SUR LES ANNEAUX DEMI-PREMIERS [1]

PAR

A. ALMEIDA COSTA (LISBONNE)

1) **Introduction** — D'après Nagata [6], nous dirons qu'un anneau est demi-premier s'il est somme sous-directe d'anneaux premiers. Un tel anneau $\mathfrak{S}$ peut aussi être caractérisé par la propriété de ne pas avoir d'idéaux nilpotents (d'une façon abrégée, on dira: sn-anneau); ceci revient à dire que, $\mathfrak{a}$ étant un idéal, la propriété $\mathfrak{a}^2=(0)$ entraîne $\mathfrak{a}=(0)$.

Dans le § 2, en partant de cette dernière caractérisation, on fait directement la théorie, d'une façon analogue à celle utilisée par MacCoy [3] dans l'étude des anneaux premiers. La notion d'extension unitaire qu'on y trouve est due à Tiago de Oliveira [2]; lui-même a démontré aussi le théorème 4.

Dans le § 3, on prend un anneau et on dit que P est un p-système, si, supposant $c \in P$, il existe $x \in \mathfrak{S}$ tel que $cxc \in P$. Alors, entre les p-systèmes et les idéaux demi-premiers (ou sn-idéaux) il y a des rélations analogues à celles qu'on trouve dans [3], entre les m-systèmes et les idéaux premiers. Un m-système est un p-système, mais la réciproque n'est pas généralement vraie. Toutefois il est facile de construire un m-système contenu dans un p-système. Cette circonstance, liée à la caractérisation d'un sn-idéal faite dans le théorème 6 du § 3, permet de

---

(1) Un résumé, suivi de certaines questions apparentées, sur lesquelles on reviendra dans un autre article, a été présenté au Congrès International de Mathématique de Édimbourg.

démontrer immédiatement qu'un idéal demi-premier est toujours l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent.

Dans le § 4, en liaison avec le radical inférieur $\mathfrak{L}=\phi_0((o))$, de BAER [4], on étudie les SN-idéaux qui sont nilidéaux, c'est-à-dire les idéaux radicaux, suivant la terminologie du même auteur. Le radical inférieur d'un nilidéal sert de modèle pour le radical $Q=\phi_1(\mathfrak{a})$ d'un idéal $\mathfrak{a}$, introduit dans le § 5. On y voit que $\phi_1(\mathfrak{a})=\phi_0(\mathfrak{a})$, si $\mathfrak{a}$ est un nilidéal. Encore dans le § 5, on fait aussi quelques considérations sur le radical supérieur de BAER ou radical de FITTING-KÖTHE. Tous ces radicaux sont présentés de la manière suggérée par la théorie géneral du radical, telle comme on la trouve en [2], par exemple.

En ce qui concèrne le § 6, le fait que le radical $N=\phi_2(\mathfrak{a})$ de MCCOY devient égal au radical $\phi_1(\mathfrak{a})$ permet d'écrire $\phi_2(\mathfrak{a})=\phi_0(\mathfrak{a})$, si $\mathfrak{a}$ est un nilidéal. En particulier, nous avons $\phi_2(o)=\phi_0((o))=\mathfrak{L}$. On obtient un résultat de LEVITZKI [5].

2) **Anneaux sans des idéaux nilpotents** — Un anneau sans des idéaux nilpotents, ou SN-anneau, est défini par la condition d'avoir $\mathfrak{a}=(0)$, si $\mathfrak{a}^2=(0)$. Parmi d'autres, les anneaux premiers, les anneaux réguliers et les anneaux sans des éléments nilpotents sont des SN-anneaux. Nous allons prendre, par exemple, le centre $\mathfrak{Z}$ d'un anneau $\mathfrak{A}$, suposé SN-anneau. Si $\mathfrak{Z}_1$ est un ideal de l'anneau $\mathfrak{Z}$ tel que $\mathfrak{Z}_1^2=(0)$, il est clair que l'idéal $(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_1\mathfrak{A})$, ou idéal extension de $\mathfrak{Z}_1$, en $\mathfrak{A}$, vérifie la relation $(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_1\mathfrak{A})^2=(0)$; on en tire $\mathfrak{Z}_1=(0)$. Le centre d'un SN-anneau est un SN-anneau; donc il ne contient aucun élement nilpotent $\neq 0$, puisque, dans le cas commutatif, un SN-anneau peut être défini par la condition d'avoir $a=0$, si $a^2=0$, $(a\in\mathfrak{A})$. La caractéristique ne peut pas être un carré parfait n^2, car une rélation de la forme $n^2\mathfrak{A}=(0)$ entraîne $n^2\mathfrak{A}^2=(0)$, $n\mathfrak{A}=(0)$. Par conséquent, on voit que la caractéristique ne peut pas être un multiple d'un carré d'un nombre premier $\neq 1$.

