# FILTRES ET RÉSEAUX

PAR

A. ALMEIDA COSTA

## § 1 — RÉSEAUX ET BASES DE FILTRE ASSOCIÉES

**1) Introduction** — Dans son livre «Topologie générale» [1], N. Bourbaki fait emploi de la notion de filtre, dûe à H. Cartan, comme l'un des instruments fondamentaux de l'étude des espaces topologiques. Cette notion, du domaine de l'Algèbre des Ensembles, est remplacée par J. Kelley, dans son livre «General Topology» [2], par la notion de réseau, qui devient alors l'un des concepts les plus importants de l'étude cité. En fait, Kelley fait la remarque que les filtres et les réseaux doivent conduire à des théories «essentiellement équivalents», en signifiant certainement avec cela que les propositions établies au moyen de théorèmes sur les filtres pourront être obtenues de théorèmes *correspondants* sur les réseaux, et réciproquement. Compte tenu de cette idée, nous ferons dans le § 1 une théorie de relations entre les réseaux et les bases de filtre, indépendamment de questions topologiques; après cela, dans le § 2, en commençant par traduire, par des termes de réseau, quelques concepts topologiques élémentaires définis au moyen des filtres, nous ferons quelques applications, pour donner une idée de la façon comme l'on pourra interpréter la locution «essentiellement équivalents», signalée ci-dessus.

En général, nous admettrons les résultats exposés dans [1], mais, dans ce qui concèrne [2], nous donnerons les éclaircissements convenables pour l'intelligence de ce qui en sera utilisé. D'ailleurs, nous introduirons deux définitions de réseau: les réseaux simples et les réseaux multiples. Les uns comme les autres se rapprochent, dans un certain sens, des réseaux utilisés dans [2], bien qu'aucun d'eux ne soit soumis au traitement théorique que l'on trouve dans [2].

**2) Réseaux simples. Sous-réseaux**—Un ensemble $\mathfrak{C}=\{x, x', x'', \ldots\}$ est dit *filtrant à droite* (chez quelques auteurs, comme dans [3], *supérieurement filtrant)*, si l'on y a singularisé une relation $\leqq$ de telle façon que l'axiomatique suivant soit vérifiée: I) $x\leqq x$, quel que soit $x$; II) si $x\leqq x'$ et $x'\leqq x$, alors $x=x'$; III) si $x\leqq x'$ et $x'\leqq x''$, alors $x\leqq x''$; IV) pour chaque paire $x$, $x'$, il existe $x''$ tel que $x\leqq x''$, $x'\leqq x''$.

Une application $\varphi$, de $\mathfrak{C}$ dans un espace topologique $\mathcal{E}$, nous permet d'écrire

$$\{\varphi(x), x\in\mathfrak{C}\}, \tag{1}$$

qui est un ensemble contenu dans $\mathcal{E}$ et que l'on appelle *réseau simple.*

Un *sous-réseau* du réseau simple (1) est un ensemble $\{\psi(y), y\in\mathfrak{G}\}$, défini de la façon suivante: $\mathfrak{G}$ est aussi un ensemble filtrant à droite; il existe une application $y\longrightarrow N(y)=x\in\mathfrak{C}$, de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{C}$, telle que: I') $\psi(y)=\varphi[N(y)]$; II') en prenant $x_0\in\mathfrak{C}$, il existe $y_0\in\mathfrak{G}$ tel que l'on a, pour chaque $y\geqq y_0$, $N(y)\geqq x_0$. Voici une proposition très facile à démontrer:

Théorème 1:—*Un sous-réseau $R_2$, d'un sous-réseau $R_1$, d'un réseau simple $R_0$, est un sous-réseaux de $R_0$.*



**3) Réseaux multiples. Sous-réseaux**—Un ensemble $\mathfrak{D}=\{x, x', x'', \ldots\}$ est dit un *système dirigé,* si l'on y a singularisé une relation $\leqq$ de telle façon que l'axiomatique suivante soit vérifiée: I) $x\leqq x$, quel que soit $x$; II) si $x\leqq x'$ et $x'\leqq x'$, alors $x\leqq x''$; III) pour chaque paire $x$, $x'$, il existe $x''$ tel que $x\leqq x''$, $x'\leqq x''$.

Un produit cartésien $\mathfrak{D}\times\mathfrak{H}$, où $\mathfrak{H}=\{y, y', y'', \ldots\}$ est également un système dirigé, est encore un système dirigé, si l'on fait

$$(x, y)\leqq(x', y'), \text{ si et seulement si } x\leqq x',\ y\leqq y'.$$

Dans ce qui va suivre, nous aurons l'occasion de faire usage de systèmes dirigés qui sont des produits cartésiens de plusieurs systèmes dirigés. Si $\mathfrak{K}=\{z, z', z'', \ldots\}$ est un autre système dirigé, nous ne ferons pas de distinction parmi $(x, y, z)$, $((x, y), z)$ et $(x, (y, z))$. Le nombre des facteurs peut être quelconque. On maintiendra la convention correspondante.

En prenant une application $\Phi$, de $\mathfrak{D}$, dans un produit $\mathcal{E}\times\mathfrak{K}$ d'un espace topologique $\mathcal{E}$ par un système dirigé $\mathfrak{K}$, l'ensemble

$$\{(\Phi(x), x);\quad x\in\mathfrak{D}\}, \tag{1}$$

contenu dans $\mathcal{E}\times\mathfrak{K}\times\mathfrak{D}$, s'appelle *réseau multiple.* Le système dirigé $\mathfrak{K}$ peut manquer dans cette définition; alors le réseau (1) sera contenu dans $\mathcal{E}\times\mathfrak{D}$.

