:* 3') *$\mathfrak{M}/\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{s}$-und $\mathfrak{s}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}$-irreduzibel;* 4') *der J-Radikal von $\mathfrak{s}$ ist $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}$.*

Folgende Behauptungen sind auch gültig:

SATZ 14: *Ist $\mathfrak{r}'$ ein Linksideal vom irreduziblen Ring $\overline{\Omega}'$, dann hat sein Rechtsvernichtungsideal $\mathfrak{r}$ ein Linksvernichtungsideal $\mathfrak{c}$, das folgende Bedingungen erfüllt: 1) $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{c}$ sind umgekehrte Annihilatoren; 2) $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{c}$ haben den gemeinsamen J-Radikal $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{r}$.*

SATZ 14′: *Ist $\mathfrak{r}'$ ein Rechtsideal vom irreduziblen Ring $\overline{\Omega}'$, dann hat sein Linksvernichtungsideal $\mathfrak{c}$ ein Rechtsvernichtungsideal, das folgende Bedingungen erfüllt: 1′) $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{r}$ sind umgekehrte Annihilatoren; 2′) $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{r}$ haben den gemeinsamen J-Radikal $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{c}$.*

5) **Nilideale als Kontraktions-und Vernichtungsideale** — Es sei $\mathfrak{N}$ ein Untermodul von $\mathfrak{M}$. Falls $\mathfrak{n}$ Nilideal ist, kann man $\mathfrak{N}$ *Nilmodul* nennen. Insbesondere, haben wir *nilpotente*-und *halbnilpotente Moduln* zu betrachten.

SATZ B: *Die direkte Summe eines Ω-Nilmoduls und eines zweiten Ω-Nilmoduls mit zweiseitigem Ki. ist ein Ω-Nilmodul; die direkte Summe von zwei Ω-nilpotenten Moduln ist nilpotent; und die direkte Summe von zwei Ω-halbnilpotenten Moduln ist halbnilpotent. Es wird $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega}$ angenommen.* Der Beweis folgt aus dem Satze A und den Betrachtungen in [4, S. 4 und 5].

SATZ 15: *Wenn $\mathfrak{N}$ ein einfacher Untermodul und $\mathfrak{r} \subseteq \overline{\Omega}'$ ein Rechtsnilideal für welche $\mathfrak{N}\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{N}$ ist, hat man unbedingt* $\mathfrak{N}\mathfrak{r} = (0)$. Falls $\mathfrak{N}\mathfrak{r} \neq (0)$ ist, so ist $\mathfrak{N}\mathfrak{r} = \mathfrak{N}$. Es gibt $n \in \mathfrak{N}$, $A \in \mathfrak{r}$ für welche $nA \neq 0$. Dann ist $\mathfrak{N}A$ ein nicht Nulluntermodul in $\mathfrak{N}$ enthalten, was $\mathfrak{N}A = \mathfrak{N}$ ergibt. Hieraus schliesst man $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}A = \cdots = \mathfrak{N}A^n = (0)$, wenn $A^m = 0$. Der Widerspruch ist eine Folgerung der Annahme $\mathfrak{N}\mathfrak{r} = \mathfrak{N}$.

SATZ 15′: *Wenn $\mathfrak{N}$ ein maximaler Untermodul und $\mathfrak{c} \subseteq \overline{\Omega}'$ ein Linksnilideal für welche $\mathfrak{N}\mathfrak{c} = (0)$ ist, hat man unbedingt $\mathfrak{M}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{N}$.* Indem wir $\mathfrak{M}\mathfrak{c} \notin \mathfrak{N}$ annehmen, gibt es $m \in \mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{c}$, für welche $mA \notin \mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{M}A \notin \mathfrak{N}$, und deshalb $(\mathfrak{M}A, \mathfrak{N}) = \mathfrak{M}$. Falls $A^{s-1} \neq 0$, $A^s = 0$, schliesst man auf $(\mathfrak{M}A^s, \mathfrak{N}A^{s-1}) = \mathfrak{M}A^{s-1} = (0)$, was ein Widerspruch ist. Man darf $\mathfrak{M}\mathfrak{c} \notin \mathfrak{N}$ nicht annehmen.

SATZ 16: *Ist $\mathfrak{N} \neq (0)$ ein einfacher Niluntermodul, so ist $\mathfrak{n} = (0)$ oder $\mathfrak{n}^2 = (0)$.* In der Tat, sei es $\mathfrak{n}^2 \neq (0)$. Für $0 \neq A \in \mathfrak{n}$ ist $\mathfrak{M}A = \mathfrak{N}$. Dann folgt $\mathfrak{M}A^2 = (0)$, weil man sonst $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}A = \mathfrak{M}A^2 = \cdots$ haben würde, was nicht geht, da A nilpotent ist. Endlich, wenn $T \in \mathfrak{n}$, hat man $\mathfrak{M}AT = \mathfrak{N}T \subseteq \mathfrak{N}$. Die Gleichheit $\mathfrak{N}T = \mathfrak{N}$ kann nicht gelten, weil auch T nilpotent ist. Somit ist $\mathfrak{M}AT = (0)$, $AT = 0$, wie der Satz behauptet.

SATZ 16′: *Falls $\mathfrak{N} \neq (0)$ ein maximaler Untermodul mit Nilvernichtungsideal $\mathfrak{s}$ ist, hat man entweder $\mathfrak{s} = (0)$ oder* $\mathfrak{s}^2 = (0)$. In der Tat, sei es $\mathfrak{s} \neq (0)$. Für $0 \neq A \in \mathfrak{s}$, ist der Am. $\mathfrak{N}'$ von A genau $\mathfrak{N}$. Dann folgt $\mathfrak{M}$ als Am. von A^2, weil man sonst gemeinsamen Am. für A und A^2 haben würde; sodann würde, für jedes k, der Am. von A^k auch $\mathfrak{N}$ sein, was nicht geht, sobald $A^k = 0$ ist. Danach, wenn $T \in \mathfrak{s}$, hat man $AT = 0$, da $AT \neq 0$ [indem wir $A^m = 0$, $A^{m-1} \neq 0$ annehmen] uns $\mathfrak{M}A^mT = \mathfrak{M}A^{m-1}AT = (0)$, $\mathfrak{M}A^{m-1} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}A^{n-1}T = 0$, $A^{m-1}T = 0$, usw., bis $AT = 0$, geben würde, gegen die Annahme.

SATZ 17: *Ist $\mathfrak{N}$ ein Untermodul und $A \in \mathfrak{n}$ ein Endomorphismus für welchen, ausser $\mathfrak{M}A \subseteq \mathfrak{N}$, noch die Differenz $1 - A = A_1$ [$1 =$ Einsendomorphismus von $\overline{\Omega}'$] nilpotent ist, dann ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$,* [4, S. 7]. Es ist ja $\mathfrak{n} = \overline{\Omega}'$. Somit ist $1 \in \mathfrak{n}$, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ und deshald $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

SATZ 17′: *Ist $\mathfrak{N}$ ein Untermodul und $A \in \mathfrak{s}$ (dieses ist das Vi. von $\mathfrak{N}$) ein Endomorphismus für welchen, ausser $\mathfrak{N}A = (0)$, noch die Differenz $1 - A = A_1$ nilpotent ist, dann ist $\mathfrak{N} = (0)$, [$1 =$ Einsendomorphismus von $\overline{\Omega}'$].*

Korollar A: *Für die direkte Summe* $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}$, *wobei* $\mathfrak{N}_1$ *Niluntermodul ist, hat man unbedingt* $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$, *falls* $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega}$ *ist.*

6) **Projektionnen** — Einen idempotenten Endomorphismus E von $\mathfrak{M}$ nennt man eine *Projektion.* Indem wir $1 = E + (1 - E)$ setzen, machen wir eine Zerlegung von 1 in orthogonalen Idempotenten. Der Modul $\mathfrak{M}$ lässt dann folgende Zerlegung zu:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}(1 - E). \tag{1}$$

Es folgt:

Satz 18: *Wenn E ein Idempotent ist, hat man die Zerlegung* (1). *Es ist, für* $m \in \mathfrak{M}E$, $mE = m$; *und, für* $m' \in \mathfrak{M}(1 - E)$, $m'E = 0$.

Betrachten wir den gewöhnlichen Ring $\overline{\Omega}'$ und nennen $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}'$ die Ki. von $\mathfrak{M}$ in beiden Summanden von (1) und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ die entsprechende Vi.. Man kann behaupten:

Satz 19 und 19': *Das Ideal $\mathfrak{n}$ setzt sich aus allen Elementen* $A \in \overline{\Omega}'$ *für welche* $A = AE$ [*oder* $A(1 - E) = 0$], *und das Ideal* $\mathfrak{s}'$ *aus allen Elementen* $B \in \mathfrak{s}'$ *für welche* $B = EB$ [*oder* $(1 - E)B = 0$], *zusammen.*

Ein primitives Idempotent eines Ringes, [4, S. 18], darf man definieren als das für welches keine Zerlegung in von Null verschiedenen orthogonalen Idempotenten möglich wird. Eine Projektion nennt man *primitiv,* wenn das entsprechende Idempotent E primitiv ist. Wenn $\mathfrak{M}$ ein Ω-Modul ist, sagt man $\mathfrak{M}$ ist *Ω-unzerlegbar,* falls $\mathfrak{M}$ keine direkte Summe von zwei Ω-Untermoduln ist. In $\overline{\Omega}$ ist dann *1* primitiv; es gibt kein Idempotent ausser *1*, [5, S. 11].

Es sei $E \in \overline{\Omega}$. Wenn E primitiv ist, der Ω-Untermodul $\mathfrak{M}E$ ist unzerlegbar. In der Tat, die Gleichheit $\mathfrak{M}E = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}''$, wobei die Summanden als Ω-Untermoduln angenommen werden, würde uns zwei Idempotente E' und E'' durch folgende Abbildungen definieren:

$$\begin{aligned} m &\to mE \to n' = mE', \\ m &\to mE \to n'' = mE'', \end{aligned} \qquad (m \in \mathfrak{M},\ mE = n' + n'',\ n' \in \mathfrak{N}',\ n'' \in \mathfrak{N}'').$$

Hätte man die Gleichheit $E = E' + E''$, dann wären die Beziehungen $mE'E'' = n'E''$, $n'E = n' = n + 0$, $n'E'' = 0 = mE'E''$ erfüllt. Daraus würde man $E'E'' = 0$ schliessen, da m beliebig ist. In ähnlicher Weise, würde die Gleichheit $E''E' = 0$ gelten, gegen die Annahme über die Primitivität von E.

Satz 20: *Ist E_1 primitiv in $\overline{\Omega}$, dann hat der unzerlegbare Ω-Untermodul $\mathfrak{M}E_1$ keinen echten Ω-Untermodul, der eine, durch ein Idempotent $E_2 \in \overline{\Omega}$ definiert, homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ sein kann,* [1, § 3]. Hätte man $\mathfrak{M}E_2 \subset \mathfrak{M}E_1$, indem wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E_2 + \mathfrak{M}(1 - E_2)$, $\mathfrak{M}E_1 = \mathfrak{M}E_2 + \mathfrak{M}E_1 \cap \mathfrak{M}(1 - E_2)$ schreiben würden, dann würde der angegebene Durchschnitt von Null verschieden sein und hätte man ein Absurdum zur Folge.

Satz 20': *Ist E_1 primitiv in $\overline{\Omega}$, dann sein Am.* $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(1 - E_1)$ *solcher ist, dass kein Ω-Untermodul* $\mathfrak{N}' \supset \mathfrak{M}(1 - E_1)$ *existieren kann, der Am. eines Idempotentes* $E_2 \in \overline{\Omega}$ *ist.* Zunächst einmal ist der Am. eines Idempotentes E_1 genau $\mathfrak{M}(1 - E_1)$, da diese Menge dem Am. gehört, und andererseits falls wir $xE_1 = 0$, $(x \in \mathfrak{M})$, haben, indem wir $x = xE_1 + x(1 - E_1)$ schreiben, schliessen wir auf $x = x(1 - E_1) \in \mathfrak{M}(1 - E_1)$. Danach nehmen wir $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}(1 - E_2) \supset \mathfrak{M}(1 - E_1)$ an, wovon sich $\mathfrak{M}(1 - E_2) = \mathfrak{M}(1 - E_1) + \mathfrak{M}(1 - E_2) \cap \mathfrak{M}E_1$ ergibt. Man würde $(1 - E_1)E_2 = 0$ haben und $E_1 - E_2E_1 = (1 - E_2)E_1$ wäre

Idempotent. Da $\mathfrak{M}(1-E_2)E_1 \subseteqq \mathfrak{M}E_1$ ist, würde eine der beiden Beziehungen $(1-E_2)E_1 = 0$, $\mathfrak{M}(1-E_2)E_1 = \mathfrak{M}E_1$ gelten. Die erste wurde uns die Nullheit des Durchschnittes $\mathfrak{M}(1-E_2) \cap \mathfrak{M}E_1$ zeigen, was den Widerspruch $\mathfrak{M}(1-E_2) = \mathfrak{M}(1-E_1)$ zur Folge hätte; der zweiten, da es $E_2 = E_1E_2$ gilt, würde man auf $\mathfrak{M}(1-E_2)E_1E_2 = (0) = \mathfrak{M}E_1E_2 = \mathfrak{M}E_2$, $E_2 = 0$ schliessen.

Satz 21: *Wenn der Untermodul $\mathfrak{M}A$, $(A \in \overline{\Omega}')$, gegeben wird, das Vorhandensein eines Endomorphismus $S \in \overline{\Omega}'$, für welchen $ASA = A$, hat das Vorhandensein eines Idempotentes $E \in \overline{\Omega}'$, für welchen $\mathfrak{M}A = \mathfrak{M}E$, zur Folge,* [1, § 3]. In der Tat, $SA = E$ ist Idempotent, weil $SA \cdot SA = SA$. Aber, da $\mathfrak{M}E = \mathfrak{M}SA \subseteqq \mathfrak{M}A$, $\mathfrak{M}A = \mathfrak{M}AE \subseteqq \mathfrak{M}E$ ist, schliesst man auf $\mathfrak{M}A = \mathfrak{M}E$.

Satz 21': *Ist $\mathfrak{N}$ der Am. von $A \in \overline{\Omega}'$, indem wir das Verhandensein eines Endomorphismus $S \in \overline{\Omega}'$, für welchen $ASA = A$, annehmen, dann gibt es ein Idempotent $E \in \overline{\Omega}'$, für welchen $\mathfrak{N}$ sein Am. ist.* In der Tat, $AS = E$ ist Idempotent, da $AS \cdot AS = AS$. Wenn $\mathfrak{N}'$ der Am. von E ist, dann, der Beziehungen $\mathfrak{N}E = \mathfrak{N}AS = (0)$, schliessen wir auf $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}'$. Danach der Beziehungen $\mathfrak{N}'EA = (0) = \mathfrak{N}'ASA = \mathfrak{N}'A$ folgt $\mathfrak{N}' \subseteqq \mathfrak{N}$. Der Sat ist bewiesen.