Dans un anneau quelconque, on dit que $\mathfrak{x}$ est un SN-*idéal*, si l'anneau quotient $\mathfrak{S}/\mathfrak{x}$ est un SN-anneau. Il faut et il suffit, pour que $\mathfrak{x}$ soit SN-idéal, que la condition $\mathfrak{a}^2\subseteq\mathfrak{x}$ entraîne $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{x}$. Si $\mathfrak{x}$ est un SN-idéal, $\mathfrak{S}/\mathfrak{x}$ n'a pas d'idéaux nilpotents. Alors, on aura $a\in\mathfrak{x}$, si et seulement si $a\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{x}$ (ou $\mathfrak{S}a\subseteq\mathfrak{x}$), comme on peut le voir dans [1, pgs. 10]. Il en résulte immédiatement que $a\in\mathfrak{x}$, si et seulement si $\mathfrak{S}a\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{x}$. On voit encore que, $\mathfrak{x}$ étant toujours un SN-idéal, $a\mathfrak{S}a\equiv o(\mathfrak{x})$ implique $a\equiv o(\mathfrak{x})$, car on a alors $\mathfrak{S}a\mathfrak{S}.\mathfrak{S}a\mathfrak{S}\equiv o(\mathfrak{x})$, donc $\mathfrak{S}a\mathfrak{S}\equiv o(\mathfrak{x})$.

Pour ce qui concèrne proprement la caractérisation des SN-idéaux, on a ce

THÉORÈME 1: *Pour que l'ideal $\mathfrak{x}$ soit un* SN-*idéal, il faut et il suffit que la rélation $(a\mathfrak{S})^2\equiv o(\mathfrak{x})$ entraîne $a\equiv o(\mathfrak{x})$.* Si $\mathfrak{x}$ est un SN-idéal, la congruence $(a\mathfrak{S})(a\mathfrak{S})\equiv o(\mathfrak{x})$ implique $(\mathfrak{S}a\mathfrak{S})(\mathfrak{S}a\mathfrak{S})\equiv o(\mathfrak{x})$, par conséquent, comme l'on a déjà vu, $a\equiv o(\mathfrak{x})$. Réciproquement, si $(a\mathfrak{S})^2\equiv o(\mathfrak{x})$ implique $a\in\mathfrak{x}$, alors, si on suppose $\mathfrak{a}^2\subseteq\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{x}$, et si on prend $a_1\in\mathfrak{a}$, $a_1\notin\mathfrak{x}$, on arrive à $(a_1\mathfrak{S})^2\subseteq\mathfrak{x}$, $a_1\in\mathfrak{x}$, contrairement à l'hypothèse $a_1\notin\mathfrak{x}$. On ne peut pas suposer $\mathfrak{a}\not\equiv o(\mathfrak{x})$.

COROLLAIRE 1: *Il faut et il suffit, pour que l'idéal $\mathfrak{x}$ soit un* SN-*idéal, que, pour chaque idéal à droite $\mathfrak{r}$ tel que $\mathfrak{r}^2\equiv o\ (\mathfrak{a})$, soit $\mathfrak{r}\equiv o(\mathfrak{a})$.* Au lieu d'un idéal à droite on peut parler d'un idéal à gauche. Si $\mathfrak{x}$ est un SN-idéal, de la condition $\mathfrak{r}^2\equiv o(\mathfrak{x})$, on déduit, dès qu'on suppose $r\in\mathfrak{r}$, $(r\mathfrak{S})^2\equiv o(\mathfrak{x})$, $r\in\mathfrak{x}$, donc $\mathfrak{r}\equiv o(\mathfrak{x})$. Réciproquement: si $\mathfrak{r}^2\equiv o(\mathfrak{x})$ entraîne $\mathfrak{r}\equiv o(\mathfrak{x})$, en particulier, si on suppose $\mathfrak{a}$ un idéal, $\mathfrak{a}^2\equiv o(\mathfrak{x})$ entraîne $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{x}$.