Soit le réseau (1) ainsi qu'un deuxième réseau

$$\{(\Psi(y), y);\quad y\in\mathfrak{H}\}, \tag{2}$$

avec $\Psi(y)\in\mathcal{E}\times\mathfrak{K}\times\mathfrak{D}\times\mathfrak{L}$, où $\mathfrak{L}=\{t, t', t'', \ldots\}$ est un système dirigé. Le réseau (2) est contenu dans $\mathcal{E}\times\mathfrak{K}\times\mathfrak{D}\times\mathfrak{L}\times\mathfrak{H}$. On dit que (2) est un *sous-réseau* de (1), s'il $y$ a des applications

$$y\longrightarrow N(y)=x\in\mathfrak{D};\quad y\longrightarrow P(y)=t\in\mathfrak{L}, \tag{3}$$

de telle façon que

I') $(\Phi[N(y)], N(y), P(y)) = \Psi(y)$;
II') si $x_0 \in \mathfrak{D}$, il existe $y_0 \in \mathfrak{H}$ tel que l'on a $N(y) \geqq x_0$, toujours que l'on a $y \geqq y_0$.

Le système dirigé $\mathfrak{L}$ peut manquer dans cette définition; alors, dans (3), on doit considérer seulement la première application, de telle façon que l'on a plus simplement: $(\Phi[N(y)], N(y)) = \Psi(y)$.

Nous avons maintenant ce théorème:

Théorème 1:—*Un sous-réseau $R_2$, d'un sous-réseau $R_1$ d'un réseau multiple $R_0$, est un sous-réseau de $R_0$.* Supposons $R_0$ le réseau (1), $R_1$ le réseau (2), et prenons le sous-réseau

$$R_2: \qquad \{(\Theta(v), v); \quad v \in \mathfrak{M}\}, \tag{4}$$

du réseau $R_1$. On aura $(\Theta(v), v) \in \mathcal{S} \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{L} \times \mathfrak{H} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M} = \{v, v', v'', \ldots\}$ et $\mathfrak{N} = \{w, w', w'', \ldots\}$ sont de nouveaux systèmes dirigés, et

$$v \longrightarrow Q(v) = y \in \mathfrak{H}; \quad v \longrightarrow S(v) = w \in \mathfrak{N};$$
$$(\Psi[Q(v)], Q(v), S(v)) = \Theta(v).$$

Pour reconnaître (4) comme un sous-réseau de (1), considérons les applications

$$v \longrightarrow N[Q(v)] = x \in \mathfrak{D}; \quad v \longrightarrow (P[Q(v)], Q(v), S(v)) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{H} \times \mathfrak{N}.$$

D'accord avec la condition I'), on a en effet

$$(\Phi[N(Q(v))], N[Q(v)], P[Q(v)], Q(v), S(v)) =$$
$$= (\Psi[Q(v)], Q(v), S(v)) = \Theta(v).$$



Dans ce qui concèrne II'), si à $x_0$ on fait correspondre $y_0$ et à $y_0$ on fait correspondre $v_0$, de telle façon que

$$N(y) \geqq x_0, \text{ si } y \geqq y_0; \quad Q(v) \geqq y_0, \text{ si } v \geqq v_0;$$

alors on voit que toujours que l'on a $v \geqq v_0$, la relation $N[Q(v)] \geqq x_0$ est valable. Le théorème est démontré.

**4) Bases de filtre et réseaux simples associés**—Prenons le réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$ et désignons par $S_x$ l'ensemble

$$S_x = \{\varphi(x'), x' \geqq x\}. \tag{1}$$

La famille $S_x$ définit une base de filtre $\mathfrak{B} = \{S_x\}$, puisque: I) $S_x$ n'est jamais vide, car $\varphi(x) \in S_x$; II) en prenant $S_{x_1}$ et $S_{x_2}$, si l'on a $x_3 \geqq x_1$, $x_3 \geqq x_2$, l'inclusion $S_{x_3} \subseteq S_{x_1} \cap S_{x_2}$ est valable. On donnera à $\mathfrak{B}$ le nom de *base de filtre associé au réseau simple.*

Remarque:—Si le réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$ se réduit à une constante, la base de filtre associé est une base d'ultrafiltre.

Réciproquement, soit $\mathfrak{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une base de filtre sur $\mathcal{S}$. Puisqu'il existe, pour chaque paire $B_\alpha$, $B_\beta$, un $B_\gamma \subseteq B_\alpha \cap B_\beta$, $(\beta, \gamma \in A)$, on peut considérer $\mathfrak{B}$ un ensemble filtrant à droite, en posant $B_\alpha \leqq B_\beta$, si et seulement si $B_\beta \subseteq B_\alpha$. Faisons correspondre ensuite, conformément à l'axiome du choix, à chaque $B_\alpha \in \mathfrak{B}$, un élément $\varphi(B_\alpha) \in B_\alpha$; alors on obtient un réseau simple

$$\{\varphi(B_\alpha), B_\alpha \in \mathfrak{B}\}, \tag{2}$$

que l'on appelle *réseau simple associé à la base de filtre* $\mathfrak{B}$.

Remarques:—Bien que l'on a, dans (1), une base de filtre déterminé, il y aura dans (2), en général, un système de réseaux distincts. Si la base de filtre se réduit à un seul ensemble formé par un seul point de $E$, alors, il s'agit d'une base de ultrafiltre à laquelle reste associé un seul réseau qui est une constante (le point considéré).

Revenons à la base de filtre (1) et cherchons un réseau simple associé. On aura

$$\{\psi(S_x) \in S_x, S_x \in \mathfrak{B}\}.$$

Par cette définition, nous avons $\psi(S_x)=\varphi(\bar{x})$, avec $x \leqq \bar{x} \in \mathfrak{C}$. La correspondance $S_x=y \longrightarrow N(y)=\bar{x}$ donne $\psi(y)=\varphi[N(y)]$, satisfaisant de la sorte la première condition I') du n.° 2, concernant les sous-réseaux des réseaux simples. D'autre part, si l'on prend $x_0 \in \mathfrak{C}$ ainsi que $y_0=S_{x_0} \in \mathfrak{B}$, nous allons reconnaître que, pour chaque $S_x=y \geqq y_0$, nous avons $N(y) \geqq x_0$. En fait $N(y)=\bar{x} \geqq x$, et, comme l'on a $S_x \geqq S_{x_0}$, on a aussi $x \geqq x_0$; donc $N(y) \geqq x_0$. La proposition suivante est valable:

Théorème 1:—*Chaque réseau simple associé à une base de filtre associé à un réseau simple est un sous-réseau de ce dernier.*

Remarques:—Si l'on faisait $\psi(S_x)=\varphi(x)$, on obtiendrait un sous-réseau qui serait le réseau initial [on doit tenir compte du fait que la correspondance $S_x=y \longrightarrow N(y)=\bar{x}$ est une conséquence d'une nouvelle application de l'axiome du choix]. L'orsqu'il y a un élément $\xi \in \mathfrak{C}$ plus grand que tous les autres, en faisant $\psi(S_x)=\varphi(\xi)$, quel que soit $S_x$, le sous-réseau se réduit à une constante.