Satz C: *Falls $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ Ω-Nilmoduln von $\mathfrak{M}$ sind, gibt es keine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$, in der direkten angenommen Summe $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$, die von einem Idempotent definiert wird.* Indem wir die direkte Summe mit $\mathfrak{N}$ darstellen, wissen wir, dass im Fall $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega}$ $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$ ist. Da die $\mathfrak{n}_i$ Nilideale sind, der Satz kommt dadurch, dass es kein Idempotent in der Summe von zwei Nilideale gibt, heraus, [4, S. 22].

Falls $\mathfrak{N}$ ein einfacher Untermodul und $\mathfrak{n}^2 \neq (0)$ ist, dann kann $\mathfrak{N}$ kein Nilmodul sein. Wir nennen einen Untermodul *regulär,* wenn er homomorphe nicht nilpotente Abbildungen von $\mathfrak{M}$ hat. Wir können folgenden Satz aussprechen:

Satz 22: *Der einfache Untermodul $\mathfrak{N}$, für welchen $\mathfrak{n} \neq (0)$ ist, entweder ist nilpotent (mit Exponenten 2) oder ist ein regulärer Untermodul.*

Falls $\mathfrak{N} \neq (0)$ ein angegebener maximaler Untermodul ist, und für sein Vi. $\mathfrak{s}$ gilt $\mathfrak{s}^2 \neq (0)$, $\mathfrak{s}$ kann kein Nilideal sein. Also:

Satz 22': *Wenn $\mathfrak{N} \neq (0)$ ein maximaler Untermodul, für welchen $\mathfrak{s} \neq (0)$ ist, entweder ist $\mathfrak{s}$ nilpotent (mit Exponenten 2) oder ist regulär.*

Satz 23: *Ist $\mathfrak{N}$ ein einfacher Ω-Untermodul, in bezug auf $\overline{\Omega}$ regulär, dann gibt es ein Idempotent $E \in \mathfrak{n}$ für welchen $\mathfrak{M}E = \mathfrak{N}$.* Setzen wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}A$, wobei der Endomorphismus A nicht nilpotent angenommen wird. Dann wird $\mathfrak{N}A = \mathfrak{N}$ sein. Gegeben $m \in \mathfrak{M}$, durch A gewinnt man $mA = n \in \mathfrak{N}$; und da $\mathfrak{N}A = \mathfrak{N}$ ist und deshalb A einen Automorphismus in $\mathfrak{N}$ darstellt, nennen wir $n' \in \mathfrak{N}$ das Element für welches $n'A = n$. Die Abbildung $m \to n'$ ist ein Endomorphismus B, von $\mathfrak{M}$, der ausser der Gleichheit $\mathfrak{M}B = \mathfrak{N}$ noch der Beziehung $BA = A$ genügt. Hieraus leiten wir $(B^2 - B)A = 0$ ab. Falls $B^2 - B = 0$, ist B das gewünschte Idempotent. Sonst hat man $\mathfrak{M}(B^2 - B)A = 0$, $\mathfrak{M}(B^2 - B) = \mathfrak{N}$. Diese letzte Gleichheit ist ein Widerspruch, da sie $\mathfrak{N}A = (0)$ ergibt. Der Satz wird also mit $B = E$ beantwortet.

Korollar 2: *Dann und nur dann ist ein einfacher Ω-Untermodul $\mathfrak{N}$, von $\mathfrak{M}$, ein Summand einer direkten Summe gleich $\mathfrak{M}$, wenn er in bezug auf $\overline{\Omega}$ regulär ist.*

Korollar 3: *Wenn $\mathfrak{A}$ ein minimaler Ω-Untermodul von $\mathfrak{M}$ und das Ideal $\mathfrak{n}$, von $\bar{\Omega}$, nicht nilpotent ist, dann für jedes aus Null verschiden $A \in \mathfrak{n}$, falls $A^2 \neq 0$, ist der Am. von A^2 und des idempotenten E derselbe.* Wir haben in Satz gesehen, dass man für jedes $A \in \mathfrak{n}$, das die Korollarbedingungen erfüllt, $EA = A$ hat. Dann ist $\mathfrak{M}(1-E)A = \mathfrak{M}(1-E)EA = (0)$, was $\mathfrak{M}(1-E) \subseteqq \mathfrak{A}_1$, mit $\mathfrak{A}_1 A = (0)$, zeigt. Der Gleichheit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}(1-E)$ schliesst man auf $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}(1-E)$. Wenn $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{M}E = \mathfrak{M}E = \mathfrak{A}$ wäre, würde sich, gegen die Annahme, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{M}$, $A = 0$ ergeben. Also ist $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{M}(1-E)$. Da wir A durch A^2 ersetzen können, ergibt sich die Behauptung vollständig

Bemerkungen: Es sei $C \in \mathfrak{n}$ ein beliebiges nicht Nullelement. Man hat $\mathfrak{M}C = \mathfrak{A} = \mathfrak{M}E$, und deshalb $\mathfrak{M}CE = \mathfrak{M}E = \mathfrak{M}C$. Es gil sogar $CE = C$, da, indem wir $mC = m'E$ setzen, kommt $mCE = m'E = mC$, für beliebiges $m \in \mathfrak{M}$. Aber falls $C^2 = 0$, bereits das Produkt EC Null ist, da $\mathfrak{M}C^2 = \mathfrak{M}CC = \mathfrak{M}EC = (0)$. Endlich, indem wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}(1-E)$, $\bar{\Omega} = \mathfrak{n} + \mathfrak{n}'$, $\bar{\Omega}E = (\mathfrak{n}E, \mathfrak{n}'E)$ schreiben, zeigt der Umstand $\mathfrak{n}'E = (0)$ die Beziehungen $\bar{\Omega}E = \mathfrak{n}E = \mathfrak{n}$. Wir können den vorhergehenden Satz 23 so vervollständigen:

Zusatz: *Das Idempotent E des Satzes 23 erfüllt die Gleichheit $CE = C$, für jedes $C \in \mathfrak{n}$, und auch die Beziehung $EC = 0$, falls $C^2 = 0$. Wenn $C^2 \neq 0$, dann $EC = C$. Das Ideal $\mathfrak{n}$ hat die Form $\mathfrak{n} = \bar{\Omega}E$.*

Satz 23′: *Wenn $\mathfrak{A}$ ein maximaler Ω-Untermodul und sein Vi., in $\bar{\Omega}$, nicht nilpotent ist, dann ist $\mathfrak{A}$ genau der Am. eines Idempotentes $E \in \mathfrak{s}$.* Nehmen wir $A \in \mathfrak{s}$ und $A^2 \neq 0$ an. Dann gegeben $m \notin \mathfrak{A}$, kann man $mA \in \mathfrak{A}$ nicht haben, weil sont $mA^2 = 0$ sein würde und A^2 den ganzen Modul $\mathfrak{M}$ vernichten würde, also $A^2 = 0$ wäre. Es gilt die

Gleichheit $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}A, \mathfrak{A})$, die jedoch eine direkte Summe ist. In der Tat, wenn $x \in \mathfrak{M}A \cap \mathfrak{A}$, indem wir $x = mA = n$ setzen, wird man $xA = mA^2 = nA = 0$ haben. Das Element m wird dem Am. von A^2, der $\mathfrak{A}$ ist, gehören. Aber $\mathfrak{A}$ ist der Am. jedes $B \in \mathfrak{s}$, das nicht Null ist. Somit ist $mA = 0$, $x = 0$. Indem wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}A + \mathfrak{A}$ schreiben, gibt es orthogonale Idempotente $E, E' \in \bar{\Omega}$, für welche $\mathfrak{M}E = \mathfrak{M}A$, $\mathfrak{M}E' = \mathfrak{A}$. Der Satz wird genau durch das Idempotent $E = 1 - E'$ beantwortet sein.

Korollar 2′: *Dann und nur dann ist ein maximaler Ω-Untermodul $\mathfrak{A}$, von $\mathfrak{M}$, Summand einer direkten Summe gleich $\mathfrak{M}$, wenn das Vi. $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{A}$, in $\bar{\Omega}$, kein Nilideal ist.*

Korollar 3′: *Falls $\mathfrak{A}$ ein maximaler Ω-Untermodul und sein Vi. nicht nilpotent ist, dann hat man für jedes $A \in \mathfrak{s}$, für welches $A^2 \neq 0$, $\mathfrak{M}A \simeq \mathfrak{M}A^2 = \mathfrak{M}E$.* Erstens der Gleichheit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}A + \mathfrak{A}$ leitet man $\mathfrak{M}A = \mathfrak{M}A^2$ ab. Danach des Homomorphismus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}A$ leitet man $\mathfrak{M}A \simeq \mathfrak{M}/\mathfrak{A}_1$ ab, wobei $\mathfrak{A}_1$ der Am. von A ist. Es gilt $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{M}A \simeq \mathfrak{M}/\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{M}A^2$.

Bemerkungen: Da im Satze $\mathfrak{M}E = \mathfrak{M}A$ ist, leitet man sofort $AE = A$ ab, wenn $A^2 \neq 0$, $A \in \mathfrak{s}$. In allen Fällen, wenn $0 \neq C \in \mathfrak{s}$, der Am. von C ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(1-E)$ und so ergibt sich $C = EC$, da $\mathfrak{M}(1-E)C = (0)$ ist. Aber falls $C^2 = 0$ ist, so ist bereits das Produkt $CE = 0$, weil $\mathfrak{M}C^2 = \mathfrak{M}CC = (0)$ die Beziehungen $\mathfrak{M}C \subseteqq \mathfrak{M}(1-E)$, $\mathfrak{M}CE = (0)$ ergibt. Endlich hat $\mathfrak{s}$ offenbar die Form $\mathfrak{s} = E\bar{\Omega}$. Den vorhergehenden Satz 23′ können wir so vervollständigen:

Zusatz: *Das Idempotent E des Satzes 23′ erfüllt die Gleichheit $C = EC$, fur jedes $C \in \mathfrak{s}$, und auch die Beziehung $CE = 0$, falls $C^2 = 0$. Wenn $C^2 \neq 0$, dann $CE = C$. Das Ideal $\mathfrak{s}$ hat die Form $\mathfrak{s} = E\bar{\Omega}$.*

Einen regulären Untermodul $\mathfrak{N}'$ nennt man *untersten* Untermodul, wenn für jedes $\mathfrak{N}''\subset\mathfrak{N}'$ das Kontraktionsideal $\mathfrak{n}''$ Nilideal ist. Ein triviales Beispiel wird durch die einfache reguläre Untermoduln gegeben. Man muss berücksichtigen, dass in dieser Definition $\mathfrak{N}'$ ein Ω-Untermodul und die fragliche Untermoduln $\mathfrak{N}''$ auch Ω-Untermoduln sind. Man kann noch bemerken, dass für jedes nicht nilpotente $A\in\mathfrak{n}'$ immer $\mathfrak{M}A=\mathfrak{N}'=\mathfrak{M}A^2=\mathfrak{N}'A$ ist, da $\mathfrak{M}A\subset\mathfrak{N}'$ oder $\mathfrak{M}A^2\subset\mathfrak{N}'$ die Nilpotenz von A ergeben würde. Danach indem wir die Am. von A und A^2, $\mathfrak{N}_1$ bzw. $\mathfrak{N}_2$, betrachten, schliessen wir auf $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_1\simeq\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_2$ aus dem Umstand, dass $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{M}A=\mathfrak{N}'\simeq\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{M}A^2=\mathfrak{N}'\simeq\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_2$ ist. Dies gegeben, werden wir zwischen den untersten Untermoduln welche, die die folgende Bedingung erfüllen, unterscheiden: I) *Es gibt ein $X\in\mathfrak{n}'$ für welches die Am. $\mathfrak{N}_1$ bzw. $\mathfrak{N}_2$, von X und X^2, gleich sind.* Es gilt folgender

Satz 24: *Ein unterster Untermodul $\mathfrak{N}'$, von $\mathfrak{M}$, der die Bedingung I) erfüllt, ist immer eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ durch ein Idempotent definiert.* Nehmen wir $A\in\mathfrak{n}'$ den nicht nilpotenten Endomorphismus der Bedingung an. Da wir, für jedes $m\in\mathfrak{M}$, $mA=m'A^2$, mit einem gewissen $m'\in\mathfrak{M}$, haben, schliessen wir auf $(m-m'A)A=0$, was $m-m'A\in\mathfrak{N}_1$ bedentet. Es gilt deswegen die direkte Summe $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{M}A=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}'$, woraus man den Satz entnimmt.

Wir werden noch zwischen den untersten Untermoduln welche, die die folgende Bedingung erfüllen, unterscheiden: II) *Es existiert ein Endomorphismus X für welchen $\mathfrak{M}X=\mathfrak{N}'$ und auch $\mathfrak{N}'\simeq\mathfrak{N}'X=\mathfrak{N}'$ ist.* Der Endomorphismus X bestimmt dann einen Automorphismus in $\mathfrak{N}'$. Wenn es sich um einfache reguläre Ω-Untermoduln handelt, die Bedingung II) ist immer erfüllt.

Der Satz 23 lässt folgende Ergänzung zu:

Satz 25: *Ein unterster Untermodul $\mathfrak{N}'$, von $\mathfrak{M}$, der die Bedingung II) erfüllt, ist immer eine durch ein Idempotent definiert homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$.* Setzen wir $\mathfrak{N}'=\mathfrak{M}A$, wobei A nicht nilpotent und der Endomorphismus der Bedingung II) ist: $\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{N}'A=\mathfrak{N}'$. Ähnlich wie im erwähnten Satz 23, indem wir $m\to mA=n'$, $n''A=n'$, $(n, n''\in\mathfrak{N}')$ annehmen, ist die Abbildung $m\to n''$ ein Endomorphismus B, von $\mathfrak{M}$, der folgende Beziehungen erfüllt: $\mathfrak{M}B=\mathfrak{N}'$, $BA=A$, $(B^2-B)A=0$. Falls $B^2-B=0$, ist B das gewünschte Idempotent. Sonst wenn man $B^2-B=$ $=T\neq 0$ hat, ist T nilpotent, da $\mathfrak{M}T\subset\mathfrak{N}'$, weil die Gleichheit $\mathfrak{M}T=\mathfrak{N}'$, die Beziehungen $\mathfrak{M}TA=0=\mathfrak{N}'A=\mathfrak{N}'$ zur Folge hat. Ein bekannter Satz [4, S. 19] behauptet nun die Existenz eines Polynomes in B, das Idempotent ist, falls $B\in\mathfrak{n}$ nicht nilpotent und $B^2-B=T$ nilpotent ist. Hier muss man bemerken, dass, wie im vorigen Satz, $\mathfrak{N}'$ ein Ω-Untermodul ist, wie bereits behauptet wurde.