COROLLAIRE 2: *Il faut et il suffit, pour que l'idéal $\mathfrak{x}$ soit un* SN-*idéal, que la condition $a\mathfrak{S}a\equiv o(\mathfrak{x})$ implique*

$a \equiv o(\mathfrak{x})$. On a déjà constaté la première partie de l'assertion. Maintenant, nous prendrons $\mathfrak{t}^2 \equiv o(\mathfrak{x})$. Alors, si $\mathfrak{t} \not\equiv o(\mathfrak{x})$, soit $r \in \mathfrak{t}$, $r \notin \mathfrak{x}$; on aura dans ce cas $r \mathfrak{S} r \equiv o(\mathfrak{x})$, $r \notin \mathfrak{x}$, contrairement à l'hypothèse.

De la définition de SN-anneau il résulte immédiatement qu'un tel anneau n'a pas diviseurs de zéro absolus, à droite ou à gauche. En tenant compte de ce fait, on peut dire:

Théorème 2: *Si e est un idempotent d'un anneau $\mathfrak{S}$, supposé* SN-*anneau, alors $e\mathfrak{S}e$ est aussi un* SN-*anneau.* $\mathfrak{a}^*$ étant un idéal de $e\mathfrak{S}e$, nous poserons $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}^*\mathfrak{S}$. En admettant qu'on a $\mathfrak{a}^{*2} = (0)$, on a aussi

$$\mathfrak{t}^2 = \mathfrak{a}^*\mathfrak{S}.\mathfrak{a}^*\mathfrak{S} = \mathfrak{a}^* e \mathfrak{S} e \mathfrak{a}^* \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}^{*2}\mathfrak{S} = (0),$$

ce qui entraîne $\mathfrak{t} = (0)$, par suite $\mathfrak{a}^* = (0)$.

De même que dans le cas des anneaux premiers, il convient d'établir ici la validité de ce

Théorème 3: *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{x}$ un* SN-*idéal du même anneau, l'intersection $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{x}$ est un* SN-*idéal de l'anneau* $\mathfrak{a}$. En fait, nous montrerons que, supposant $a \in \mathfrak{a}$, la congruence $a\mathfrak{a}a \equiv o(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{x})$ entraîne $a \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{x}$. Si l'on a $a\mathfrak{a}a \equiv o(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{x})$, il est aussi $a(\mathfrak{S}a\mathfrak{S})a \subset a\mathfrak{a}a \subseteq \mathfrak{x}$, donc $(a\mathfrak{S})^3 \equiv o(\mathfrak{x})$. On en déduit $(a\mathfrak{S})^4 \equiv o(\mathfrak{x})$, $(a\mathfrak{S})^2 \equiv o(\mathfrak{x})$, $a\mathfrak{S} \equiv o(\mathfrak{x})$, $a \in \mathfrak{x}$, et finalement, comme on le désire, $a \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{x}$.

Corollaire 3: *Un idéal d'un* SN-*anneau est un* SN-*-anneau.*

Le théorème 2 montre comme on peut passer d'un SN-anneau pour un autre SN-anneau contenu dans le

premier. Nous allons maintenant obtenir, dans une situation inverse, un SN-anneau, extension d'un SN-anneau $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ étant donné, nous considérerons l'anneau $\mathfrak{A}_d$ des endomorphismes de $\mathfrak{A}$, définis par les multiplications à droite. D'après Tiago de Oliveira [2], dans l'absolu de $\mathfrak{A}$, nous désignerons par *extension unitaire* de $\mathfrak{A}_d$ l'anneau $\hat{\mathfrak{A}}_d = (\mathfrak{A}_d, \mathrm{I})$, engendré par $\mathfrak{A}_d$ et par l'endomorphisme identité I. Dès que l'isomorphisme $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}_d$ a lieu, on peut aussi considérer $\hat{\mathfrak{A}}_d$ comme extension unitaire de $\mathfrak{A}$. Il convient encore, pour le nôtre objectif, de faire remarque à que, si $\mathfrak{S}$ est un anneau et $\mathfrak{B}$ un idéal de $\mathfrak{S}$ qui, comme module, réalise $\mathfrak{S}$ par des multiplications à gauche, alors, en supposant $\mathfrak{t} \neq (0)$ un idéal à droite de $\mathfrak{S}$, on a $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{B} \neq (0)$. En fait, s'il serait $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{B} = (0)$, on aurait aussi $\mathfrak{t}\mathfrak{B} = (0)$ et $\mathfrak{B}$ ne donnerait pas la réalisation indiqueé ci-dessus. Nous fixerons la proposition suivante:

Théorème 4: *En supposant $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}_d$, il faut et il suffit, pour que $\mathfrak{A}$ soit* SN-*anneau, qu'il en soit de même de son extension unitaire* [2]. Si $\hat{\mathfrak{A}}_d$ est un SN-anneau, alors $\mathfrak{A}_d$, comme son idéal, est SN-anneau. Inversement, si $\mathfrak{A}$ (donc $\mathfrak{A}_d$) est un SN-anneau, nous allons voir que $\mathfrak{A}_d$ réalise $\hat{\mathfrak{A}}_d$ par des multiplications à gauche. Si, pour $\hat{x} \in \hat{\mathfrak{A}}_d$, on avait $\hat{x}\mathfrak{A}_d = (0)$, il serait aussi $\mathfrak{A}\hat{x}\mathfrak{A}_d = (0)$. En supposant $\hat{x} \neq 0$, on aurait $\mathfrak{A}\hat{x} \neq (0)$, et, en admettant que $o \neq a \in \mathfrak{A}\hat{x}$, il viendrait $a\mathfrak{A}_d = a\mathfrak{A} = (0)$, ce que n'a pas lieu. Par suite nous avons $\hat{x} = 0$. Cela posé, nous prenons un idéal à droite $\hat{\mathfrak{t}}$, de $\hat{\mathfrak{A}}_d$, et nous allons admettre $\hat{\mathfrak{t}}^2 = (0)$. Si $\hat{\mathfrak{t}} \neq (0)$, une remarque faite ci-dessus montrerait qu'on aurait de même $\hat{\mathfrak{t}} \cap \mathfrak{A}_d \neq (0)$, bien qu'il vaudrait $(\hat{\mathfrak{t}} \cap \mathfrak{A}_d)^2 = (0)$, contrairement au fait que $\mathfrak{A}_d$ est un SN-anneau. On ne peut pas avoir $\hat{\mathfrak{t}} \neq (0)$ et le théorème reste établi.

Un anneau premier et un SN-anneau. Réciproquement, on peut dire:

Théorème 5: *Pour qu'un* SN-*anneau soit premier, il faut et il suffit q'une égalité* $(0)=\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2$, *où* $\mathfrak{a}_1$ *et* $\mathfrak{a}_2$ *sont des idéaux, implique* $\mathfrak{a}_1=(0)$ *ou* $\mathfrak{a}_2=(0)$. Soit $\mathfrak{A}$, supposé SN-anneau, un anneau premier. Alors, de la rélation $(0)=\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2$, résulte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2=(0)$, donc $\mathfrak{a}_1=(0)$ ou $\mathfrak{a}_2=(0)$. Inversement, si $\mathfrak{A}$, supposé SN-anneau, joue de la propriété de l'énnoncé, en posant $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2=(0)$ on a $(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^2=(0)$, $\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2=(0)$, donc $\mathfrak{a}_1=(0)$ on $\mathfrak{a}_2=(0)$.

3) **p-systèmes et SN-idéaux**—L'anneau $\mathfrak{S}$ lui-même est toujours un SN-idéal. En ce qui concerne l'existence d'autres SN-idéaux, nous sommes naturellement conduits à introduire certains ensembles qui remplacent les *m*-systèmes de McCoy [3]. Un ensemble P, d'élements de $\mathfrak{S}$, est dit un *p*-système, si, en prennant $c\in P$, il existe $x\in\mathfrak{S}$ tel que $cxc\in P$. Compte tenu du corollaire 2 du numéro antérieur, nous pouvons énoncer le

Théorème 6: *La condition nécessaire et suffisante, pour que l'idéal* $\mathfrak{r}$ *soit un* SN-*idéal, est que son ensemble complémentaire* $C(\mathfrak{r})$, *dans* $\mathfrak{S}$, *soit un p-système.* La condition est *nécessaire*:—Si $\mathfrak{r}$ est un SN-idéal et $c\in C(\mathfrak{r})$, alors nous avons $c\mathfrak{S}c\not\equiv 0(\mathfrak{r})$, donc il existe $t\in\mathfrak{S}$ tel que $ctc\in C(\mathfrak{r})$.