D'une façon correspondante, revenons au réseau (2), pour chercher la base de filtre associée. On a

$$S_{B_\alpha}=\{\varphi(B_\beta), B_\beta \geqq B_\alpha\}, \quad (B_\beta \subseteq B_\alpha).$$

Le fait que $S_{B_\alpha} \subseteq B_\alpha$ nous montre que la base de filtre associée est plus fine que la base $\mathfrak{B}$. Alors, on peut dire:



Théorème 2:—*La base de filtre associée à tout réseau simple associé à une base de filtre est plus fine que cette dernière base.*

Remarques:—Lorsque l'on part d'un réseau simple, le théorème 1 montre que les deux procédés consécutifs «d'association» font passer à un système de sous-réseaux. Maintenant, étant parti d'une base de filtre, les mêmes procédés font passer à un système de bases plus fines. Si le réseau simple de que l'on part est une constante, les sous-réseaux se réduisent tous à cette même constante; et si la base de filtre initiale est une base d'ultrafiltre, les systèmes de bases plus fines sont toutes équivalentes à la base initiale.

**5) Bases de filtre et réseaux multiples associés**—Prenons le réseau multiple $\{\Phi(x), x);\ x \in \mathfrak{D}\}$ et désignons par $M_x$ l'ensemble

$$M_x=\{(\Phi(x'), x');\quad x' \geqq x\}. \tag{1}$$

De même façon que dans le n.° antérieur, la famille $\{M_x\}=\mathcal{B}$ constitue une *base de filtre associée au réseau multiple.*

Réciproquement, une base de filtre $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{E} \times \mathfrak{R}$ étant donnée, soient $B_\alpha \in \mathcal{B}$ et $x \in B_\alpha$. Nous définissons un système dirigé $\mathfrak{D}=\{(x, B_\alpha)\}$, en posant $(x, B_\alpha) \leqq (x', B_\beta)$, si et seulement si $B_\beta \subseteq B_\alpha$. Le réseau

$$\{(\Phi(x, B_\alpha), (x, B_\alpha));\quad (x, B_\alpha) \in \mathfrak{D}\}, \tag{2}$$

où l'on suppose $\Phi(x, B_\alpha)=x$, est dit *réseau multiple associé à la base de filtre* $\mathcal{B}$. De façon différente de ce qui arrive dans le n.° antérieur, ce réseau associé est unique.

Revenons à la base de filtre (1) et cherchons le réseau multiple associé. On aura, maintenant que la base de filtre

$\mathfrak{B}$ est $\{ M_x \}$,

$$\{(\Psi[(\Phi(\bar{x}),\bar{x}),M_x];((\Phi(\bar{x}),\bar{x}),M_x));((\Phi(\bar{x}),\bar{x}),M_x)\in\mathfrak{H}\}, \quad (3)$$

où $\Psi[(\Phi(\bar{x}),\bar{x}),M_x]=(\Phi(\bar{x}),\bar{x})\in\mathcal{E}\times\mathfrak{R}\times\mathfrak{D}$, si $\Phi(x)\in\mathcal{E}\times\mathfrak{R}$. Ce réseau (3), comme pour le cas des réseaux simples, est un sous-réseau du reseau $\{(\Phi(x),x);\ x\in\mathfrak{D}\}$. En effet, en prenant pour $N$ l'application

$$((\Phi(\bar{x}),\bar{x}),M_x)=y\longrightarrow N(y)=\bar{x},$$

[maintenant il n'y a pas lieu de tenir compte de l'application $y\longrightarrow P(y)$ citée dans (3), n.° 3], on voit que $(\Phi[N(y)],N(y))=\Psi(y)$; et, d'autre part, en posant $((\Phi(\bar{x}_0),\bar{x}_0),M_{x_0})=y_0$, on reconnaît que, sous la condition $y\,\overline{>}\,y_0$, nous avons $N(y)\,\overline{>}\,x_0$. La proposition suivante est valable.

Théorème 1 :—*Le réseau multiple associé à une base de filtre associé à un réseau multiple est un sous-réseau de ce dernier.*

Pour simplifier les énoncés et leur usage, il est convenable d'introduire une notation que nous allons indiquer.

Projection d'indice zéro :—Lorsque l'on donne un rôle aux réseaux qui prenent des valeurs dans un produit cartésien (dont le premier facteur est toujours l'espace topologique $\mathcal{E}$), ou lorsque l'on fait des raisonnements avec des bases de filtre dont les éléments sont des sous-ensembles d'un produit cartésien dans les mêmes conditions, nous appellerons *projection d'indice zéro* la projection dans $\mathcal{E}$. On la représentera par le symbole $Proj_0$.