Ein Untermodul $\mathfrak{N}'$ mit Vernichtungsideal, das kein Nilideal ist, nennt man *obersten* Untermodul, wenn für jeden $\mathfrak{N}''\supset\mathfrak{N}$ das Vi. Nilideal ist. Man muss berücksichtigen, dass in dieser Definition $\mathfrak{N}'$ ein Ω-Untermodul ist und die fragliche Untermoduln $\mathfrak{N}''$ auch Ω-Untermoduln sind. Man kann noch bemerken, dass für jedes beliebig $A\in\mathfrak{s}=$ Vi. von $\mathfrak{N}'$, falls A nicht nilpotent angenommen wird, der Am. von A oder A^2 genau $\mathfrak{N}'$ ist, da, indem wir $\mathfrak{N}''$ durch die Beziehung $\mathfrak{N}''A=(0)$ definieren, die Gültigkeit von $\mathfrak{N}''\supset\mathfrak{N}'$ die Nilpotenz von A zur Folge haben würde. Danach wird sich, indem wir $\mathfrak{M}A$ und $\mathfrak{M}A^2$ betrachten und auch der folgenden Umstände $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{M}A\simeq\mathfrak{M}/\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{M}A^2\simeq\mathfrak{M}/\mathfrak{N}'$, die Beziehung $\mathfrak{M}A\simeq\mathfrak{M}A^2$ ergeben.

Dies angenommen werden wir zwischen den obersten Untermoduln welche, die die folgende Bedingung erfüllen, unterscheiden: I') *Es gibt ein $X\in\mathfrak{s}$ fur welches $\mathfrak{M}X\simeq\mathfrak{M}X^2=$ $=\mathfrak{M}X$.* Es gilt folgender

Satz 24′: *Ein oberster Untermodul $\mathfrak{N}'$, von $\mathfrak{M}$, unter der Bedingung I′), ist immer Am. eines Idempotentes.* Nehmen wir $A \in \mathfrak{S}$ den nicht nilpotenten Endomorphismus der Bedingung I′) an. Da man für jedes $m \in \mathfrak{M}$, $mA = m'A^2$, mit einem gewissen m', hat, ergibt sich die Gleichheit $(m - m'A)A = 0$, woraus man auf $m - m'A \in \mathfrak{N}'$ schliesst. Die direkte Summe $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}A + \mathfrak{N}'$ ist also gültig. Daher ist der Satz bewiesen.

Wir werden noch zwischen den regulären obersten Untermoduln welche, die die folgende Bedingung erfüllen, unterscheiden: II′) *Es existiert ein Endomorphismus $X \in \mathfrak{S}$, welcher einen Automorphismus in $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}'$, derart, dass $\overline{\mathfrak{M}} \sim \overline{\mathfrak{M}}X = \overline{\mathfrak{M}}$ bestimmt.* Wenn es sich un maximale Untermoduln mit Vi., das kein Nilideal ist, handelt, ist die Bedingung II′) immer gültig. Nämlich, falls für X, $X^2 \neq 0$ ist, dann wird $\overline{\mathfrak{M}}X = \overline{\mathfrak{M}}$ sein, weil $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}' = \overline{\mathfrak{M}}$ einfach ist und $(m + \mathfrak{N}')X = (0)$ die Beziehungen $mX \in \mathfrak{N}'$, $mX^2 = 0$, $m \in \mathfrak{N}'$ zur Folge hat. Auch ist $\overline{\mathfrak{M}}X^2 = (\overline{\mathfrak{M}}X)X = \overline{\mathfrak{M}} \sim \overline{\mathfrak{M}}X$. Der Satz 23′ lässt folgende Ergänzung zu:

Satz 25′: *Ein oberster Untermodul $\mathfrak{N}'$, von $\mathfrak{M}$, der die Bedingung II′) erfüllt, ist immer Am. eines Idempotentes.* Nehmen wir $A \in \mathfrak{S}$ an, wobei A nicht nilpotent und der Endomorphismus der Bedingung II′) ist. Dann, gegeben $m \notin \mathfrak{N}'$, kann $mA \in \mathfrak{N}'$ nicht gelten, weil sonst $mA^2 = 0$, $m \in \mathfrak{N}'$ sein würde. Die Summe $(\mathfrak{M}A, \mathfrak{N}') = \mathfrak{M}A + \mathfrak{N}'$ ist direkt. Im Homomorphismus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}/\mathfrak{N}' = \overline{\mathfrak{M}}$, bildet sich $\mathfrak{M}A + \mathfrak{N}'$ auf $(\mathfrak{M}A + \mathfrak{N}')/\mathfrak{N}'$ ab, d. h. auf die Menge der Elemente deren Form $(m + \mathfrak{N}')A = \overline{m}A$ ist. Solche Menge stellt $\overline{\mathfrak{M}}A = \overline{\mathfrak{M}}$ dar, also ist $\mathfrak{M}A + \mathfrak{N}' = \mathfrak{M}$. Hieraus schliesst man den Satz.

Wir haben bereits gesehen, dass $\mathfrak{M}E$ unzerlegbar sobald E primitiv ist. Umgekehrt, wenn ein Ω-Untermodul $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}E$, mit E Idempotent, unzerlegbar ist, so ist E primitiv, wie man aus der Definition von primitiver Projektion sieht. Falls $\mathfrak{N}'$ ein unterster Untermodul ist, wenn wir die Gleichheit $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}E$ annehmen, dann ist E gleich primitiv. Nämlich, einer Zerlegung in orthogonalen Idempotenten $E = E' + E''$ von E, der Gleichheiten $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}E = \mathfrak{M}E' + \mathfrak{M}E''$, würde man auf $\mathfrak{M}E'$ als eine in $\mathfrak{N}'$ enthaltene und und von diesem verschiedene homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ schliessen, gegen die Annahme $\mathfrak{N}'$ unterster zu sein. Also:

Satz 26: *Es ist primitiv das Idempotent E der Gleichheit $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}E$, wenn $\mathfrak{N}'$ ein unterster Untermodul ist.*

Gesetzt, dass $\mathfrak{N} \neq (0)$ ein oberster Untermodul ist, lehren die Sätze 24′ und 25′ das Vorhandensein eines E, das genau $\mathfrak{N}$ als Am. hat. Das Idempotent E ist primitiv aus dem folgenden Grunde. Wenn wir $E = E' + E''$ mit orthogonalen E' und E'' haben könnten, dann würde für jedes $n \in \mathfrak{N}$, $nE' = nEE' = 0$, $nE'' = nEE'' = 0$ sein, also die Am. $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$, von E' und E'', die Beziehungen $\mathfrak{N}' \supseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'' \supseteq \mathfrak{N}$ erfüllen würden. Aber $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'$ kann nicht sein, weil man, wenn man $m \notin \mathfrak{N}'$ annimmt und so $mE' \neq 0$, $mE'E' = mE' \neq 0$, $mE\,E'' = 0$ ist, auf $mE \notin \mathfrak{N}'$, $mE' \in \mathfrak{N}''$ schliessen würde. Deshalb wird zB. $\mathfrak{N}' \supset \mathfrak{N}$ sein, gegen die Annahme $\mathfrak{N}$ ein oberster Untermodul zu sein. Also:

Satz 26′ *Es ist primitiv das Idempotent E, dessen Am. ein oberster Untermodul ist.*

Satz 27: *Wenn in $\mathfrak{M}$ jeder reguläre Untermodul eine durch Idempotent definierte homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ hat, dann ist die direkte Summe einer endlichen Anzahl von Nilmoduln auch ein Nilmodul.* Die in Frage kommende Summe kann, nach dem Satze C, hier einen regulären Untermodul nicht erzeugen.

Mann kann $\mathfrak{M}$ als *regulären Modul* bezeichnen, falls es für jeden Endomorphismus A ein S existiert, das folgende Beziehung erfüllt: $ASA=A$. Die Sätze 21 und 20 erlauben die folgenden Aeusserungen:

Satz 28: *In einem regulären Modul ist jede endomorphe Abbildung durch ein Idempotent definiert.* Man darf auch sagen, dass jeder Untermodul mit endomorpher Abbildung des Moduls regulärer Untermodul ist.

Satz 29: *Falls E primitiv und $\mathfrak{M}$ regulär ist, kann kein echter Untermodul von $\mathfrak{M}E$ homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ sein.*

Auch die Sätze 21′ und 20′ erlauben folgende Aeusserungen:

Satz 28′: *In einem regulären Modul, jeder Am. eines Elementes ist Am. eines Idempotentes.*

Satz 29′: *Falls E primitiv und $\mathfrak{M}$ regulär ist, kann der Am. $\mathfrak{A}$, von E, kein echter Untermodul eines Am. $\mathfrak{A}'$ eines Endomorphismus A sein.*

Indem man den Begriff «Hauptideal» durch den Begriff «endomorpher Untermodul» ersetzt, beweist man folgenden Satz, der einem anderen über reguläre Ringe entspricht, [4, S. 33]:

Satz 30: *Sind $\mathfrak{M}E$ und $\mathfrak{M}E$ zwei endomorphe Abbildungen eines regulären Moduls $\mathfrak{M}$, dann existiert ein Idempotent F, das folgende Beziehungen erfüllt: $FE=EF=0$, $(\mathfrak{M}E,\mathfrak{M}E')=\mathfrak{M}E+\mathfrak{M}F$.* Falls $\mathfrak{M}E'\subseteq\mathfrak{M}E$ genügt es $F=0$ zu nehmen. Wenn aber dies nicht der Fall ist, kann man folgende Gleichheit beweisen: $(\mathfrak{M}E,\ \mathfrak{M}E')=\mathfrak{M}E+ +\mathfrak{M}E'(1-E)$. Ein Element des zweiten Gliedes hat die

Form $mE+m'E'(1-E)=(m-m'E')E+m'E'$, was uns zeigt dem ersten zu gehören. Umgekehrt ein Element des ersten Gliedes hat die Form $mE+m'E'=(m+m'E')E+ +m'E'(1-E)$, was uns zeigt dem zweiten zu gehören. Das sogennante zweite Glied ist eine direkte Summe. Endlich, da der zweite Summand aus Null verschieden ist, bezeichnen wir mit E_1 ein Idempotent für welches $\mathfrak{M}E'(1-E)=\mathfrak{M}E_1$. Man schliesst auf $E_1E=0$. Gesetzt $F=E_1-EE_1$, kommt sofort $FE=EF=0$, $FF=F$, $E_1F=E_1$, $FE_1=F$, $\mathfrak{M}E_1=\mathfrak{M}E_1F\subseteq\mathfrak{M}F$, $\mathfrak{M}F=\mathfrak{M}FE_1\subseteq\mathfrak{M}E_1$ heraus, also $\mathfrak{M}E_1=\mathfrak{M}F$.

Bemerkung: Im vorigen Satz erfordet der Beweis nur die Möglichkeit $\mathfrak{M}E'(1-E)$ unter der Form $\mathfrak{M}E_1$ schreiben zu können.

Korollar 4: *In einem regulären Modul $\mathfrak{M}$ hat man $(\mathfrak{M}E,\ \mathfrak{M}E')=\mathfrak{M}E''$.* Es genügt $E''=E+F$ zu nehmen, da $E+F$ Idempotent ist.

Korollar 5: *Ist ein regulärer Modul gegeben, dann, wenn $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}'$ die Am. von zwei Idempotenten E und E' sind, ist die Summe $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$ Am. eines Idempotentes.*

Satz 30′: *Sind in einem regulären Modul $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ die Am. von zwei Idempotenten E bzw. E', dann existiert ein Idempotent F, das folgende Beziehungen erfüllt: $FE= =EF=0$, $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}''$, wobei $\mathfrak{A}''$ der Am. von F ist.* Falls $\mathfrak{A}'\supseteq\mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{M}$, also genügt es $F=0$ zu nehmen. Wenn aber dies nicht der Fall ist, kann man man folgendes beweisen: $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'=\mathfrak{M}(1-E)\cap\mathfrak{M}(1-E')= =\mathfrak{M}(1-E)\cap\mathfrak{A}''$, wobei $\mathfrak{A}''$ der Am. von $(1-E)E'$ ist. Nämlich, wenn $x=m(1-E)=m'(1-E')$ ist, wobei $m,m'\in\mathfrak{M}$, hat man $x(1-E)=x$, $x(1-E)E'=xE'=0$. Umgekehrt, wenn $x=m(1-E)$ und $x(1-E)E'=0$ ist, hat man $x(1-E)=x$, $xE'=0$, also $x=m'(1-E')$. Nun nennen wir E_1 das Idempotent dessen Am. $\mathfrak{A}''=\mathfrak{M}(1-E_1)$

ist. Da wir $\mathfrak{M}E(1-E)E'=0$ haben, schliessen wir auf $\mathfrak{M}E \subseteq \mathfrak{N}''$. Dann leiten wir $EE_1=0$ ab aus den Beziehungen $\mathfrak{M}EE_1 \subseteq \mathfrak{N}''E_1=(0)$. Gesetzt $F=E_1-E_1E$, kommt sofort $FE=0$, $EF=0$, $E_1F=F$, $FE_1=E_1$ heraus, also ist $\mathfrak{N}''$ der Am. von F. Der Satz ist somit bewiesen.

Bemerkung: Im vorigen Satz erfordert der Beweis nur die Möglichkeit den Am. von $(1-E)E'$ als Am. eines Idempotentes betrachten zu können.

Korollar 4': *In einem regulären Modul ist der Durchschnitt* $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$ *der Am. von zwei Idempotenten* E *und* E' *Am. eines Idempotentes.*

Korollar 5': *Ist ein regulärer Modul gegeben, dann ist der Durchschnitt* $\mathfrak{M}E \cap \mathfrak{M}E'$ *Am. eines Idempotentes.*

7) **Moduln mit Vielfachenkettensatz** — In diesem Paragraphen werden, unter der Annahme $\mathfrak{M}$ ein Ω-Modul mit Vielfachenkettensatz für Ω-Untermoduln zu sein, mehrere eigentliche Betrachtungen entwickelt.

Bei [5, S. 9] findet man folgende zwei Sätze bewiesen:

Satz 31: *Wenn in* $\mathfrak{M}$ *der Vielfachenkettensatz gilt, so hat man die Gleichheit* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}A$, *für jeden Endomorphismus* A, *dessen Am.* $\mathfrak{Q}_A=(0)$ *ist.* Mit anderen Worten: aus $\mathfrak{Q}_A=(0)$ schliesst man auf $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}A \simeq \mathfrak{M}$.