La condition est *suffisante*:—Soit $\mathfrak{r}$ un idéal et $C(\mathfrak{r})$ un *p*-système. Si nous avons $a\mathfrak{S}a\equiv 0(\mathfrak{r})$, on en conclut $a\in\mathfrak{r}$, car, pour $a\notin\mathfrak{r}$, il existerait $x\in\mathfrak{S}$ tel que $axa\in C(\mathfrak{r})$ et nous n'aurions pas $a\mathfrak{S}a\equiv 0(\mathfrak{r})$.

Un *m*-système est un *p*-système. L'inverse n'est pas généralement vrai. Toutefois, il est facile de construire dans chaque *p*-système un *m*-système. Soit P le *p*-système et $y_0\in P$; nous pouvons trouver $s_0\in\mathfrak{S}$ tel que $y_0s_0y_0=y_1\in P$; de même il existe $s_1\in\mathfrak{S}$ pour lequel $y_1s_1y_1=y_2\in P$, etc. La suite $\{y_0,y_1,y_2,\ldots\}$ nous donne un *m*-système, comme on va le reconnaître: nous avons $y_0s_0y_0=y_1$; $y_1s_1y_1=y_2$, $y_0s_0y_0s_1y_1=y_2$, $y_1s_1y_0s_0y_0=y_2$; $y_2s_2y_2=y_3$, $y_1s_1y_1s_2y_2=y_3$, etc.. Nous donnerons l'énnoncé suivant:

Théorème 7: $\mathfrak{r}$ *étant un* SN-*idéal, le p-système* $C(\mathfrak{r})$ *contient des m-systèmes. L'idéal* $\mathfrak{r}$ *est l'intersection de tous les idéaux premiers qui continnent* $\mathfrak{r}$. La première partie étant déjà démontrée, nous allons établir la seconde. Soit $\{\mathfrak{p}_\gamma\}_{\gamma\in C}$ la totalité des idéaux premiers qui contiennent $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{m}=\cap\mathfrak{p}_\gamma$. Nous avons $\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{r}$. En admettant l'inclusion $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{r}$, nous considérons le *m*-système $\{y_0,y_1,\ldots,y_n,\ldots\}=M$, dont on a déjà parlé, dans lequel $y_0\in\mathfrak{m}\cap C(\mathfrak{r})$. On a $M\subseteq\mathfrak{m}$. D'après [3], il existe un idéal premier maximum contenant $\mathfrak{r}$ et sans aucun élement de M. Cet idéal ne peut pas contenir $\mathfrak{m}$, ce qui est un absurde. Par conséquent $\mathfrak{m}=\mathfrak{r}$. Ce théorème et les propriétés des sommes sous-directes nous amènent au

Corollaire 4: *Pour qu'un anneau* $\mathfrak{S}$ *soit un* SN-*anneau, il faut et il suffit qu'il soit une somme sous-directe d'anneaux premiers.*

L'usage systématique des *p*-systèmes, au lieu des *m*-systèmes, nous amène aussi aux résultats indiqués dans les deux propositions à suivre, dans lesquelles nous nous bornerons à la démonstration de la première, puisque la seconde peut être établie exactement comme le fait McCoy à propos de l'affirmation correspondant pour les idéaux premiers.

Théorème 8: P_0 *étant un p-système et* $\mathfrak{a}_0$ *un idéal dont aucun élément n'appartient à* P_0, *alors tout idéal maximum* $\mathfrak{y}$, *parmi les idéaux qui contiennent* $\mathfrak{a}_0$ *et ne possèdent aucun élement dans* P_0, *est un* SN-*idéal.* P_0 et $\mathfrak{a}_0$ étant donnés, soit $\mathfrak{y}$ l'idéal maximum du théorème. Si $\mathfrak{y}$ n'était pas SN-idéal, il existerait $\mathfrak{b}^2\subseteq\mathfrak{y}$, avec $\mathfrak{b}\not\subseteq\mathfrak{y}$. Alors $(\mathfrak{y},\mathfrak{b})\supset\mathfrak{y}$