Dans le théorème 1, démontré ci-dessus, si le réseau initial est $R\subseteq\mathcal{E}\times\mathfrak{R}\times\mathfrak{D}$ et si le sous-réseau est représenté



par le symbole $R_1$, on a $R_1\subseteq\mathcal{E}\times\mathfrak{R}\times\mathfrak{D}\times\mathfrak{H}$, ainsi que

$$\mathrm{Proj}_0(R_1)=\mathrm{Proj}_0(R)\subseteq\mathcal{E},$$

$$\mathrm{Proj}_0\Psi(y)\in\mathrm{Proj}_0(R_1),\quad \mathrm{Proj}_0\Phi(x)\in\mathrm{Proj}_0(R),$$

$$\mathrm{Proj}_0\Psi(y)=\mathrm{Proj}_0(\Phi[N(y)]).$$

En correspondance avec les raisonnements avec lesquels nous sommes conduits au théorème 1, revenons au réseau multiple (2) pour chercher la base de filtre associée. On aura

$$M_{(x,B_\alpha)}=\{(\Phi(x',B_\beta),(x',B_\beta));(x',B_\beta)\,\overline{>}\,(x,B_\alpha)\}.$$

Nous voyons que $M_{(x,B_\alpha)}\subseteq B_\alpha\times\mathfrak{D}\subseteq\mathcal{E}\times\mathfrak{R}\times\mathfrak{D}$. Réciproquement, soit $\bar{x}\in B_\alpha$; on a $(\bar{x},B_\alpha)\,\overline{>}\,(x,B_\alpha)$, donc $(\Phi(\bar{x},B_\alpha),(\bar{x},B_\alpha))\in M_{(x,B_\alpha)}$. On en conclut que la totalité des éléments de $B_\alpha\times\mathfrak{D}$ de la forme $(\bar{x},(\bar{x},B_\alpha))$ appartient à $M_{(x,B_\alpha)}$. La proposition suivante a lieu:

Théorème 2 :—*En prenant la base de filtre $\mathfrak{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$, la base de filtre $\{M_{(x,B_\alpha)}\}$ associée au réseau multiple associé à $\mathfrak{B}$, vérifie la relation $Proj_0(M_{(x,B_\alpha)})=Proj_0(B_\alpha)$. En particulier, si $B_\alpha\subseteq\mathcal{E}$, on a $Proj_0 M_{(x,B_\alpha)}=B_\alpha$.*

**6) Sous-réseaux de réseaux simples et bases de filtre associées**—Soit le sous-réseax $\{\psi(y),y\in\mathfrak{G}\}$ du réseau simple $\{\varphi(x),x\in\mathfrak{C}\}$. Les bases de filtre associées correspondantes sont

$$S_y=\{\psi(y'),y'\,\overline{>}\,y\},\quad S_x=\{\varphi(x'),x'\,\overline{>}\,x\}.$$

En supposant $y'\longrightarrow N(y')=x'$ l'application correspondante de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{C}$, on a $\psi(y')=\varphi[N(y')]$. Si l'on part de $x$, soit $y$ tel que $N(y')\,\overline{>}\,x$ toujours que l'on a $y'\,\overline{>}\,y$.

Alors, $S_y = \{\psi(y') = \varphi[N(y')], y' \geqq y\}$ se compose d'éléments tous appartenant à $S_x$. On aura $S_y \subseteq S_x$. Ainsi:

Théorème 1:—*La base de filtre associée à un sous-réseau d'un réseau simple est plus fine que la base de filtre associée au réseau.*

Compte tenu des théorèmes du n.° 4, on voit que les implications suivantes en résultent:

Réseau simple → base de filtre → sous-réseaux → bases de filtre plus fines;

Base de filtre → réseaux simples → bases de filtre plus fines → sous-réseaux.

**7) Sous-réseaux de réseaux multiples et bases de filtre associées**—Comme dans le n.° antérieur, soit le sous-réseau $\{(\Psi(y), y); y \in \mathfrak{H}\}$ du réseau multiple $\{(\Phi(x), x); x \in \mathfrak{D}\}$. Les bases de filtre associées correspondantes sont composées d'ensembles définis de la façon suivante:

$$M_y = \{(\Psi(y'), y'); y' \geqq y\}, \quad M_x = \{(\Phi(x'), x'); x' \geqq x\}.$$

Conformément aux raisonnements du n.° 3, on a

$$\Psi(y') = (\Phi[N(y')], N(y'), P(y')).$$

En partant de $x$, soit $y$ tel que $N(y') \geqq x$, toujours que l'on a $y' \geqq y$. Alors

$$M_y = \{(\Phi[N(y')], N(y'), P(y'), y'); y' \geqq y\}$$

se compose d'éléments tels que $\mathrm{Proj}_0(M_y) \subseteq \mathrm{Proj}_0(M_x)$. Ainsi:

Théorème 1:—*La base de filtre associée à un sous-réseau d'un réseau multiple a une projection d'indice zéro qui est une base de filtre plus fine que la projection d'indice zéro de la base de filtre associée au réseau.*



Compte tenu des théorèmes du n.° 5, nous obtenons les implications suivantes, plus précises que celles que l'on a données à la fin du n.° antérieur:

Réseau multiple → base de filtre $\mathscr{B}$ → sous-réseau → → base de filtre avec une projection d'indice zéro égale à $\mathrm{Proj}_0(\mathscr{B})$;

Base de filtre $\mathscr{B}$ → réseau multiple → base de filtre avec une projection d'indice zéro égale à $\mathrm{Proj}_0(\mathscr{B})$.

**8) Passage des bases de filtre aux filtres correspondants**—Passons de la base de filtre $\mathscr{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ au filtre correspondant $\mathscr{F} = \{F_b\}_{b \in B}$, $(A \subseteq B)$. Si l'on considère $\mathscr{F}$ comme base de filtre, on leur associe aussi un réseau multiple. Des deux réseaux multiples

$$\{(\Phi(x, B_\alpha), (x, B_\alpha)); (x, B_\alpha) \in \mathfrak{D}\};$$

$$\{(\Psi(x', F_b), (x', F_b)); (x', F_b) \in \mathfrak{D}'\},$$

le premier est une partie du deuxième, puisque $\mathfrak{D}$ est une partie de $\mathfrak{D}'$ et $\Psi(x, B_\alpha) = \Phi(x, B_\alpha)$.

Dans le cas des réseaux simples, il y a toujours des paires de réseaux dans une situation analogue.