Satz 32: *Wenn in* $\mathfrak{M}$ *der Vielfachenkettensatz gilt, so gibt es für jeden Endomorphismus* A *eine ganze Zahl* r *für welche die Gleichheit* $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}A^r, \mathfrak{Q}_{A^r})$ *erfüllt wird.*

Korollar 6: *Ist* $\mathfrak{N}$ *ein* Ω*-Untermodul von* $\mathfrak{M}$ *dessen Vi.* $\mathfrak{s}$ *nicht nilpotent ist und gilt in* $\mathfrak{M}$ *der Vielfachenkettensatz, dann ist der Exponent eines Elementes* $A \in \mathfrak{s}$ *höchstens gleich der ganzen Zahl* r *die dem* A *entspricht.*

Satz 33: *Gilt in* $\mathfrak{M}$ *der Vielfachenkettensatz, so ist* $\mathfrak{M}$ *direkte Summe einer endlichen Anzahl von unzerlegbaren* Ω*-Untermoduln.* Obwohl der Beweis sehr leicht ist, werden wir, zum Vergleich mit den entsprechenden Betrachtungen vom nächsten Paragraphen, ihn entwickeln. Zunächst einmal, ist $\mathfrak{M}$ unzerlegbar, so ist der Satz bewiesen. Danach falls $\mathfrak{M}$ zerlegbar ist setzen wir $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2$. Wenn $\mathfrak{N}_1$ nicht unzerlegbar ist, schreiben wir $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_1'+\mathfrak{N}_1''$, worauf wir $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_1'+\mathfrak{N}_1''+\mathfrak{N}_2$ schliessen. Nun kommt $\mathfrak{N}_1'$ in Betracht. Da die Kette $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_1' \supset \cdots$ endlich ist, muss man unbedingt einen Summanden $\mathfrak{P}_1$, von $\mathfrak{M}$, finden, der unzerlegbar ist. Indem wir $\mathfrak{M}=\mathfrak{P}_1+\mathfrak{L}$ schreiben, betrachtet man weiter den Untermodul $\mathfrak{L}$. Man gelangt zu $\mathfrak{L}=\mathfrak{P}_2+\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}=\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2+\mathfrak{L}_1$, wobei $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ unzerlegbar sind. Der Prozess geht über $\mathfrak{L}_1$ weiter. Er endet nötigerweise, da $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \cdots$ eine endliche Kette ist.

Korollar B: *In einem Modul* $\mathfrak{M}$ *mit Vielfachenkettensatz ist der Einsendomorphismus eine Summe einer endlichen Anzahl von primitiven Idempotenten.*

Satz 34: *Gilt in* $\mathfrak{M}$ *der Vielfachenkettensatz und wird* $\mathfrak{M}$ *durch seine minimalen* Ω*-Untermoduln erzeugt, dann ist* $\mathfrak{M}$ *vollständig reduzibel.* Es sei $\mathfrak{N}_1$ ein minimaler Untermodul $\neq 0$. Suchen wir die Summe $\mathfrak{M}_1$ aller minimalen zu $\mathfrak{N}_1$ isomorphen Untermoduln, die wir mit $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_1'$, usw. bezeichnen. Wenn $m_1 \in \mathfrak{M}_1$, dann gehört m_1 zu einer Summe Δ_1 einer endlichen Anzahl von solchen Untermoduln. Nehmen wir als möglich die Herausnahme der Menge der betreffenden Untermoduln einer abzählbaren Anzahl, die eine direkte Summe ist, an. Indem wir $\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_1'+\mathfrak{N}_1''+\cdots \supset \mathfrak{N}_1'+\mathfrak{N}_1'' \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_1''+\cdots \supset \cdots$ schreiben, stösst man auf einen Widerspruch gegen den Vielfachenkettensatz. Dies bedeutet, dass $\mathfrak{M}_1$ eine Summe einer endlichen Anzahl von Untermoduln zu $\mathfrak{N}_1$ isomorphe und der Form $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_1^{(1)} + \cdots + \mathfrak{N}_1^{(n_1)}$ ist. Dies angenommen, betrachten wir die minimalen nicht isomorphen Untermoduln $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$, usw. Wählen wir unter ihnen, falls möglich, eine abzählbare Anzahl $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \cdots$. Die Summe dieser letzten ist direkt, da $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ eine direkte Summe ist, und der Beweis durch vollständige Induktion kann man sofort benutzen. Hieraus schliesst man das Vorhandensein einer endlichen Anzahl von Klassen isomorpher Untermoduln. Diesen verschiedenen Klassen entsprechen Summen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_q$. Dann ist nötigerweise

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{q} \mathfrak{M}_i, \qquad \mathfrak{M}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \mathfrak{N}_i^{(j)},$$

wobei die Summen direkt und die $\mathfrak{N}_i^{(j)}$ einfach sind. Der Satz ist somit bewiesen.

Satz 35: *Ist in einem Modul $\mathfrak{M}$ mit Vielfachenkettensatz ein Untermodul $\mathfrak{N}$ gegeben, dann ist im allgemeinen (wie übrigens bei einem beliebigen Modul geschieht) $\mathfrak{M}\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{N}$. Es existiert jedoch eine minimale ganze Zahl k, für welche* $\mathfrak{M}\mathfrak{n}^k = \mathfrak{N}\mathfrak{n}^{k-1} (= \mathfrak{N}\mathfrak{n}^k = \cdots)$. Nämlich nehmen wir $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}\mathfrak{n} \supset \cdots \cdots \supset \mathfrak{N}\mathfrak{n}^{k-1} = \mathfrak{N}\mathfrak{n}^k = \cdots$ an. Da wir auch $\mathfrak{N}\mathfrak{n}^k \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{n}^k \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{n}^{k-1}$ haben, schliesst man auf $\mathfrak{M}\mathfrak{n}^k = \mathfrak{N}\mathfrak{n}^{k-1} = \mathfrak{M}\mathfrak{n}^{k+1} = \cdots$. Setzen wir $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}\mathfrak{n}^k$, so ist auch $\mathfrak{M}\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}'$. Wir haben noch $\mathfrak{m}'^2 \supseteq \mathfrak{n}^{2k}$ deshalb ist $\mathfrak{M}\mathfrak{m}'^2 \supseteq \mathfrak{M}\mathfrak{n}^{2k} = \mathfrak{M}\mathfrak{n}^k = \mathfrak{M}'$, also $\mathfrak{M}' = = \mathfrak{M}\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}\mathfrak{m}'^2 = \cdots$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}'\mathfrak{m}'^2 = \cdots$. Es gilt hiermit dieser

Zusatz: *Unter den Satzbedingungen, falls $\mathfrak{M}\mathfrak{n}^k = \mathfrak{M}'$ ist, so ist auch $\mathfrak{M}\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}'$, und, für eine beliebige ganze Zahl* $\rho > 0$, $\mathfrak{M}\mathfrak{m}'^{\rho} = \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'\mathfrak{m}'^{\rho}$.

Satz 36: *Unter den vorigen Satzbedingungen, indem wir $\mathfrak{M}\mathfrak{n}^k = \mathfrak{M}'$ noch setzen und $\mathfrak{M}' \supset (0)$ annehmen, gibt es*

ein Endomorphismus R für welchen die Beziehungen $(0) \subset \mathfrak{M}R = \mathfrak{M}'R \subseteq \mathfrak{M}'$ gelten. Der Untermodul $\mathfrak{M}R = \mathfrak{N}'$ ist minimal unter den in $\mathfrak{M}'$ enthaltenen Untermoduln, denen Ki. $\mathfrak{q}$ entsprechen, die folgende Beziehung $\mathfrak{n}^k\mathfrak{q} \supset (0)$ erfüllen. Betrachten wir nämlich unter den in $\mathfrak{M}'$ enthaltenen Moduln den minimalen Untermodul $\mathfrak{N}'$, unter folgenden Bedingungen: $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{n}^k\mathfrak{n}' \supset (0)$. $\mathfrak{N}'$ existiert, denn dem Modul $\mathfrak{M}'$ entspricht $\mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{n}^k$ und auch $\mathfrak{n}^k\mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{n}^{2k} \supset (0)$, da man $\mathfrak{M}\mathfrak{n}^k = \mathfrak{M}\mathfrak{n}^{2k}$ hat. Es sei dann $R \in \mathfrak{n}'$, sodass $\mathfrak{n}^kR \supset (0)$. Man schliesst auf $\mathfrak{T} = \mathfrak{M}\mathfrak{n}^kR \subseteq \mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{t} \supseteq \mathfrak{n}^kR \supset (0)$, $\mathfrak{n}^k\mathfrak{t} \supseteq \supseteq \mathfrak{n}^{2k}R \supset (0)$. Es wird mötigerweise die Gleichheit $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}'$ gelten, also wird $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}\mathfrak{n}^kR = \mathfrak{M}'R$ sein. Andererseits hat man $\mathfrak{M}R \subseteq \mathfrak{N}'$, sodann gelangt man zu der Gleichheit $\mathfrak{M}R = \mathfrak{M}'R$, worauf der Satzbeweis beendet wird.

Korollar 7: *Wenn der Untermodul $\mathfrak{N}$ des Satzes 35 Nilmodul ist, so hat man $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}'$ wobei $\mathfrak{N}'$ der minimale Untermodul des Satzes 36 ist.* In der Tat die Beziehung $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$ würde die Gleichheit $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}'$ oder $\mathfrak{M}'R = \mathfrak{M}'$ zur Folge haben. Dann müsste der Endomorphismus $R \in \mathfrak{n}$ potent sein, was nicht der Fall sein kann.

Falls der Nilmodul $\mathfrak{N}'$ wie $\mathfrak{N}$ behandelt wird, gelangt man entweder zu $\mathfrak{M}\mathfrak{n}'^r = \mathfrak{M}'' = (0)$ oder zu einer Kette $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}' \supset \mathfrak{N}''$. Die Minimalbedingung hat das Vorhandensein eines nilpotenten in $\mathfrak{N}$ enthaltenen Unternilmodul zur Folge. Selbstverständlich ist diese Tatsache auch eine Folge der sogenannten Minimalbedingung und des Umstandes, dass $\mathfrak{N}$ Nilmodul ist. Hierbei lässt man jedoch die Möglichkeit offen, dass der fragliche nilpotente Untermodul kein minimaler Untermodul ist. Es lautet also:

Satz 37: *Ist $\mathfrak{M}$ ein Modul mit Vielfachenkettensatz und $\mathfrak{N}$ ein Ω-Untermodul dessen Ki. Nilideal ist, dann gibt es ein Ω-Untermodul $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{N}$ dessen Ki. nilpotent ist.*

Satz 38: *Wenn $\mathfrak{L}$ ein nicht nilpotenter Untermodul von $\mathfrak{M}$ ist und in $\mathfrak{M}$ der Vielfachenkettensatz gilt, dann ist der minimale nicht nilpotente Untermodul $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}$ derartig, dass es ein Endomorphismus S gibt, der folgende Beziehungen erfüllt:* 1) $\mathfrak{L}_1 S = \mathfrak{M}S$; 2) *der Untermodul* $\mathfrak{M}S = \mathfrak{N}_1$ *ist minimaler unter den in* $\mathfrak{L}_1$ *enthaltenen Untermoduln* $\mathfrak{N}$, *denen Ki.* $\mathfrak{n}$ *entsprechen für welche* $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{n} \supset (0)$. Gehen wir von $\mathfrak{L}$ aus und nehmen $\mathfrak{L}_1$. Man hat selbstverständlich $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{l}_1^2 \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{l}_1 \subseteq \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}\mathfrak{l}_1^2 \subseteq \mathfrak{L}_1 \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{L}_1'$. Das Ideal $\mathfrak{l}_1'$ enthält $\mathfrak{l}_1^2$ und ist also kein nilpotentes Ideal. Das hat die Gleichheiten $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{l}_1$ zur Folge. Dies angenommen betrachten wir die Menge der Untermoduln $\mathfrak{N}$ unter folgenden Bedingungen: $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{n} \supset (0)$. In dieser nicht leeren Menge stellen wir mit $\mathfrak{N}_1$ den minimalen Untermodul dar. Dann ist $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{n}_1 \supset (0)$. Falls $S \in \mathfrak{n}_1$ derartig ist, dass $\mathfrak{l}_1 S \supset (0)$, hat man $(0) \subset \mathfrak{M}\mathfrak{l}_1 S = \mathfrak{L}_1 S \subseteq \mathfrak{L}_1$, $(\mathfrak{L}_1 S = \mathfrak{L}_1'')$, $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_1'' \supseteq \mathfrak{l}_1^2 S \supset (0)$, da $\mathfrak{M}\mathfrak{l}_1 S = \mathfrak{M}\mathfrak{l}_1^2 S \supset (0)$. Man schliesst auf die Gleichheit $\mathfrak{L}_1 S = \mathfrak{N}_1$. Nun ergeben die Beziehungen $\mathfrak{L}_1 S \subseteq \mathfrak{M}S \subseteq \mathfrak{N}_1$ die Beziehungen $\mathfrak{L}_1 S = \mathfrak{M}S \supset (0)$, und der Satz ist somit bewiesen.

Bemerkung: Die Gleichheit $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{l}_1$ erlaubt uns die Untermoduln $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}_1$, für welche $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{n} \supset (0)$, mit den Untermoduln $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}_1$, für welche $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{n} \supset (0)$, gleichzusetzen.

8) **Moduln mit Teilerkettensatz** — In diesem Paragraphen werden, unter der Annahme $\mathfrak{M}$ ist ein Ω-Modul mit Teilerkettensatz für Ω-Untermoduln, mehrere eigentliche Betrachtungen entwickelt.

Bei [5, S. 8 und 9] findet man folgende zwei Sätze bewiesen:

Satz 31': *Wenn in $\mathfrak{M}$ der Teilerkettensatz gilt, so hat man $\mathfrak{Q}_A = (0)$, für jeden Endomorphismus A der der Gleichheit $\mathfrak{M}A = \mathfrak{M}$ genügt.* Mit anderen Worten: aus $\mathfrak{M}A = \mathfrak{M}$ schliesst man auf $(0) = \mathfrak{Q}_A$, und deshalb auf $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}A$.

Satz 32': *Wenn in $\mathfrak{M}$ der Teilerkettensatz gilt, so gibt es für jeden Endomorphismus A eine ganze Zahl s für welche die Gleichheit $(0) = \mathfrak{Q}_{A^s} \cap \mathfrak{M}A^s$ erfüllt wird.*

Korollar 6': *Ist $\mathfrak{N}$ ein Nilmodul von $\mathfrak{M}$ und gilt in $\mathfrak{M}$ der Teilerkettensatz, dann ist der Exponent eines Elementes $A \in \mathfrak{n}$ höchstens gleich der ganzen Zahl s, die dem A entspricht.*

Satz 33': *Gilt in $\mathfrak{M}$ der Teilerkettensatz, so ist* (0) *Durchschnitt einer endlichen Anzahl untereinander verschiedenen und aus $\mathfrak{M}$ verschieden Ω-Untermoduln, die kein Durchschnitt von zwei verschiedenen und aus $\mathfrak{M}$ verschieden Ω-Untermoduln sind.*

Zunächst einmal, ist (0) kein Durchschnitt von zwei verschiedenen und aus $\mathfrak{M}$ verschieden Untermoduln, so ist mit $(0) = (0)$ der Satz bewiesen. Danach nehmen wir $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ an. Wenn $\mathfrak{N}_1 \supset (0)$ die Gestalt $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1' \cap \mathfrak{N}_1''$ annimmt, schliessen wir auf $(0) = \mathfrak{N}_1' \cap \mathfrak{N}_1'' \cap \mathfrak{N}_2$. Nun kommt $\mathfrak{N}_1' \supset \mathfrak{N}_1$ in Betracht. Da die Kette $(0) \subset \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_1' \subset \cdots$ endlich ist, muss man unbedingt ein $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}_1$ finden, das kein Durchschnitt von zwei verschiedenen und aus $\mathfrak{M}$ verschieden Ω-Untermoduln ist. Indem wir $(0) = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{L}$ schreiben, betrachtet man weiter den Untermodul $\mathfrak{L}$. Man gelangt zu $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{L}_1$, $(0) = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{L}_1$, wobei $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Satzbedingungen erfüllen. Der Prozess geht über $\mathfrak{L}_1$ weiter. Er endet nötigerwelse, da $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \subset \cdots$ eine endliche Kette ist.