serait un idéal auquel appartiendraient des éléments de P_0. Donc, il existerait $p \in P_0$ de la forme $p = y + b$, avec $y \in \mathfrak{y}$, $b \in \mathfrak{b}$. Pour un certain $t \in \mathfrak{S}$, il vaudrait la rélation $ptp = (y+b)t(y+b) = btb +$ élément de $\mathfrak{y}$, avec $ptp \in P_0$. Parce que $ptp \notin \mathfrak{y}$, il s'ensuit $btb \notin \mathfrak{y}$, tandis qu'on a $btb \in \mathfrak{b}^2 \subseteq \mathfrak{y}$. La contradiction provient de ce qu'on a admis $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{y}$.

À l'égard des applications que nous allons faire, nous donnerons encore la notion de *sn-idéal minimum appartenant à un idéal* $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{y}$ sera un tel idéal, si on aura $\mathfrak{y} \supseteq \mathfrak{a}$, et il n'existe aucun idéal $\mathfrak{y}_1$ supposé sn-idéal, tel que $\mathfrak{y} \supset \mathfrak{y}_1 \supseteq \mathfrak{a}$. L'existence de sn-idéaux minimaux appartenant à un idéal est assurée par le

Théorème 9: *Pour que* $\mathfrak{x}$ *soit un sn-idéal minimum appartenant à* $\mathfrak{a}$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{x}$ *soit un ensemble d'éléments de* $\mathfrak{S}$ *dont le complémentaire* $C(\mathfrak{x})$ *soit un p-système, maximum parmi les p-systèmes sans aucun élément de* $\mathfrak{a}$. En fait soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque. Il y a toujours des sn-idéaux contennant $\mathfrak{a}$, du moins on a $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{a}$. Les ensembles complémentaires de ces sn-idéaux sont des p-systèmes qui ne contiennent aucun élément de $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{x} \supseteq \mathfrak{a}$ est un sn-idéal et $P_1 \supseteq C(\mathfrak{x})$ un p-système maximum parmi les p-systèmes qui n'ont aucun élément de $\mathfrak{a}$, ce sera $C(P_1) = \mathfrak{x}_1 \subseteq \mathfrak{x}$ un sn-idéal minimum appartenant à $\mathfrak{a}$, lequel réalise les conditions $\mathfrak{x} \supseteq \mathfrak{x}_1 \supseteq \mathfrak{a}$.

4) **Sur les radicaux inférieur et supérieur de Baer** — En suivant Baer [4], nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{P}$, de $\mathfrak{S}$, est un *idéal radical*, s'il est nilidéal et sn-idéal. Le théorème 1 nous amène au résultat suivant:

Théorème 10: *Si* $\mathfrak{P}$ *est un nilidéal de* $\mathfrak{S}$, *il faut et il suffit, pour que* $\mathfrak{P}$ *soit un idéal radical, que* $\mathfrak{P}$ *se compose exactement de tous les éléments* $a \in \mathfrak{S}$ *tels que* $(a\mathfrak{S})^2 \equiv o(\mathfrak{P})$.

L'existence d'idéaux radicaux est toujours assurée. Le radical supérieur $\mathfrak{A}$ aussi bien que le radical inférieur $\mathfrak{L}$, de Baer, en sont des exemples. Baer a montré encore l'existence de nilidéaux, compris entre deux idéaux radicaux et qui ne sont pas des sn-idéaux.

Soit $\mathfrak{a}$ un nilidéal quelconque. On a $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{a}$, $C(\mathfrak{A})$ étant un p-système. Par conséquent, il y a en général des p-systèmes non vides, dont l'intersection avec $\mathfrak{a}$ est vide. On peut dire:

Théorème 11: *P_0 étant un p-système et $\mathfrak{a}_0$ un nilidéal dont aucun élément n'appartient à P_0, alors tout idéal maximum $\mathfrak{w}$, parmi les nilidéaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ et n'ont aucun élément dans P_0, est un idéal radical.* La démonstration est la même que celle du théorème 8, puisque l'idéal $\mathfrak{b}$ correspondant est nilidéal, ainsi que la somme $(\mathfrak{w}, \mathfrak{b})$.