**9) Extension de la notion de sous-réseau d'un réseau multiple**—Le théorème 1 du n.° 7 permet l'extension de la notion de sous-réseau d'un réseau multiple, en faisant usage de la définition suivante:—*Un réseau multiple $R_1$ est dit un sous-réseau d'un réseau multiple $R$, si la projection d'indice zéro de la base de filtre associée à $R_1$ est plus fine que la projection d'indice zéro de la base de filtre associée à $R$.*

Alors, en prenant deux bases de filtre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, si la première est plus fine que la deuxième, en vertu du théorème 2 du n.° 5, on peut affirmer que le réseau multiple associé à $\mathcal{B}_1$ est un sous-réseau du réseau multiple associé à $\mathcal{B}_2$. Nous donnerons cet énoncé:

Théorème 1:—*Pour que la base de filtre $\mathcal{B}_1$ soit plus fine que la base de filtre $\mathcal{B}_2$, il faut et il suffit que le réseau multiple associé à $\mathcal{B}_1$ soit un sous-réseau du réseau multiple associé à $\mathcal{B}_2$.*

**10) Comparaison de réseaux simples et multiples**—Un réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$, avec des valeurs $\varphi(x) \in \mathcal{E}$, peut être considéré un réseau multiple, pourvu que l'on l'écrive sous la forme

$$\{(\Phi(\varphi(x), x), (\varphi(x), x)); (\varphi(x), x) \in \mathfrak{L}\}. \qquad (1)$$

$\mathfrak{L}$ est un ensemble filtrant, pour lequel on a $(\varphi(x), x) \leqq (\varphi(x'), x')$, si et seulement si $x \leqq x'$. On posera $\Phi(\varphi(x), x) = (\varphi(x); (\varphi(x), x))$, de telle façon que $\Phi$ prend des valeurs dans $\mathcal{E} \times \mathfrak{L}$, au lieu de les prendre dans $\mathcal{E}$. Le réseau (1) prend des valeurs dans $\mathcal{E} \times \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$.

En supposant $\{\psi(y), y \in \mathfrak{G}\}$ un sous-réseau du réseau simple dont'il est question, si l'on le considère également comme un réseau multiple, on doit l'écrire sous la forme

$$\{(\Psi(\psi(y), y), (\psi(y), y)); (\psi(y), y) \in \mathfrak{N}\}, \qquad (2)$$

où $\mathfrak{N}$ est un ensemble filtrant au même sens de $\mathfrak{L}$. À l'égard de la définition introduite dans le n.° antérieur, le réseau multiple (2) est également un sous-réseau du réseau multiple (1), ce que l'on peut très facilement reconnaître. Nous dirons:



Théorème 1:—*Si les réseaux simples sont compris comme des réseaux multiples, le caractère de sous-réseau se maintient dans une telle interprétation.*

Maintenant, une base de filtre $\mathfrak{B} = \{B_\alpha\}$ étant donnée, les réseaux simples et le réseau multiple associés seront représentés, respectivement, par

$$\{(\Psi(\varphi(B_\alpha), B_\alpha), (\varphi(B_\alpha), B_\alpha)); (\varphi(B_\alpha), B_\alpha) \in \mathfrak{L}\}, \qquad (3)$$

$$\{(\Phi(x, B_\alpha), (x, B_\alpha)); (x, B_\alpha) \in \mathfrak{D}\}, \qquad (4)$$

d'accord avec (1) et avec ce que l'on a fait dans le n.° 5.

Nous allons reconnaître que chaque réseau (3) est un sous-réseau de (4). On considère l'application

$$(\varphi(B_\alpha), B_\alpha) = y \longrightarrow N(y) = (\varphi(B_\alpha), B_\alpha) \in \mathfrak{D}.$$

Alors, en premier lieu, nous avons la relation

$$(\Phi[N(y)], N(y)) = (\varphi(B_\alpha), (\varphi(B_\alpha), B_\alpha)) = \Psi(y).$$

Après cela, remarquons que, compte tenu de ce que l'on a dit dans le n.° 4 et d'après l'ordonnation donnée ci-dessus pour $\mathfrak{L}$, nous avons

$$(\varphi(B_{\alpha'}), B_{\alpha'}) = y \geqq y_0 = (\varphi(B_\alpha), B_\alpha),$$

si et seulement si $B_{\alpha'} \geqq B_\alpha$, c'est-à-dire si et seulement si $B_{\alpha'} \subseteq B_\alpha$. En partant de $X_0 = (x, B_\alpha)$ et posant précisement $Y_0 = (\varphi(B_\alpha), B_\alpha)$, on a, pour chaque $Y \geqq Y_0$, $N(Y) = (\varphi(B_{\alpha'}), B_{\alpha'}) \geqq X_0$, conformément à la façon de faire l'ordonnation de $\mathfrak{D}$ indiquée dans le n.° 5.

Les considérations faites nous permettent de donner un sens bien déterminé à la proposition que voici:

Théorème 2:—*Tout réseau simple associé à une base de filtre est un sous-réseau du réseau multiple associé à la même base.*

Le même résultat peut être établi en vérifiant que, des deux bases de filtre associées à (3) et (4), respectivement, celle que l'on associe à (3) a une projection d'indice zéro plus fine que $\mathrm{Proj}_0(\mathfrak{B})$ [et, partant, plus fine que la projection d'indice zéro de la base que l'on associe à (4), qui est exactement $\mathrm{Proj}_0(\mathfrak{B})$].

**11) Images directes de réseaux simples et de bases de filtre**—En supposant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces topologiques, considérons deux réseaux simples

$$\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}, (\varphi(x) \in \mathcal{E}); \{\psi(y), y \in \mathfrak{G}\}, (\psi(y) \in \mathcal{E}'). \quad (1)$$

On dit que le deuxième réseau est une *image directe*, par $f$ et $g$, du premier, si les conditions suivantes sont réalisées: I) $g$ est une surjection de l'ensemble filtrant $\mathfrak{C}$ sur l'ensemble filtrant $\mathfrak{G}$, de telle façon que, pour $x \leqq x'$, l'on a $g(x) \leqq g(x')$; II) $f$ est une application de l'espace topologique $\mathcal{E}$ dans l'espace topologique $\mathcal{E}'$; III) $\psi$ est une application de $\mathfrak{G}$ dans $\mathcal{E}'$ satisfaisant à la relation $f[\varphi(x)] = \psi[g(x)]$.