Satz 34': *Gilt in $\mathfrak{M}$ der Teilerkettensatz und ist $(0) = \Pi\, \mathfrak{N}_\alpha'$, wobei die $\mathfrak{N}_\alpha'$ maximale Untermoduln sind, dann ist noch $(0) = \Pi\, \mathfrak{N}_\alpha$, wobei die $\mathfrak{N}_\alpha$ maximal sind und eine endliche Menge bilden.* Den Beweis führt man wie folgt.

Schliesst in $\Pi\,\mathfrak{U}'_\alpha$ diejenigen Untermoduln $\mathfrak{U}'_\beta$, die keinen Einfluss auf den Durchschnitt haben, aus. Im so gewonnen Durchschnitt $\Pi\,\mathfrak{U}_\alpha = (0)$, nehmen wir noch an, die $\mathfrak{U}_\alpha$ bilden eine unendliche Menge. Es wird $(0) = \Pi\,\mathfrak{U}_\alpha \subset \prod_{\alpha \neq \beta_1} \mathfrak{U}_\alpha$, wenn man $\mathfrak{U}_{\beta_1}$ aufhebt. Danach wird man auch $\prod_{\alpha\neq\beta_1} \mathfrak{U}_\alpha \subset \prod_{\alpha\neq\beta_1,\beta_2} \mathfrak{U}_\alpha$ erhalten, weil die Gültigkeit des Zeichens $=$ zwischen beiden Durchschnitten die Beziehungen $(0) = \mathfrak{U}_{\beta_1} \cdot \prod_{\alpha\neq\beta_1} \mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}_{\beta_1} \cdot \prod_{\alpha\neq\beta_1,\beta_2} \mathfrak{U}_\alpha$ zur Folge haben würde, was einen Widerspruch gegen die Annahme über die $\mathfrak{U}_\alpha$ darstellt. Der Prozess geht unendlich gegen den Teilerkettensatz weiter. Die $\mathfrak{U}_\alpha$ bilden also eine endliche Menge.

Satz 35': *Ist in einem Modul mit Teilerkettensatz ein Untermodul $\mathfrak{U}$ gegeben, dessen Vi. $\mathfrak{s}$ ist, dann erfüllt der Am. $\mathfrak{U}_1$, von $\mathfrak{s}$, die Bedingung $\mathfrak{U}_1 \supseteq \mathfrak{U}$ (wie übrigens bei einem beliebigen Modul geschieht). Es existiert jedoch eine minimale ganze Zahl k, für welche die Am. $\mathfrak{U}_{k-1}$, $\mathfrak{U}_k$, von $\mathfrak{s}^{k-1}$ bzw. $\mathfrak{s}^k$, gleich sind.* Den Beweis braucht man nicht beizubringen. Ausserdem können wir noch andere Schlüsse ziehen. Falls $\mathfrak{s}'$ das Vi. von $\mathfrak{U}_{k-1} = \mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_{k+1} = \cdots$ ist, dann sind $\mathfrak{U}_{k-1} = \mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{s}'$ ausser umgekehrten Anihilatoren derartig, dass der Am. von $\mathfrak{s}'^m$, für jede ganze Zahl $m > 0$, noch $\mathfrak{U}_{k-1}$ ist. Es gilt also folgender

Zusatz: *Unter den Satzbedingungen, falls $\mathfrak{U}_{k-1}$ und $\mathfrak{s}'$ umgekehrte Annihilatoren sind, ist auch $\mathfrak{U}_{k-1}$ der Am. von $\mathfrak{s}'^m$, für beliebige ganze Zahl $m > 0$.*

Satz 36': *Unter den vorigen Satzbedingungen, indem wir noch $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}'$ setzen und $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{M}$ annehmen, gibt es einen Endomorphismus R dessen Am. $\mathfrak{U}''$ folgende Beziehungen $\mathfrak{U}_k \subseteq \mathfrak{U}'' \subset \mathfrak{M}$ erfüllt und gleich dem Am. von $R\mathfrak{s}^k$ ist. $\mathfrak{U}''$ ist maximal unter den $\mathfrak{U}_k$ enthaltenden Untermoduln, deren Vi. $\mathfrak{s}''$ der folgenden Bedingung genügen: $\mathfrak{s}''\mathfrak{s}^k \supset (0)$.*

Betrachten wir nämlich unter den $\mathfrak{U}_k$ enthaltenden Unterduln den maximalen Untermodul $\mathfrak{U}''$, unter folgenden Bedingungen: $\mathfrak{U}'' \supseteq \mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{s}''\mathfrak{s}^k \supset (0)$, wobei $\mathfrak{s}''$ das Vi. von $\mathfrak{U}''$ ist. $\mathfrak{U}''$ existiert, denn dem Modul $\mathfrak{U}'$ entspricht $\mathfrak{s}' \supseteq \mathfrak{s}^k$ und $\mathfrak{s}'\mathfrak{s}^k \supseteq \mathfrak{s}^{2k} \supset (0)$, da der Am. von $\mathfrak{s}^{2k}$ gleich $\mathfrak{U}_k \subset \mathfrak{M}$ ist. Es sei dann $R \in \mathfrak{s}''$, sodass $R\mathfrak{s}^k \supset (0)$. Man sieht, dass der Am. $\mathfrak{T}$, von $R\mathfrak{s}^k$, die Beziehungen $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{U}'' \supseteq \mathfrak{U}_k$ und sein Vi. $\mathfrak{r}$ die Beziehungen $\mathfrak{r} \supseteq R\mathfrak{s}^k \supset (0)$, $\mathfrak{r}\mathfrak{s}^k \supseteq R\mathfrak{s}^{2k} \supset (0)$ erfüllen, da $R\mathfrak{s}^{2k} = (0)$ hiermit $\mathfrak{M}R\mathfrak{s}^{2k} = (0)$, $\mathfrak{M}R \subseteq \mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{M}R\mathfrak{s}^k = (0)$, $R\mathfrak{s}^k = (0)$ ergeben würde. Es muss also die Gleichheit $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}''$ gelten, mithin wird $\mathfrak{U}''$ der Am. von $R\mathfrak{s}^k$ sein. Andererseits ist der Am. von R gleich $\mathfrak{U}''' \supseteq \mathfrak{U}''$, worauf man auf $\mathfrak{U}'' = \mathfrak{U}'''$ schliesst.

Korollar 7': *Wenn der Untermodul $\mathfrak{U}$ des Satzes 35' ein Nilvernichtungsideal $\mathfrak{s} \neq (0)$ besitzt, so hat man, unter den Bedingungen vom Satze 36', $\mathfrak{U}'' \supset \mathfrak{U}$.* In der Tat würde die Beziehung $\mathfrak{U}'' = \mathfrak{U}$ die Gleichheit $\mathfrak{U}'' = \mathfrak{U}_k$ zur Folge haben. Also wäre $\mathfrak{U}_k$ der Am. von R und $R\mathfrak{s}^k$. Indem wir $\mathfrak{p}$ durch die Beziehung $\mathfrak{p}R^2 = (0)$ definieren, werden wir $\mathfrak{p}R \subseteq \mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{p}R\mathfrak{s}^k = (0)$ erhalten, was $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{U}_k$ und auch $\mathfrak{p} = \mathfrak{U}_k$ ergibt. $\mathfrak{U}_k$ wäre also Am. jeder beliebigen Potenz von $R \in \mathfrak{s}'' \subseteq \mathfrak{s}$, was nicht der Fall sein kann.

Falls der Modul $\mathfrak{U}'' \neq \mathfrak{M}$ wie $\mathfrak{U}$ behandelt wird, gelangt man zu $\mathfrak{U}''_r \supseteq \mathfrak{U}''$, danach, aus $\mathfrak{U}''_r = \mathfrak{U}'''$, zu $\mathfrak{U}^{(IV)} \subset \mathfrak{M}$, wenn $\mathfrak{U}''' \subset \mathfrak{M}$. Der Prozess geht weiter, bis man auf $\mathfrak{U}^{(2t)} = \mathfrak{M}$ stösst. Jetzt wissen wir Folgendes: indem wir von $\mathfrak{U}^{(2t-2)}$ ausgehen, gewinnen wir $\mathfrak{U}_s^{(2t-2)} = \mathfrak{U}^{(2t-1)} = \mathfrak{M}$. Dann hat man $\mathfrak{r}^{s-1} = (0)$, wenn $\mathfrak{r}$ das Vi. von $\mathfrak{U}^{(2t-2)}$ ist. Also:

Satz 37': *Ist $\mathfrak{M}$ ein Modul mit Teilerkettensatz und $\mathfrak{U}$ ein Ω-Untermodul, dessen Vi. Nilideal ist, dann gibt es ein Ω-Untermodul $\mathfrak{Q} \supseteq \mathfrak{U}$, dessen Vi. nilpotent ist.* Selbstverständlich ist diese Tatsache auch eine Folge der Maximalbedingung und des Umstandes, dass das Vi. $\mathfrak{s}$ Nilideal ist. Hierbei lässt man jedoch die Möglichkeit offen, dass der fragliche Untermodul kein maximaler Untermodul ist.

Satz 38′: *Wenn $\mathfrak{L}$ ein Untermodul ist, dessen Vi. $\mathfrak{s}$ nicht nilpotent ist, und in $\mathfrak{M}$ der Teilerkettensatz gilt, dann ist der maximale Untermodul $\mathfrak{L}_1 \supseteq \mathfrak{L}$, dessen Vi. $\mathfrak{s}_1 \subseteq \mathfrak{s}$ nicht nilpotent ist derartig, dass es ein Endomorphismus $S \in \mathfrak{s}_1$ gibt, der folgende Beziehungen erfüllt:* 1) *der Am. $\mathfrak{U}_1$ von S ist auch Am. von $S\mathfrak{s}_1$;* 2) *$\mathfrak{U}_1$ ist maximal unter den $\mathfrak{L}_1$ enthaltenden Untermoduln $\mathfrak{U}$, denen Vi. $\mathfrak{r}$ entsprechen, für welche $\mathfrak{r}\mathfrak{s}_1 \supset (0)$.* Gehen wir von $\mathfrak{L}$ aus und nehmen $\mathfrak{L}_1$. Dann sind $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{s}_1$ umgekehrte Annihilatoren. Die Am. von $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_1^2$ sind sogar gleich. Dies angenommen, betrachten wir die Menge der Untermoduln $\mathfrak{U}$ unter folgenden Bedingungen: $\mathfrak{U} \supseteq \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{r}\mathfrak{s}_1 \supset (0)$, wobei $\mathfrak{r}$ das Vi. von $\mathfrak{U}$ ist. In dieser nicht leeren Menge stellen wir mit $\mathfrak{U}_1$ den maximalen Untermodul dar. Falls für $S \in \mathfrak{r}_1$, die Beziehung $S\mathfrak{s}_1 \neq (0)$ gilt, dann genügt der Am. $\mathfrak{L}_1''$, von S, den folgenden Bedingungen: $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{L}_1'' \supseteq \mathfrak{U}_1$; für seinen Vi. $\mathfrak{r}_1''$ ist $\mathfrak{r}_1''\mathfrak{s}_1 \neq (0)$. Also ist $\mathfrak{L}_1'' = \mathfrak{U}_1$, mit $\mathfrak{L}_1'' S\mathfrak{s}_1 = (0)$. Andererseits, indem wir $\mathfrak{Q}$ durch die Beziehung $\mathfrak{Q}S\mathfrak{s}_1 = (0)$ definieren, ist es $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{Q} \supseteq \mathfrak{L}_1''$, $S\mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{s}_1 = S\mathfrak{s}_1^2 \supset (0)$, da $\mathfrak{M}S\mathfrak{s}_1^2 = (0)$ hiermit $\mathfrak{M}S \subseteq \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}S\mathfrak{s}_1 = (0)$, $S\mathfrak{s}_1 = (0)$ ergeben würde. Da wir noch $\mathfrak{Q} = \mathfrak{L}_1''$ haben, ist der Satz vollständig bewiesen.

9) **Moduln mit Doppelkettensatz** — Wenn Minimal-und Maximalbedingung in $\mathfrak{M}$ gelten, so sagt man: es gilt die Doppelkettensatzbedingung.

Bei [5, S. 9] findet man folgende Aeusserungen bewiesen:

Satz 39 (und 39′): *In einem Modul mit Doppelkettensatz, hat man $r = s$, für jeden Endomorphismus der die Bedingungen $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}A \supset \cdots \supset \mathfrak{M}A^r = \mathfrak{M}A^{r+1} = \cdots$, $\mathfrak{Q}_A \subset \mathfrak{Q}_{A^2} \subset \cdots \subset \mathfrak{Q}_{A^s} = \mathfrak{Q}_{A^{s+1}} = \cdots$ erfüllt.*

Korollare 8 und 8′: *In einem Modul $\mathfrak{M}$ mit Doppelkettensatz, hat man $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}A^r, \mathfrak{Q}_{A^r})$, $\mathfrak{M}A^r \cap \mathfrak{Q}_{A^r} = (0)$, wobei $r = s$ die Zahl des Satzes ist. Für jedes $x \in \mathfrak{Q}_{A^r}$ ist $xA^r = 0$, und so bestimmt A einen nilpotenten Endomorphismus in $\mathfrak{Q}_{A^r}$; und indem $\mathfrak{M}A^r = \mathfrak{M}A^{r+1}$ ist, dann bestimmt A einen Automorphismus in $\mathfrak{M}A^r$.*

Korollar 9: *Für jeden Endomorphismus A einer unzerlegbaren Gruppe $\mathfrak{M}$ mit Doppelkettensatz, haben wir entweder $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}A^r = \mathfrak{M}A$, mit $\mathfrak{Q}_A = (0)$, und A ist ein Automorphismus, oder $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_{A^r}$, mit $\mathfrak{M}A^r = (0)$, und A ist ein nilpotenter Endomorphismus.*

Korollar 9′: *Wenn in $\mathfrak{M}$ der Doppelkettensatz gilt und (0) kein Durchschnitt von zwei aus Null verschiedenen Untermoduln ist, entweder $\mathfrak{Q}_{A^r} = \mathfrak{Q}_A = (0)$, und A ist ein Automorphismus, oder $\mathfrak{M}A^r = (0)$, und A ist nilpotenter Endomorphismus.* Zweifellos $\mathfrak{M}$ ist dann unzerlegbar und der Korollar ist gültig (wie 9). Wir können aber 9′ beweisen, in em wir nur die Beziehung $\mathfrak{M}A^r \cap \mathfrak{Q}_{A^r} = (0)$, in 8′ angegeben, benutzen.