La notion *d'idéal radical minimum appartenant à un nilidéal* a aussi un sens précis; à ce propos a lieu le théorème suivant, qui nous permet d'affirmer, dans tous les cas, son existence:

Théorème 12: *Il faut et il suffit, pour que $\mathfrak{w}$ soit un idéal radical minimum appartenant au nilidéal $\mathfrak{a}$, que $\mathfrak{w}$ soit un ensemble d'éléments de $\mathfrak{S}$ dont le complémentaire $C(\mathfrak{w})$ soit un p-système maximum parmi les p-systèmes sans aucun élément dans* $\mathfrak{a}$. De même que dans le théorème 9, nous ne ferons pas la démonstration. Si $\mathfrak{a}$ est le nilidéal de l'énnoncé, l'idéal radical $\mathfrak{A}$ contient $\mathfrak{a}$. À l'aide des raisonnements que nous avons fait à la suite de ce théorème-là, on trouve un idéal radical minimum appartenant à $\mathfrak{a}$, qui satisfait à $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{w}_1 \subseteq \mathfrak{w}$, où $\mathfrak{w}$ est un idéal radical donné d'auparavant. On peut ajouter le

Corollaire 5: *Tous les sn-idéaux minimaux appartenant à un nilidéal sont des idéaux radicaux.*

Maintenant nous allons faire une remarque. Du fait que $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ n'a pas d'idéaux nilpotents, on conclut que $\mathfrak{L}$ contient tous les idéaux nilpotents de $\mathfrak{S}$. Le radical classique $\mathfrak{R}_0$ (somme des idéaux nilpotents) est contenu dans $\mathfrak{L}$. Lorsqu'on a $\mathfrak{L}=(0)$, on a aussi $\mathfrak{R}_0=(0)$. Inversement, si $\mathfrak{R}_0=(0)$, $\mathfrak{R}_0$ est un idéal radical, donc $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{L}=(0)$.

Dans la théorie générale du radical, le radical inférieur nous fait un premier modèle. Nous venons d'indiquer la famille $\mathfrak{F}_0$ des *anneaux irradicaux,* c'est à dire la famille des anneaux de radical $=(0)$, laquelle se compose de tous les SN-anneaux. Il s'agit d'une famille *complète,* puisque elle contient exactement tous les SN-anneaux. Dans la terminologie de TIAGO DE OLIVEIRA, elle est une famille *saturée,* c'est-à-dire une famille qui, tout en contenant les anneaux isomorphes des anneaux qu'elle contient, contient en outre les sommes sous-directes d'éléments de la famille. Pour reconnaître cette dernière affirmation, on prend $\mathfrak{S}$ comme somme sous-directe d'anneaux $\mathfrak{A}_\alpha, (\alpha \in A)$, supposés SN-anneaux. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{S}$, soit $\mathfrak{a}_\alpha$ son correspondant dans l'homomorphisme $\mathfrak{S}-\mathfrak{A}_\alpha$ dont le noyau est $\mathfrak{n}_\alpha$. Dès que $\mathfrak{a}^\sigma=(0)$, on a $\mathfrak{a}_\alpha^\sigma=(0)$, donc $\mathfrak{a}_\alpha=(0)$, $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{n}_\alpha$. Compte tenu de l'inclusion $\mathfrak{a}\subseteq\bigcap\mathfrak{n}_\alpha=(0)$, on en déduit $\mathfrak{a}=(0)$.

À la famille $\mathfrak{F}_0$ appartiennent aussi les idéaux de tous les éléments de $\mathfrak{F}_0$, car un idéal d'un SN-anneau est un SN-anneau. En résumé, on peut dire:

THÉORÈME 13: *Il faut et il suffit, pour que le radical classique de $\mathfrak{S}$ soit zéro, que soit zéro son radical inférieur. La famille $\mathfrak{F}_0$ des anneaux de radical inférieur égal à zéro est la famille des SN-anneaux. Il s'agit d'une famille complète et saturée, à laquelle appartiennent les idéaux de ses éléments.*

Connaissant la famille $\mathfrak{F}_0$, nous pouvons obtenir le radical inférieur d'un anneau arbitraire $\mathfrak{S}$. Pour celà il conviendra de définir le *radical inférieur d'un nilidéal* $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$. Si on considère l'ensemble de tous les nilidéaux $\mathfrak{J}_\alpha\supseteq\mathfrak{a}$, tels que $\mathfrak{S}/\mathfrak{J}_\alpha\in\mathfrak{F}_0$, nous poserons:

$$\text{radical inférieur du nilidéal } \mathfrak{a}=\phi_0(\mathfrak{a})=\bigcap\mathfrak{J}_\alpha.$$

Au radical inférieur d'un nilidéal conviennent les définitions suivantes: 1) intersection de tous les idéaux radicaux qui contiennent $\mathfrak{a}$; 2) intersection des idéaux radicaux minimaux appartennant à $\mathfrak{a}$; 3) intersection des SN-idéaux minimaux appartennant à $\mathfrak{a}$ (voir le corollaire 5); 4) intersection de tous les SN-idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$.