En désignant par $\{S_x\}$ et $\{T_y\}$ les bases de filtre associées, respectivement, aux deux réseaux (1), on vérifie facilement l'inclusion $f(S_x) \subseteq T(y)$. Ainsi:

Théorème 1:—*Si $R_1$ est un réseau simple, image du réseau simple $R$, par $f$ et $g$, alors la base de filtre associée à $R_1$ est moins fine que l'image, par $f$, de la base de filtre associée à $R$.*

Réciproquement, si $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une base de filtre sur l'espace topologique $\mathcal{E}$, en supposant $f$ une application de $\mathcal{E}$ dans l'espace topologique $\mathcal{E}'$, prenons la base de filtre $\mathcal{C} = \{f(B_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, sur $\mathcal{E}'$. À chaque réseau simple



$\{\varphi(B_\alpha), B_\alpha \in \mathcal{B}\}$, on peut faire correspondre un réseau simple

$$\{\psi[f(B_\alpha)], f(B_\alpha) \in \mathcal{C}\},$$

de telle façon que l'on ait $\psi[f(B_\alpha)] = f(x)$, pour $\varphi(B_\alpha) = x \in B_\alpha$. Alors, $f[\varphi(B_\alpha)] = f(x) = \psi[f(B_\alpha)]$. Et puisque la condition I), indiquée ci-dessus, est vérifiée, on a

Théorème 2:—*Si $f(\mathcal{B})$ est une image de la base de filtre $\mathcal{B}$, dans le sens que l'on vient de décrire, alors, pour chaque réseau simple associé à $\mathcal{B}$, il existe un réseau simple associé à $f(\mathcal{B})$, lequel est image de celui-là par $f$ et $f$.*

**12) Images directes de réseaux multiples et de bases de filtre**—Soient maintenant

$$\{(\Phi(x), x); x \in \mathfrak{D}\}, \quad \{(\Psi(y), y); y \in \mathfrak{H}\}, \quad (1)$$

avec $\Phi(x) \in \mathcal{E} \times \mathfrak{K}$, $\Psi(y) \in \mathcal{E}' \times \mathfrak{L}$, deux réseaux multiples. On dit que le deuxième réseau est une *image directe*, par $(f, h)$ et $g$, du premier réseau, si les conditions suivantes sont réalisées: I) $g$ est une surjection du système dirigé $\mathfrak{D}$ sur le système dirigé $\mathfrak{H}$, de telle façon que, pour $x \leqq x'$, l'on a $g(x) \leqq g(x')$; II) $(f, h)$ est une application de $\mathcal{E} \times \mathfrak{K}$ dans $\mathcal{E}' \times \mathfrak{L}$, obtenue au moyen de $f$, qui est une application de l'espace topologique $\mathcal{E}$ dans l'espace topologique $\mathcal{E}'$, et au moyen de $h$, qui est une application de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{L}$; III) $\Psi$ est une application de $\mathfrak{H}$ dans $\mathcal{E}' \times \mathfrak{L}$, qui satisfait à la relation $(f, h)[\Phi(x)] = \Psi[g(x)]$.

En désignant par $\{M_x\}$ et $\{P_y\}$ les bases de filtre associées, respectivement, aux deux réseaux (1), on vérifie facilement que $((f, h), g)(M_x) \subseteq P_y$. Ainsi:

Théorème 1:—*Si $R_1$ est un réseau multiple, image du réseau multiple $R$, par $(f, h)$ et $g$, la base de filtre associée* *à $R_1$ est moins fine que l'image, par $((f,h),g)$ de la base de filtre associée à $R$.*

Réciproquement, si $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x \in A}$ est une base de filtre sur $\mathcal{E} \times \mathfrak{R}$, supposons $(f,h)$ une application de $\mathcal{E} \times \mathfrak{R}$ dans $\mathcal{E}' \times \mathfrak{L}$ et prenons la base de filtre $\mathcal{C} = \{(f,h)(B_x)\}_{x \in A}$. Les réseaux multiples associés à $\mathcal{B}$ et à $\mathcal{C}$ sont, respectivement:

$$\{(\Phi(x, B_x), (x, B_x)); (x, B_x) \in \mathfrak{D}\} \tag{2}$$

$$\{(\Psi(y, (f,h)(B_x)), (y, (f,h)(B_x))); (y, (f,h)(B_x)) \in \mathfrak{H}\}. \tag{3}$$

On reconnaît très facilement que (3) est l'image directe de (2) par $(f,h)$ et $((f,h),(f,h))$. En effet, $((f,h),(f,h))$ est une surjection de $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{H}$ qui satisfait à la condition I). La condition II) est vérifiée par définition. En ce qui concèrne III), nous avons

$$(f,h)[\Phi(x, B_x)] = (f,h)(x),$$

$$\Psi[((f,h),(f,h))(x, B_x)] = \Psi[(f,h)(x), (f,h)(B_x)] = (f,h)(x).$$

De cette façon, on peut dire:

Théorème 2:—*Si $(f,h)(\mathcal{B})$ est une image de la base de filtre $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x \in A}$, dans le sens que l'on vient de décrire, alors le réseau multiple associé à $(f,h)(\mathcal{B})$ est l'image directe, par $(f,h)$ et $((f,h),(f,h))$, du réseau multiple associé à $\mathcal{B}$.*

## § 2 — CONVERGENCE. ADHÉRENCE. APPLICATIONS

**1) Définitions**—En suivant [2], nous donnerons ici quelques définitions.

Prenons un réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$; si les valeurs de $\varphi(x)$ appartiennent tous à $A \subseteq \mathcal{E}$, on dit que *le réseau est dans $A$;* s'il existe $x \in \mathfrak{C}$ de telle façon que l'on a $\varphi(x') \in A$,



toujours que l'on a $x' \overline{>} x$, on dit que *le réseau est finalement dans $A$;* enfin, on dit que *le réseau est fréquemment dans $A$,* s'il existe, pour chaque $x \in \mathfrak{C}$, un élément $x' \in \mathfrak{C}$ tel que $x' \overline{>} x$ et $\varphi(x') \in A$.