Korollare 10 und 10′: *Nehmen wir die Fälle 9 oder 9′ an, dann, wenn A ein Automorphismus ist, falls $A - A^2 \neq 0$, ist auch $A - A^2$ ein Automorphismus.* In der Tat wissen wir, dass $A - A^2$ nicht nilpotent sein kann, weil sonst ein Idempotent bestünde, das ein Polynom in A wäre.

Bei [1, § 6] findet man folgenden Satz:

Satz 40: *Wenn in einem Modul $\mathfrak{M}$ mit Doppelkettensatz ein Untermodul $\mathfrak{U}$ der Länge $\leqq c$ gegeben wird, und $A_1, \cdots, A_c$ solche Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ sind für welche $\mathfrak{U}A_1 \cdots A_c \supset (0)$ und $\mathfrak{U}A_i \subseteq \mathfrak{U}$, dann gibt es einen Untermodul $\mathfrak{U}_1$, der fol-*

gende Beziehungen bewahrheitet: $(0)\subset\mathfrak{A}_1\subseteqq\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{A}_1 A_1, \cdots, \mathfrak{A}_1 A_c)$, [Man vergleiche den mit [6] bezeichnet Artikel von Levitzki]. Setzen wir $\mathfrak{A}\geqq\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}A_1, \cdots, \mathfrak{A}A_c)$. Der Untermodul $\mathfrak{A}'$ ist $\neq (0)$, da $\mathfrak{A}'\geqq\mathfrak{A}A_1\supset(0)$ ist. Danach setzen wir $\mathfrak{A}\geqq\mathfrak{A}'\geqq\mathfrak{A}'' = (\mathfrak{A}'A_1, \cdots, \mathfrak{A}'A_c)$, mit $\mathfrak{A}'A_i\subseteqq\mathfrak{A}A_i$. Der Untermodul $\mathfrak{A}''$ ist $\neq (0)$, weil $\mathfrak{A}''\geqq\mathfrak{A}'A_2\geqq\mathfrak{A}A_1A_2\supset(0)$. Wir können fortfahren und die Normalreihe $\}\mathfrak{A}\geqq\mathfrak{A}'\geqq\mathfrak{A}''\geqq\cdots \cdots\geqq\mathfrak{A}^{(c)}\supset(0)\{$, mit $\mathfrak{A}^{(c)}\geqq\mathfrak{A}A_1\cdots A_c\supset(0)$, bilden. Da die Länge dieser Normalreihe $c+1$ und die Länge von $\mathfrak{A}$ höchstens $= c$ ist, werden sich Wiederholungen ergeben. Indem wir $\mathfrak{A}^{(i+1)} = (\mathfrak{A}^{(i)}A_1, \cdots, \mathfrak{A}^{(i)}A_c) = \mathfrak{A}^{(i)}$ setzen, ist der Satz hiermit bewiesen.

Satz 40′: *Ist ein Untermodul $\mathfrak{A}$ eines Moduls mit Doppelkettensatz gegeben, wenn $\mathfrak{s}$ das Vi. von $\mathfrak{A}$ ist und $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ eine Länge $\leqq c$ hat, dann, falls $A_1, \cdots, A_c$ Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ sind, für welche $A_1\cdots A_c\mathfrak{s}\supset(0)$ und $A_i\mathfrak{s}\subseteqq\mathfrak{s}$, gibt es einen Untermodul $\mathfrak{A}_1$ mit Vi. $\mathfrak{s}_1$, für den folgende Beziehungen bestehen:* 1) $\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{M}$; 2) $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{Q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{Q}_c$, *wobei $\mathfrak{Q}_j$ den Am. von $A_j\mathfrak{s}_1$ bedeutet.* Setzen wir $\mathfrak{s}\geqq\mathfrak{s}' = (A_1\mathfrak{s}, \cdots, A_c\mathfrak{s})\supset(0)$ und bezeichnen mit $\mathfrak{A}'$ den Am. von $\mathfrak{s}'$. Es wird $\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{A}'\subset\mathfrak{M}$ sein. Danach setzen wir $\mathfrak{s}\geqq\mathfrak{s}'\geqq\mathfrak{s}'' = (A_1\mathfrak{s}', \cdots, A_c\mathfrak{s}')\geqq A_{c-1}A_c\mathfrak{s}\supset(0)$ und bezeichnen mit $\mathfrak{A}''$ den Am. von $\mathfrak{s}''$. Man hat $\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{A}'\subseteqq\mathfrak{A}''\subset\mathfrak{M}$. Wir können fortfahren und die Normalreihe $\}\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{A}'\subseteqq\mathfrak{A}''\subseteqq\cdots \cdots\subseteqq\mathfrak{A}^{(c)}\subset\mathfrak{M}\{$ der Länge $c+1$ bilden, von der man eine Normalreihe derselben Länge und der Form $\}\mathfrak{M}/\mathfrak{A}\supset \supset\mathfrak{A}^{(c)}/\mathfrak{A}\geqq\cdots\geqq\mathfrak{A}/\mathfrak{A} = (0)\{$ ableitet, was nicht ohne Wiederholungen geschehen kann. Angenommen $\mathfrak{A}^{(i+1)} = \mathfrak{A}^{(i)}$, so ist dieser Untermodul den Am. von $\mathfrak{s}^{(i)}$ und von $\mathfrak{s}^{(i+1)} = (A_1\mathfrak{s}^{(i)}, \cdots, A_c\mathfrak{s}^{(i)})$. Satz 2′ ergibt nun $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{Q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{Q}_c$, wobei $\mathfrak{Q}_j$ der Am. von $A_j\mathfrak{s}^{(i)}$ ist, was den Satz beweist, indem man $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{s}^{(i)} = \mathfrak{s}_1$ setzt.

Satz 41: *Ist ein Untermodul $\mathfrak{A}\supset(0)$ der Länge $\overline{\gtrless} c$ in einem Modul $\mathfrak{M}$ mit Doppelkettensatz gegeben, und sind $A_1, \cdots, A_c$ Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ für welche $A_1\cdots A_c\neq 0$ und $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}A_1, \cdots, \mathfrak{A}A_c)$, dann gibt es einen nicht nilpotenten Endomorphismus von $\mathfrak{M}$, der ein Produkt von Potenzen der A_i ist,* [6]. Unterscheiden wir, unter den $\mathfrak{A}A_i$, diejenigen die wir ausschliessen können, ohne die Summe zu ändern. Zum Beispiele wird es $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}B_1, \cdots, \mathfrak{A}B_d)$ sein, wobei $d\overline{\gtrless} c$ und die B_j gewisse A_i sind. Wenn $d = 1$ wäre, dann aus der Beziehung $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}B_1$ würde man auf $\mathfrak{A}B_1^m = \mathfrak{A}\supset(0)$ schliessen, und B_1 würde den Satz beantworten. Falls $d>1$, bemerken wir folgende Beziehungen: $(0)\subset\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}B_d = (\mathfrak{A}B_1B_d, \cdots, \mathfrak{A}B_dB_d)\supset(0)$. Indem wir $B_d = B_{m_1}$ schreiben, bezeichnen wir mit B_{m_2} das Element B_j für welches $(0)\subset\mathfrak{A}B_{m_2}B_{m_1} = (\mathfrak{A}B_1B_{m_2}B_{m_1}, \cdots, \mathfrak{A}B_dB_{m_2}B_{m_1})$. Es existiert eine derartige Endomorphismenfolge B_{m_1}, $B_{m_2}, \cdots$, dass $\mathfrak{A}B_{m_c}\cdots B_{m_1}\supset(0)$, wobei c die im Satze angegebene Zahl ist. Jetzt beweisen wir das Vorhandensein eines Untermoduls $\mathfrak{A}'$ und auch von Endomorphismen $A_1', \cdots, A_c'$ (diese aus Produkten der A_i gebildet), die den folgenden Bedingungen genügen: $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}'\supset(0)$, $A_1'\cdots A_c'\neq 0$, $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}'A_1', \cdots, \mathfrak{A}'A_c')$. Wir werden zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall nehmen wir an, dass es ein Produkt von c der B_{m_k}, die sich in $B_{m_c}, \cdots, B_{m_1}$ einanderfolgen, gibt, das $B_{m_1} = B_d$ nicht enthält. Im zweiten machen wir die entgegengesetzte Annahme. Wenn der erste gilt, sei es $A_1', \cdots, A_c'$ das fragliche Produkt. Man hat $\mathfrak{A}A_1'\cdots \cdots A_c'\supset(0)$, $\mathfrak{A}A_i'\subseteqq\mathfrak{A}$, und nach dem Satze 40 auch $(0)\subset\mathfrak{A}'\subseteqq\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}'A_1', \cdots, \mathfrak{A}'A_c')$. Da $A_1', \cdots, A_c'$ der Endomorphismus B_d nich enthält, wird $(\mathfrak{A}A_1', \cdots, \mathfrak{A}A_c')\subset\mathfrak{A}$ sein, und deshalb $\mathfrak{A}'\subset\mathfrak{A}$. Nun wenn wir aus $\mathfrak{A}'$ und den A_i' ausgehend den fraglichen nicht nilpotenten Endomorphismus bilden können, bleibt der Satz bewiesen. Andernfalls geht der Prozess weiter. Gesetzt, wie im zweiten Fall, dass c einanderfolgende Faktoren des Produkts $P = B_{m_c}\cdots B_{m_1}$ den Endomorphismus $B_{m_1} = B_d$ enthalten, dürfen wir zB. $P = P_lB_{m_1}\cdot P_{l-1}B_{m_1}\cdots P_1B_{m_1}$ schreiben, wobei $P_1, P_2, \cdots$ Produkte der A_i sind, die dieselbe Stelle wie im P haben, und ausserden weniger als c Faktoren A_i enthalten.. Die Zerlegung von P enthält sodann mindestens c Faktoren in solcher Weise, dass es ein Teil von P, $P' = A'_{i_1} \cdots A'_{i_c}$, $(A'_{i_j} = P_{i_j} B_{m_j})$, existiert, wobei die A_i einander in P folgen. Wie im ersten Fall, hat man nun $\mathfrak{N}P' \supset (0)$, $\mathfrak{N}A_{i_j} \subseteq \mathfrak{N}$, also, nach dem Satze 40, es existiert $\mathfrak{N}'$, der folgenden Bedingungen genügt: $(0) \subset \mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}' = (\mathfrak{N}' A'_1, \cdots, \mathfrak{N}' A'_c)$. Es folgt $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ wie wir aus $\mathfrak{N}A_{i_j} = \mathfrak{N}P_{i_j} B_{m_j} \subseteq \mathfrak{N}B_{m_j}$ ziehen. Bis jetzt besteht folgender Zusammenhang: falls $d > 1$, gibt es immer einen Untermodul $\mathfrak{N}'$ der folgenden Bedingenügt: $(0) \subset \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$; $\mathfrak{N}' = (\mathfrak{N}' A'_1, \cdots, \mathfrak{N}' A'_c)$, $A'_1 \cdots A'_c \neq 0$, wobei die A'_i Produkte der A_j sind. Gehen wir von $\mathfrak{N}'$ aus, dann können wir unsere Betrachtungen widerhollen. Mann gewinnt eine Folge von Untermoduln $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}' \supset \mathfrak{N}'' \supset \cdots$, die man bis $\mathfrak{N}^{(t-1)} \supset \mathfrak{N}^{(t)} \supset (0)$, $\mathfrak{N}^{(t)} B = \mathfrak{N}^{(t)}$, wobei B ein Produkt der A_j ist, fortsetzt. Die Minimalbedingung macht nämlich jener Folge ein End. Die letzte geschriebene Gleichheit ergibt den Satz. B ist der gewünschte Endomorphismus.

Korollar 11: *Wenn $\mathfrak{C}$ eine Menge von nilpotenten Endomorphismen eines Moduls mit Doppelkettensatz ist und das Produkt von zwei Elementen von $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{C}$ gehört, dann, unter der Annahme $\mathfrak{M}$ eine Länge $= n$ hat, ist gleich Null das Produkt von n Elementen von $\mathfrak{C}$.* Es sei $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{C}$ und $A_1 \cdots A_n \neq 0$. Der Modul $\mathfrak{M}$ erfüllt folgende Beziehungen: $\mathfrak{M}A_1 \cdots A_n \neq (0)$, $\mathfrak{M}A_i \subseteq \mathfrak{M}$. Es existiert, wie der Satz 40 behauptet ein Untermodul $\mathfrak{N}_1$ derartig, dass $(0) \subset \subset \mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1 = (\mathfrak{N}_1 A_1, \cdots, \mathfrak{N}_1 A_n)$ ist. Danach der Satz 41 behauptet das Vorhandensein eines nicht nilpotenten Endomorphismus von $\mathfrak{M}$, der ein Produkt der A_i ist. Man stösst auf einen Widerspruch, da jenes Produkt zu $\mathfrak{C}$ gehört. Man muss $A_1 \cdots A_n = 0$ haben.

Korollar 12: *In einem Modul dessen Länge n ist, dann und nur dann kann $\mathfrak{N}$ Niluntermodul sein, wenn $\mathfrak{n}^n = (0)$.*

Korollar 13: *Wenn in $\mathfrak{M}$ der Doppelkettensatz gilt, dann ist nilpotent der übliche Radikal seines Endomorphismenringes. Der Exponent ist höchstens gleich der Modullänge.*

Sätze D und D: *Ist $\mathfrak{M}$ unzerlegbar und gilt in $\mathfrak{M}$ der Doppelkettensatz, dann ist der Radikal seines Endomorphismenringes die Menge aller nilpotenten Endomorphismen,* [1, § 6]. Zunächsteinmal ist nilpotent jedes Element des Radikals. Danach, wenn A nilpotent ist, nehmen wir $A^{n-1} \neq 0$, $A^n = 0$ an, und betrachten das Rechtsideal durch A erzeugt, welches die Form $A\Omega$ hat. Wir wollen beweisen, dass dieses Ideal nilpotent ist. Seine Elemente sind nilpotent, weil AS, $(S \in \Omega)$ ein Automorphismus H wäre, falls nicht nilpotent ist. Aus $AS = H$ würde man sodann $A^n S = A^{n-1} H = 0$ ableiten, was einen Widerspruch darstellt. Da $A\Omega$ Nilideal ist, schliesst man, wegen Korollars 11, auf seiner Nilpotenz. Die Behauptung ist hiermit bewiesen.