On vérifie immédiatement que le réseau simple est fréquemment dans $A$, si est seulement si le réseau n'est pas finalement dans $\mathcal{E} - A$.

Dans un système dirigé $\mathfrak{D}$, une partie $\mathfrak{D}_c \subseteq \mathfrak{D}$ est appelée un *cofinal,* s'il existe, pour chaque $x \in \mathfrak{D}$, un élément $d \in \mathfrak{D}_c$ tel que $x \overline{<} d$.

On reconnaît très facilement que l'affirmation suivante est valable: il faut et il suffit, pour qu'un réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$ soit fréquemment dans $A$, qu'il existe un cofinal $\mathfrak{C}_c$ tel que le réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}_c\}$ soit finalement dans $A$.

Compte tenu de la notion de projection d'indice zéro, les définitions et les résultats dont'on vient de parler se transportent dans les réseaux multiples.

**2) Convergence des réseaux**—On dit qu'un réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$ *converge* vers le point $a \in \mathcal{E}$ (ou a $a$ comme un *point limite),* si le réseau est finalement dans chaque voisinage $V(a)$ du même point. On a ce

Théorème 1:—*Pour que $a$ soit point limite du réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$, il faut et il suffit que $a$ soit point limite de la base de filtre associée.* La condition est *nécessaire:*—Si $a$ est point limite du réseau, on a, comme l'on vient de le dire, $S_{x_0} \subseteq V(a)$, avec $V(a)$ arbitraire et $x_0 \in \mathfrak{C}$ convenablement choisi. Alors, le filtre de base $\{S_x\}$ est plus fin que le filtre $\mathfrak{V}(a)$, des voisinages de $a$.

La condition est *suffisante:*—Si $a$ est point limite de la base de filtre $\{S_x\}$, cette base est plus fine que le filtre

$\mathfrak{V}(a)$; alors, il existe, pour chaque $V(a)$, $S_{x_0} \subseteq V(a)$, ce qui implique $\varphi(x) \in V(a)$, toujours que l'on a $x \overline{\gtrless} x_0$.

En faisant appel au théorème 1, n.° 6, § 1, nous dirons:

Corollaire 1:—*Si un réseau simple converge vers un point, tout sous-réseau du réseau converge vers le même point.*

Compte tenu de la deuxième implication indiquée dans le même n.° 6, on a aussi:

Corollaire 2:—*Si une base de filtre converge vers un point, le même arrive pour tout réseau simple associé à la base.*

En passant aux réseaux multiples, la définition de convergence d'un tel réseau sera donnée en faisant intervenir sa projection d'indice zéro; ce sera pour cette projection que l'on a exactement la définition introduite au commencement de ce numéro. Et si l'on parle de bases de filtre composées d'ensembles qui appartiennent à un produit cartésien $\mathfrak{E} \times \mathfrak{K} \times \cdots \times \mathfrak{L}$, la notion de convergence sera également comprise pour la projection d'indice zéro. Alors:

Théorème 2:—*Pour que a soit un point limite d'un réseau multiple, il faut et il suffit que a soit point limite de la base de filtre associée.*

En faisant appel à la définition générale de sous-réseau donnée dans le n.° 9, § 1, nous dirons:

Corollaire 3:—*Si un réseau multiple converge vers un point, tout sous-réseau du réseau converge vers le même point.*

Compte tenu encore de la deuxième implication indiquée dans le n.° 7 du même § 1, la proposition suivante est aussi valable:



Corollaire 4:—*Pour qu'une base de filtre converge vers un point, il faut et il suffit que le réseau multiple associé converge vers le même point.*

La combinaison de ces deux derniers corollaires avec le théorème 2 du n.° 10, § 1, établit de même le corollaire 2.

**3) Points de fréquence d'un réseau**—Si l'on donne un réseau simple $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$, un point $s$ est dit *point de fréquence du réseau,* si le réseau est fréquemment dans chaque $V(s)$.

Théorème 1:—*Pour que s soit un point de fréquence du réseau simple* $\{\varphi(x), x \in \mathfrak{C}\}$, *il faut et il suffit que s soit point adhérent à la base de filtre associée.* La condition est *nécessaire:*—Si $s$ est un point de fréquence du réseau, prenons $S_{x_0}$, ainsi qu'un voisinage $V(s)$. Il existe $x \overline{\gtrless} x_0$ tel que $\varphi(x) \in V(s)$; et comme $\varphi(x) \in S_{x_0}$, on voit que $V(s) \cap S_{x_0} \neq \phi$.

La condition est *suffisante:*—Si chaque $V(s)$ intersecte chaque $S_x$, en prenant $x_0$, on aura $V(s) \cap S_{x_0} \neq \phi$, ce qui entraîne $\varphi(x) \in V(s)$, pour un certain $x \overline{\gtrless} x_0$.

De la même façon que l'on a fait pour la convergence, on fait appel à la projection d'indice zéro, pour donner la définition de point de fréquence d'un réseau multiple ou point adhérent à une base de filtre. On a ce

Théorème 2:—*Pour que s soit un point de fréquence du réseau multiple* $\{(\Phi(x), x); x \in \mathfrak{D}\}$, *il faut et il suffit que s soit point adhérent à la base de filtre associée.*

Dans une situation réciproque, on a le théorème qui va suivre, dans lequel on tient compte de la deuxième implication indiquée dans la partie finale du n.° 7, § 1:

Théorème 3 : — *Pour que $s$ soit point adhérent à une base de filtre $\mathcal{B}$, il faut et il suffit que $s$ soit point de fréquence du réseau multiple associé.*

**4) Applications** — Le fait qu'un espace topologique $\mathcal{E}$ est séparé, si et seulement si toute base de filtre convergente converge vers un seul point, nous permet de dire :

Théorème 1 : — *Pour que $\mathcal{E}$ soit un espace séparé, il faut et il suffit que tout réseau (simple ou multiple) ait, au plus, un point limite.* La condition est *nécessaire :* — Si l'espace est séparé, un réseau ne peut pas avoir deux points limites $a$ et $b$, puisque ces points seraient aussi des points limites des bases de filtre associées, comme cela résulte des théorèmes 1 et 2 du n.° 2.