Satz 41': *Ist ein Untermodul $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ eines Moduls mit Doppelkettensatz gegeben, hat $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ eine Länge $\leqq c$, ist $\mathfrak{s}$ das Vi. von $\mathfrak{N}$, sind $A_1, \cdots, A_c$ Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ für welche $A_1 \cdots A_c \neq 0$ gilt und ist $\mathfrak{N}$ der Durchschnitt der Am. $\mathfrak{Q}_i$ der $A_i\mathfrak{s}$, dann gibt es einen nicht nilpotenten Endomorphismus von $\mathfrak{M}$, der ein Produkt von Potenzen der A_i ist.* Unterscheiden wir, unter den $\mathfrak{Q}_j$, diejenigen die wir ausschliessen können, ohne den Durchschnitt zu ändern. Zum Beispiele wird es $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}_{b_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_{b_d}$ sein, wobei $d \leqq c$, die $\mathfrak{Q}_{b_j}$ die Am. der Ideale $B_j\mathfrak{s}$ und die B_j gewisse A_i sind. Wenn $d = 1$ wäre, dann aus der Beziehung $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}_{b_1}$ würde man auf das Folgende schliessen: $\mathfrak{N}$ wäre Am. von $B_1\mathfrak{s}$, auch $B_1\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ und $B_1^m\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$. Der Am. von $\mathfrak{s}$ würde noch $\mathfrak{N}$ sein und $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{s}$ wären umgekehrte Annihilatoren. Schliesslich würde $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ Am. von $B_1^m\mathfrak{s}$ sein für beliebige ganze Zahl m, und B_1 würde den Satz beantworten.

Falls $d>1$, wollen wir auf die Beziehungen $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{N}\subset\mathfrak{Q}_{b_d}=$ $=\mathfrak{Q}_{b_d b_1}\cap\cdots\cap\mathfrak{Q}_{b_d b_d}$, wobei $\mathfrak{Q}_{b_d b_i}$ Am. von $B_d B_i\mathfrak{s}$ ist, schliessen. Nämlich ist $(B_1\mathfrak{s},\cdots,B_d\mathfrak{s})\subseteqq\mathfrak{s}$, da $\mathfrak{N}B_i\mathfrak{s}=(0)$. Mithin hat man $(B_d B_1\mathfrak{s},\cdots,B_d B_d\mathfrak{s})\subseteqq B_d\mathfrak{s}$. Nun ist $x\in\mathfrak{M}$ ein Element vom ersten Glied annuliert, dann wird $xB_dB_i\mathfrak{s}=(0)$, $xB_d\in\mathfrak{Q}_{b_i}$, $(i=1,\cdots,d)$, $xB_d\in\mathfrak{N}$, $xB_d\mathfrak{s}=(0)$ sein, und, wie oben behauptet, wird $\mathfrak{Q}_{b_d}$ genau der Am. erstes Gliedes sein. Wir müssen die Ungleichheit $\mathfrak{Q}_{b_d}=\mathfrak{Q}_{b_{m_1}}\subset\mathfrak{M}$ nicht vergessen. Es sei dann B_{m_2} solches B_j, dass $\mathfrak{Q}_{b_{m_1}b_{m_2}}\subset\mathfrak{M}$. Wenn wir die Beziehung $(B_{m_1}B_{m_2}B_1\mathfrak{s},\cdots,B_{m_1}B_{m_2}B_d\mathfrak{s})\subseteqq$ $\subseteqq B_{m_1}B_{m_2}\mathfrak{s}$ ins Auge fassen, sehen wir, wie früher, dass für jedes $x\in\mathfrak{M}$ vom ersten Glied annuliert und für jedes i die Gleichung $xB_{m_1}B_{m_2}B_i\mathfrak{s}=(0)$ gilt, was hiermit $xB_{m_1}B_{m_2}\in\mathfrak{N}$, $xB_{m_1}B_{m_2}\mathfrak{s}=(0)$, und auch $x\in\mathfrak{Q}_{b_{m_1}b_{m_2}}$, ergibt. Die Am. beider Gliede sind gleich. Es existiert eine derartige Endomorphismenmenge $B_{m_1}, B_{m_2},\cdots$ dass $\mathfrak{Q}_{b_{m_1}b_{m_2}\cdots b_{m_{c^2}}}\subset\mathfrak{M}$, wobei c die im Satze angegebene Zahl ist. Jetzt beweisen wir das Vorhandensein eines Untermoduls $\mathfrak{N}'$ und auch von Endomorphismen $A'_1,\cdots,A'_c$ (diese aus Produkten der A_i gebildet), die den folgenden Bedingungen genügen: 1) $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{N}'\subset\mathfrak{M}$; 2) $A'_1\cdots A'_c\neq 0$; 3) $\mathfrak{N}'=\mathfrak{Q}_{a'_1}\cap\cdots\cap\mathfrak{Q}_{a'_c}$, wobei $\mathfrak{Q}_{a'_j}$ Am. von $A'_j\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}'$ Vi. von $\mathfrak{N}'$ ist. Wir werden zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall nehmen wir an, dass es ein Produkt von c der B_{m_k}, die sich in $B_{m_{c^1}},\cdots,B_{m_{c^2}}$ einanderfolgen, gibt, das $B_{m_1}=B_d$ nicht enthält. Im zweiten machen wir die entgegengesetzte Annahme. Wenn der erste gilt, sei es $A'_1\cdots A'_c$ das fragliche Produkt. Man hat $A'_1\cdots A'_c\mathfrak{s}\supset(0)$, da $A'_1\cdots A'_c\mathfrak{s}=(0)$ hiermit zB. $B_{m_1}\cdots B_{m_\alpha}A'_1\cdots A'_cB_\beta\cdots$ $\cdots B_{m_{c^2}}\mathfrak{s}\subseteqq B_{m_1}\cdots B_{m_\alpha}A'_1\cdots A'_c\mathfrak{s}=(0)$ ergeben würde, was falsch ist, weil der Am. des ersten geschrieben Ausdruckes $\subset\mathfrak{M}$ ist. Aus den Umständen $A'_1\cdots A'_c\mathfrak{s}\supset(0)$, $A'_i\mathfrak{s}\subseteqq\mathfrak{s}$, führt man, nach dem Satze 40', zum Vorhandensein eines derartigen $\mathfrak{N}'$, dass: 1') $\mathfrak{N}\subseteqq\mathfrak{N}'\subset\mathfrak{M}$; 2') $\mathfrak{N}'=\mathfrak{Q}_{a'_1}\cap\cdots\cap\mathfrak{Q}_{a'_c}$. Da $A'_1,\cdots,A'_c$ den Endomorphismus B_d nicht enthält und

$A'_i\mathfrak{s}'\subseteqq A'\mathfrak{s}$ ist, wird $\mathfrak{N}'\supset\mathfrak{N}$ sein; deswegen werden die oben gennanten Bedingungen 1), 2) und 3) erfüllt. Nun wenn wir aus $\mathfrak{N}'$ und den A'_i ausgehend den fraglichen nicht nilpotenten Endomorphismus bilden können, bleibt den Satz bewiesen. Andernfalls geht der Prozess weiter. Gesetzt, wie im zweiten Fall, dass c einanderfolgende Faktoren des Produkts $P=B_{m_1}\cdots B_{m_{c^2}}$ den Endomorphismus $B_{m_1}=B_d$ enthalten, dürfen wir zB. $P=B_{m_1}P_1\cdots$ $\cdots B_{m_1}P_{l-1}\cdot B_{m_1}P_l$ schreiben, wobei $P_1,P_2,\cdots,P_l$ Produkte der A_i sind, die dieselbe Stelle wie im P haben, und ausserdem jedes P_j weniger als c Faktoren A_i besitzt. Die Zerlegung von P enthalt sodann mindestens c Faktoren in solcher Weise, dass ein Teil von P, $P'=A'_{i_1}\cdots$ $\cdots A'_{i_c}$, $(A'_{i_j}=B_{m_1}P_{i_j})$, existiert, wobei die A'_i einander in P folgen. Wie im ersten Fall, hat man nun $P'\mathfrak{s}\supset(0)$, $A'_i\mathfrak{s}\subseteqq\mathfrak{s}$, also, nach dem Satze 40', existiert $\mathfrak{N}'$, der folgenden Bedingungen genügt: 1'') $\mathfrak{N}\subseteqq\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$; 2'') $\mathfrak{N}'=\mathfrak{Q}_{a'_1}\cap\cdots$ $\cdots\cap\mathfrak{Q}_{a'_c}$. Es folgt $\mathfrak{N}\supset\mathfrak{N}$ wie wir aus $A'_{i_j}\mathfrak{s}=B_{m_1}P_{i_j}\mathfrak{s}\subseteqq B_{m_1}\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'\subseteqq\mathfrak{s}$ ziehen. Bis jetzt besteht folgender Zusammenhang: falls $d>1$, sind immer die drei oben angegebenen Bedingungen erfüllt. Gehen wir von $\mathfrak{N}'$ aus, dann können wir unsere Betrachtungen wiederholen. Man gewinnt eine Folge von Untermoduln $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{N}'\subset\mathfrak{N}''\subset\cdots$, die man bis $\mathfrak{N}^{(t-1)}\subset\mathfrak{N}^{(t)}\subset\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}^{(t)}=\mathfrak{Q}_x$, $[\mathfrak{Q}_x=$ Am. von $\mathfrak{Q}\mathfrak{s}^{(t)}$ und $\mathfrak{s}^{(t)}$ Vi. von $\mathfrak{N}^{(t)}$, wobei $\mathfrak{Q}$ ein Produkt der A_i ist$]$, fortsetzt. Es wird $\mathfrak{N}^{(t)}$ Am. von $Q^m\mathfrak{s}^{(t)}$ sein, und deshalb ist Q kein nilpotenter Endomorphismus.

Korollar 11': *Wenn $\mathfrak{C}$ eine Menge von nilpotenten Endomorphismen eines Moduls mit Doppelkettensatz ist und das Produkt von zwei Elementen von $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{C}$ gehört, dann, unter der Annahme, dass $\mathfrak{M}$ eine Länge $=n$ hat, ist gleich Null das Produkt von n Elementen von $\mathfrak{C}$.* Dieser Korollar ist genau derselbe wie der Korollar 11. Der Beweis stützt sich hier aber auf die Sätze 40' und 41'. Es sei $A_1,\cdots,A_n\in\mathfrak{C}$ und $A_1\cdots A_n\neq 0$. Der Untermodul (0) erfüllt folgende Bedingungen: 1) das Vi. von (0) ist $\mathfrak{s}=\overline{\Omega}$; 2) die Länge von $\mathfrak{M}/(0)$ ist $\leqq n$; 3) $A_1 \cdots A_n \overline{\Omega} \supset (0)$ und $A_i \overline{\Omega} \subseteq \overline{\Omega}$. Es existiert, wie der Satz 40′ behauptet, ein Untermodul $\mathfrak{N}_1$, dessen Vi. $\mathfrak{s}_1$ ist, derartig, dass wir $(0) \subseteq \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_n$ haben, wobei die $\mathfrak{Q}_j$ Am. der $A_j \mathfrak{s}_1$ sind. Danach behauptet der Satz 41′ das Vorhandensein eines nicht nilpotenten Endomorphismus von $\mathfrak{M}$, der ein Produkt der A_i ist. Man stösst auf einen Widerspruch, da jenes Produkt zu $\mathfrak{C}$ gehört. Man muss $A_1 \cdots A_n = 0$ haben, wie geäussert wurde.

Korollar 12′: *In einem Modul dessen Länge n ist, dann und nur dann hat ein Untermodul ein Vernichtungsnilideal, wenn* $\mathfrak{s}^n = (0)$.

10) **Über den Satz von Krull** — Unserer Meinung nach, werden sich viele andere Sätze ergeben können. Wir machen hier Schluss, indem wir nur noch einige Sätze aussprechen, die mit dem Satz von Krull in Zusammenhang stehen.

Satz 42: *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ω-Modul der Form $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_h)$ und nehmen wir diese Summe als direckt an, d. h. gelten die Bedingungen $\mathfrak{M}_i \cap (\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_{i-1}, \mathfrak{M}_{i+1}, \cdots, \mathfrak{M}_h) = (0)$, $(i = 1, 2, \cdots, h)$; dann, indem wir $\mathfrak{N}_i = (\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_{i-1}, \mathfrak{M}_{i+1}, \cdots, \mathfrak{M}_h)$ setzen, schliessen wir auf:* 1) $\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{M}_i = (0)$; 2) $(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{M}_i) = \mathfrak{M}$; 3) $\mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_{i-1} \cap \mathfrak{N}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h = \mathfrak{M}_i$; 4) $\mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h = (0)$.

Satz 43: *Unter den Bedingungen vom Satze 42, gibt es Idempotente $E_1, \cdots, E_h$, für welche:* 5) $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M} E_i$ *und* $\mathfrak{m}_i = \overline{\Omega} E_i$; 6) $1 = E_1 + \cdots + E_h$ *und* $E_i E_j = 0$, *falls* $i \neq j$; 7) $\overline{\Omega} = \overline{\Omega} E_1 + \cdots + \overline{\Omega} E_h$; 8) *das Vi. von* $\mathfrak{M}_i$ *ist* $\mathfrak{s}_i = E_1 \overline{\Omega} + \cdots + E_{i-1} \overline{\Omega} + E_{i+1} \overline{\Omega} + \cdots + E_h \overline{\Omega}$; 9) $\mathfrak{n}_i = \overline{\Omega} E_1 + \cdots + \overline{\Omega} E_{i-1} + \overline{\Omega} E_{i+1} + \cdots + \overline{\Omega} E_h$; 10) *das Vi. von* $\mathfrak{N}_i$ *ist* $\mathfrak{r}_i = E_i \overline{\Omega}$.