La condition est *suffisante :* — Si tout le réseau convergent a au plus un point limite, le même arrive pour toute base de filtre convergent, en vertu des corollaires 2 et 4 du même n.° 2.

Dans le langage de la théorie des filtres, nous savons qu'il faut et il suffit, pour qu'un point $a$ soit point d'accumulation d'un ensemble $A$, qu'il existe dans $A-\{a\}$ une base de filtre convergent vers $a$. Alors, on peut dire :

Théorème 2 : — *Le point $a$ est point d'accumulation de $A$, si et seulement s'il existe un réseau (simple ou multiple), dans $A-\{a\}$, convergent vers $a$.*

Encore dans le langage de la théorie des filtres, nous savons qu'il faut et il suffit, pour qu'un point $a$ soit point adhérent à $A$, qu'il existe dans $A$ une base de filtre convergent vers $a$. Ainsi :



Théorème 3 : — *Le point $a$ est point adhérent à $A$, si et seulement s'il existe un réseau (simple ou multiple), dans $A$, convergent vers $a$.*

Maintenant remarquons que, si $s$ est un point adhérent à une base de filtre $\mathfrak{B}$, la famille $\{V_\alpha(s) \cap B_{\alpha'}\}$, composée des intersections des voisinages de $s$ avec les éléments de la base, est également une base de filtre $\mathcal{B}$, d'ailleurs plus fine que la base $\mathfrak{V}(s)$. Ainsi, on a : — Si $s$ est un point adhérent à une base de filtre, alors il existe une base de filtre plus fine que celle-là, laquelle a $s$ comme point limite. En corrélation avec cette afirmation, nous démontrerons le

Théorème 4 : — *Si l'on a un réseau multiple qui a $s$ comme point de fréquence, il existe un sous-réseau du réseau qui a $s$ comme point limite.* Partons du réseau multiple $\{(\Phi(x), x); x \in \mathfrak{D}\}$, qui a $s$ comme point de fréquence, et considérons la base de filtre $\{M_x\}$ associée. La base $\mathcal{B}=\{V_\alpha(s) \cap \text{Proj}_0(M_x)\}$, où $V_\alpha(s)$ est un voisinage arbitraire de $s$ est plus fine que la base $\mathfrak{V}(s)$ et que la base $\{\text{Proj}_0(M_x)\}$. Alors, conformément à ce que l'on a vu dans les n.$^{os}$ 7 et 9 du § 1, le réseau multiple associé à $\mathcal{B}$ est un sous-réseau du réseau $\{(\Phi(x), x); x \in \mathfrak{D}\}$ et converge vers $s$. Le théorème est démontré. Réciproquement :

Théorème 5 : — *Si le réseau multiple $\{(\Phi(x), x); x \in \mathfrak{D}\}$ a un sous-réseau convergent vers $s$, le point $s$ est un point de fréquence du réseau.* Si cela ne serait pas le cas, $s$ ne serait pas un point adhérent à la base de filtre $\{M_x\}$; donc il existerait $V(s)$ et $\text{Proj}_0(M_{x_0})$ de telle façon que $V(s) \cap \text{Proj}_0(M_{x_0})=\phi$. Cependant, d'autre part, il y a un sous-réseau du réseau (qui converge vers $s$) dont la base de filtre correspondant a une projection d'indice zéro plus fine que $\{\text{Proj}_0(M_x)\}$; par conséquent, il exist $B_0 \in \mathcal{B}$

de telle façon que $\mathrm{Proj}_0(B_0) \subseteq \mathrm{Proj}_0(M_x)$. Puisque l'on a $V(s) \cap \mathrm{Proj}_0(B_0) \neq \emptyset$, on ne pourra pas avoir $V(s) \cap \cap \mathrm{Proj}_0(M_x) = \emptyset$. De la le théorème.

**5) Continuité**—En prenant les espaces topologiques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, l'application $x \longrightarrow f(x)$, de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, est *continue au point a,* si la base de filtre $f[\mathfrak{V}(a)]$ est plus fine que la base $\mathfrak{V}[f(a)]$. Puisque $\mathfrak{V}(a)$ converge vers $a$, le réseau multiple $R_a$, associé à $\mathfrak{V}(a)$, converge vers $a$. L'application $f$ étant donnée, le réseau multipie $R_{f(a)}$, associé à $f[\mathfrak{V}(a)]$, est une image directe de $R_a$, par $f$ et $(f, f)$. En vertu de la continuité de $f$, $f[\mathfrak{V}(a)]$ converge vers $a$, donc le même arrive pour le réseau $R_{f(a)}$. Ce raisonnement démontre la partie «nécessaire» de ce

Théorème 1:—*Pour que l'application $f$, de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, soit continue au point a, il faut et il suffit que l'image directe, par $f$ et $(f, f)$, du réseau multiple associé à $\mathfrak{V}(a)$, soit un réseau multiple convergent vers $f(a)$.* La partie «suffisante» indiquée dans le théorème se réduit à démontrer que $f[\mathfrak{V}(a)]$ converge vers $f(a)$. Compte tenu des hypothèses de l'énoncé, cela résulte immédiatement du théorème 2, n.° 12, § 1, et du corollaire 4, n.° 2, de ce paragraphe.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] – N. Bourbaki, *Topologie générale,* Chap. I et II, 1951.

[2] – J. L. Kelley, *General topology,* New York, 1957.

[3] – M me Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Théorie des treillis,* Paris, 1953.