Satz 44: *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ω-Modul mit Doppelkettensatz und gelten, unter den Bedingungen von Sätzen 42 und 43, die beiden Zerlegungen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \cdots + \mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_k$, dann, indem wir sowohl die $\mathfrak{M}_i$ wie die $\mathfrak{P}_j$ als unzerlegbar annehmen, wenn die entsprechenden Zerlegungen von 1, $1 = E_1 + \cdots + E_h$, $1 = F_1 + \cdots + F_k$ sind, gibt es ein F_j für welches das Produkt $F_j E_1$ ein Automorphismus von $\mathfrak{M}_1$ ist.*

Korollar 14: *Der Endomorphismus F_1 (falls $F_j = F_1$ ist) bestimmt den Isomorphismus $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_1 F_1 = \mathfrak{P}_1$ und der Endomorphismus E_1 bestimmt den Isomorphismus $\mathfrak{P}_1 \simeq \mathfrak{P}_1 E_1 = \mathfrak{M}_1$.*

Satz 45: *Gelten die Bedingungen vom Satze 44 (mit $F_j = F_1$) und setzen wir $G_1 = E_1 F_1 + E_2 + \cdots + E_h$, $H_1 = F_1 E_1 + F_2 + \cdots + F_k$, $K_1 = E_1 F_1 + F_2 + \cdots + F_k$, $L_1 = F_1 E_1 + E_2 + \cdots + E_h$, dann definieren wir Automorphismen von $\mathfrak{M}$.*

Satz 46: *Wenn in $\mathfrak{M}$ der Doppelkettensatz gilt, dann und nur dann $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} A$ ist, falls der Endomorphismus A einen Am. $\mathfrak{Q}_A = (0)$ hat.*

Satz 47: *Unter den Bedingungen von Sätzen 44 und 45, wenn folgende zusätliche Bedingungen erfüllt sind:* 1) *für jedes $i = 1, 2, \cdots, \varrho$ ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_i + \mathfrak{M}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_{i-1} + \mathfrak{M}_i + \mathfrak{P}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{P}_k$;* 2) *$G_i = E_1 F_1 + \cdots + E_i F_i + E_{i+1} + \cdots + E_h$ und $H_i = F_1 + \cdots + F_{i-1} + F_i E_i + F_{i+1} + \cdots + F_k$ sind Automorphismen;* 3) *durch G_i hat man $\mathfrak{M}_1 G_i = \mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{M}_i G_i = \mathfrak{P}_i$ und durch H_i hat man $\mathfrak{P}_1 H_i = \mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_i H_i = \mathfrak{M}_i$; dann ist es möglich $G_{\varrho+1}$ und $H_{\varrho+1}$ derart zu bestimmen, dass:* α) $G_{\varrho+1} = E_1 F_1 + \cdots + E_{\varrho+1} F_{\varrho+1} + E_{\varrho+2} + \cdots + E_h$ *und* $H_{\varrho+1} = F_1 + \cdots$

$\cdots + F_\rho + F_{\rho+1} E_{\rho+1} + F_{\rho+2} + \cdots + F_h$ *sind Automorphismen;* $\beta)$ $\mathfrak{M}_{\rho+1} G_{\rho+1} = \mathfrak{P}_{\rho+1}$, $\mathfrak{P}_{\rho+1} H_{\rho+1} = \mathfrak{M}_{\rho+1}$; $\gamma)$ $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 + \cdots \cdots + \mathfrak{P}_{\rho+1} + \mathfrak{M}_{\rho+2} + \cdots + \mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho + \mathfrak{M}_{\rho+1} + + \mathfrak{P}_{\rho+2} + \cdots + \mathfrak{P}_h$.

Satz 43: *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein* Ω*-Modul mit Doppelkettensatz und sind* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \cdots + \mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_k$ *zwei in unzerlegbaren* Ω*-Untermoduln Zerlegungen, dann ist* $h = k$ *und kann man die* $\mathfrak{P}_i$ *so zuordnen, dass:* 1) $G = E_1 F_1 + \cdots + E_h F_h$ *und* $H = F_1 E_1 + \cdots + F_h E_h$ *sind Automorphismen;* 2) *für jedes* $\rho = 1, 2, \cdots, h$ *gelten die Gleichheiten* $\mathfrak{M}_\rho G = \mathfrak{P}_\rho$, $\mathfrak{P}_\rho H = \mathfrak{M}_\rho$.

Satz 42': *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein* Ω*-Modul und nehmen wir* $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h$, $(\mathfrak{N}_i, (\mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_{i-1} \cap \mathfrak{N}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h)) = \mathfrak{M}$ *an; dann, indem wir* $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_{i-1} \cap \mathfrak{N}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h$ *setzen, schliessen wir auf:* 1') $(\mathfrak{M}_i \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{M}$; 2') $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{N}_i = (0)$; 3') $(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_{i-1}, \mathfrak{M}_{i+1}, \cdots, \mathfrak{M}_h) = \mathfrak{N}_i$; 4') $(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_h) = \mathfrak{M}$.

Satz 43': *Unter den Bedingungen vom Satze 42', gibt es Idempotente* $E'_1, \cdots, E'_h$*, für welche:* 5') $\mathfrak{N}_i$ *ist der Am. von* E'_i *und das Vi. von* $\mathfrak{N}_i$ *ist* $\mathfrak{s}_i = E'_i \bar{\Omega}$; 6') $1 = E'_1 + \cdots + E'_h$ *und* $E'_i E'_j = 0$*, falls* $i \neq j$; 7') $\bar{\Omega} = E'_1 \bar{\Omega} + \cdots + E'_h \bar{\Omega}$; 8') *das Ki. in* $\mathfrak{N}_i$ *ist* $\mathfrak{n}_i = \bar{\Omega} E'_1 + \cdots + \bar{\Omega} E'_{i-1} + \bar{\Omega} E'_{i+1} + \cdots \cdots + \bar{\Omega} E'_h$; 9') *das Vi. von* $\mathfrak{M}_i$ *ist* $E'_1 \bar{\Omega} + \cdots + E'_{i-1} \bar{\Omega} + + E'_{i+1} \bar{\Omega} + \cdots + E'_h \bar{\Omega}$; 10') *das Ki. in* $\mathfrak{M}_i$ *ist* $\mathfrak{m}_i = \bar{\Omega} E'_i$.

Satz 44': *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein* Ω*-Modul mit Doppelkettensatz und gelten, unter den Bedingungen von Sätzen 42' und 43', die beiden Darstellungen* $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h$, $(0) = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_k$*, dann, indem wir sowohl die* $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_i$ *wie die* $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q}_j$ *als unzerlegbar annehmen, wenn die entsprechenden Zerlegungen von 1,* $1 = E'_1 + \cdots + E'_h$, $1 = F'_1 + \cdots + F'_k$ *sind, gibt es ein* F'_j *für welches das Produkt* $F'_j E'_1$ *ein Automorphismus von* $\mathfrak{M}$ *ist.*

Zusatz: $\mathfrak{N}_1$ *ist genau der Am. von* $E'_1 F'_j$.

Korollar 14': *Der Endomorphismus* F'_1 *(falls* $F'_j = F'_1$*) bestimmt den Isomorphismus* $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_1 F'_1 = \mathfrak{P}_1$ *und der Endomorphismus* E'_1 *bestimmt den Isomorphismus* $\mathfrak{P}_1 \simeq \mathfrak{P}_1 E'_1 = \mathfrak{M}_1$. *Selbstverständlich, definieren wir* $\mathfrak{P}_i$ *durch die Gleichheit* $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_{i-1} \cap \mathfrak{Q}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_k$.

Zusatz: $\mathfrak{Q}_1$ *ist genau der Am. von* $F'_1 E'_1$.

Satz 45': *Gelten die Bedingungen vom Satze 44' (mit* $F'_j = F'_1$*) und setzen wir* $G'_1 = E'_1 F'_1 + E'_2 + \cdots + E'_h$, $H'_1 = = F'_1 E'_1 + F'_2 + \cdots + F'_k$, $K'_1 = E'_1 F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_k$, $L'_1 = = F'_1 E'_1 + E'_2 + \cdots E'_h$*, dann definieren wir Automorphismen von* $\mathfrak{M}$.

Bezeichnungen: Wir werden folgende Bezeichnungen benutzen: $\mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_i = \Delta_i$, $\mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_i = \nabla_i$, $\mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cdots \cap \mathfrak{N}_i = V_i$.

Zusatz: *Unter den Bedingungen vom Satze 45', kann man in* V_h $\mathfrak{N}_1$ *durch* $\mathfrak{Q}_1$*, in* ∇_k $\mathfrak{Q}_1$ *durch* $\mathfrak{N}_1$ *ersetzen derart, dass* $\mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h = (0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{Q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_k$. *Ausserdem hat man* $\mathfrak{N}_1 G'_1 = \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{Q}_1 H'_1 = \mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{N}_1 K'_1 = \mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_1 L'_1 = \mathfrak{N}_1$.

Satz 46': *Wenn in* $\mathfrak{M}$ *der Doppelkettensatz gilt, dann und nur dann ist gleich Null der Am.* $\mathfrak{Q}_A$ *eines Endomorphismus* A*, falls* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}A$ *ist.*

Satz 47': *Unter den Bedingungen von Sätzen 44' und 45', wenn folgende zusätliche Bedingungen erfüllt sind:* 1') *für jedes* $i = 1, 2, \cdots, \rho$ *ist* $\mathfrak{M} = \Delta_i + \mathfrak{M}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{M} = \Delta_{i-1} + \mathfrak{M}_i + \mathfrak{P}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{P}_k$; 2') $G'_i = E'_1 F'_1 + \cdots + E'_i F'_i + + E'_{i+1} + \cdots + E'_h$, $H'_i = F'_1 + \cdots + F'_{i-1} + F'_i E'_i + F'_{i+1} + \cdots \cdots + F'_k$, $K'_i = F'_1 + \cdots + F'_{i-1} + E'_i F'_i + F'_{i+1} + \cdots + F'_k$, $L'_i = E'_1 + \cdots + E'_{i-1} + F'_i E'_i + E'_{i+1} + \cdots + E'_h$ *sind Automorphismen;* 3') *durch* G'_i *hat man* $\mathfrak{M}_1 G'_i = \mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{M}_i G'_i = \mathfrak{P}_i$

und durch H_i' *hat man* $\mathfrak{P}_1 H_i' = \mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_i H_i' = \mathfrak{M}_i$; *dann ist es möglich* $G_{\rho+1}'$, $H_{\rho+1}'$, $K_{\rho+1}'$, $L_{\rho+1}'$ *derart zu bestimmen, dass:* α') *die angegebenen Ausdrücke sind Automorphismen;* β') $\mathfrak{M}_{\rho+1} G_{\rho+1}' = \mathfrak{P}_{\rho+1}$, $\mathfrak{P}_{\rho+1} H_{\rho+1}' = \mathfrak{M}_{\rho+1}$; γ') $\mathfrak{M} = \Delta_{\rho+1} + \mathfrak{M}_{\rho+2} + \cdots + \mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{M} = \Delta_\rho + \mathfrak{M}_{\rho+1} + \mathfrak{P}_{\rho+2} + \cdots + \mathfrak{P}_k$.

Zusatz: *Unter den Bedingungen von Sätzen 44', 45' und ihren Zusätzen, wenn wir noch Folgendes annehmen:* 1'') *für jedes* $i = 1, 2, \cdots, \rho$ *ist* V_i *der Am. von* $E_1' F_1' + \cdots + E_i' F_i'$; 2'') $\triangledown_i$ *ist der Am. von* $F_1' E_1' + \cdots + F_i' E_i'$; 3'') $V_{i-1} \cap \mathfrak{Q}_i \cap \cap \mathfrak{N}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h = (0)$, $\triangledown_{i-1} \cap \mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{Q}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_k = (0)$; *dann gelten dieselben Eigenschaften für* $i = \rho + 1$. *Ausserdem hat man* $V_{\rho+1} G_{\rho+1}' = V_{\rho+1}$, $\triangledown_{\rho+1} H_{\rho+1}' = \triangledown_{\rho+1}$, $(\triangledown_\rho \cap \cap \mathfrak{N}_{\rho+1}) K_{\rho+1}' \subseteq \triangledown_{\rho+1}$, $(V_\rho \cap \mathfrak{Q}_{\rho+1}) L_{\rho+1}' \subseteq V_{\rho+1}$.

Bemerkung: Aus der Tatsache, dass $\mathfrak{M} = \Delta_{\rho+1} + \mathfrak{M}_{\rho+2} + \cdots + \mathfrak{M}_h$ ist, folgt $V_{\rho+1} \cap \mathfrak{Q}_{\rho+2} \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_k = (0)$.

Satz 48': *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein* Ω*-Modul mit Doppelkettensatz und sind* $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_h$, $(0) = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_k$ *zwei Darstellungen von* (0), *dann, unter der Annahme, dass sowohl die* $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_i$ *wie die* $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q}_j$ *unzerlegbar sind, ist* $h = k$ *und man kann die* $\mathfrak{Q}_i$ *so zuordnen, dass:* 1') $G' = E_1' F_1' + \cdots + E_h' F_h'$ *und* $H' = F_1' E_1' + \cdots + F_h' E_h'$ *sind Automorphismen;* 2') *für jedes* $\rho = 1, 2, \cdots, h$ *gelten die Gleichheiten* $\mathfrak{M}_\rho G' = \mathfrak{P}_\rho$, $\mathfrak{P}_\rho H' = \mathfrak{M}_\rho$. *Ausserdem die Differenzgruppen* $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_i$ *und* $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q}_i$ *sind isomorph.*

Zusatz: *Unter den Bedingungen voriger Satzes, hat man für jedes* $\rho = 1, 2, \cdots, h$, $\mathfrak{N}_\rho G' = \mathfrak{Q}_\rho$, $\mathfrak{Q}_\rho H' = \mathfrak{N}_\rho$.

Die Beweise der Sätze dieses Paragraphen, die man bei [5, S. 11-13 und 35] nicht findet, sollen dem Leser überlassen bleiben.

Bemerkung: Bei der Korrektur hat man Satz A' leicht bewiesen (Vgl. S. 298). Es folgen Satz B' (Vgl. S. 308); Korollar A' (Vgl. S. 310) und Satz C' (Vgl. S. 312). In *Gazeta de Matemática*, Nummer 50, 1951, Lisboa, werden wir Einiges davon berichten.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. Almeida Costa, *«Sobre os endomorfismos dos módulos»*, *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, Band XXXIII, 1948, S. 5-32;

[2] N. Jacobson, *«The radical and semi-simplicity for arbitrary rings»*, *American Journal of Mathematics*, Band 67, 1945, S. 299-320;

[3] N. Jacobson, *«On the theory of primitive rings»*, *Annals of Mathematics*, Band 48, 1947, S. 8-21;

[4] A. Almeida Costa, *«Sistemas hiper-complexos e representações»*, *Publicação n.º 19 do Centro de Estudos Matemáticos do Porto*, 1948, (Lehrbuch);

[5] N. Jacobson, *«The theory of rings»*, *Mathematical Surveys*, 1943, (Lehrbuch);

[6] J. Levitzki, *«Über nilpotente Unterringe»*, *Mathematische Annalen*, Band 105, 1931, S. 620-627.

Instituto para a Alta Cultura,
Centro de Estudos Matemáticos
da Faculdade de Ciências do Porto

DRUCKFEHLER: S. 298, L. 4, «abbildet», statt «abbidelt»; S. 301, L. 5 und 14, «Man», statt «Mann»; S. 302, L. 1, «heisst», statt «heint»; S. 302, L. 5, «$[\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2]$», statt «$\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2]$»; S. 310, L. 19, «$B \in \bar{\Omega}'$», statt «$B \in \mathfrak{s}'$»; S. 317, L. 5, «$\mathfrak{N}' \simeq \mathfrak{N}'A = \mathfrak{N}'$», statt «$\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{N}'A = \mathfrak{N}'$»; S. 317, L. 7, «$(n', n'' \in \mathfrak{N}')$», statt «$(n, n'' \in \mathfrak{N}')$; usw..