En particular, le radical inférieur de l'idéal (0) est

$$\mathfrak{L}=\phi_0((0))=\bigcap\mathfrak{P}_j, \quad \text{avec} \quad \mathfrak{S}/\mathfrak{P}_j\in\mathfrak{F}_0.$$

Les $\mathfrak{P}_j$ sont ici, par exemple, tous les idéaus radicaux. Le radical inférieur de (0) est le radical inférieur de $\mathfrak{S}$. Le radical inférieur d'un nilidéal $\mathfrak{a}$ n'est pas à confondre avec le radical inférieur de $\mathfrak{a}$, lorsqu'on considère $\mathfrak{a}$ comme un anneau. Par exemple: un idéal radical $\mathfrak{a}$, d'un anneau irradical $\mathfrak{A}$, a un radical inférieur égal à zéro, si on le considère un anneau, tandis que, considéré un idéal, son radical inférieur est $\mathfrak{a}$ lui-même.

Par des raisonnements analogues on peut étudier le radical supérieur $\mathfrak{N}$. Les anneaux irradicaux, eux aussi, forment une famille saturée de SN-anneaux, mais cette famille n'est pas complète, parce qu'il y a des SN-anneaux qui ne sont pas des anneaux irradicaux. Nous commencerons par la proposition suivante.

THÉORÈME 14: *$\mathfrak{b}$ étant un idéal de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{N}$ le radical supérieur de $\mathfrak{S}$, alors $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{N}$ sera le radical supérieur de l'anneau* $\mathfrak{b}$. La démonstration s'appuit sur le

LEMME 1: *$\mathfrak{S}$ étant un anneau sans nilidéal $\neq(0)$, si un idéal $\mathfrak{b}$ est donné, alors, en supposant $\mathfrak{a}^*$ un nilidéal de* *l'anneau* $\mathfrak{q}$, *on a* $\mathfrak{S}\mathfrak{a}^*\mathfrak{S}=(0)$. En effet, les inclusions

$$(\mathfrak{S}\mathfrak{a}^*\mathfrak{S})(\mathfrak{S}\mathfrak{a}^*\mathfrak{S})\subseteq\mathfrak{b}\mathfrak{a}^*\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{a}^*\mathfrak{S}$$

$$(\mathfrak{S}\mathfrak{a}^*\mathfrak{S})^4\subseteq(\mathfrak{a}^*\mathfrak{S})(\mathfrak{a}^*\mathfrak{S})\subset\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}^*$$

ont lieu; elles impliquent $\mathfrak{S}\mathfrak{a}^*\mathfrak{S}=(0)$.

En passant au théorème, il suffira de vérifier que $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{N}$ n'a pas nilidéal. Dès qu'on a $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{N}\simeq(\mathfrak{b},\mathfrak{N})/\mathfrak{N}$, nous montrerons que ce dernier anneau possède la propriété en question. Dans l'homomorphisme $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}/\mathfrak{N}=\overline{\mathfrak{S}}$, on a $(\mathfrak{b},\mathfrak{N})\sim(\mathfrak{b},\mathfrak{N})/\mathfrak{N}$. Si $\overline{\mathfrak{a}}^*$ est un nilidéal du dernier anneau et $\mathfrak{a}^*$ est son original en $(\mathfrak{b},\mathfrak{N})$, le lemme montre que $\overline{\mathfrak{S}}\overline{\mathfrak{a}}^*\overline{\mathfrak{S}}=(0)$, $\mathfrak{S}\mathfrak{a}^*\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{N}$, $\mathfrak{a}^{*3}\subseteq\mathfrak{N}$. Il en résulte $\overline{\mathfrak{a}}^{*3}=(0)$. Du fait que $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ est un SN-anneau, on conclut que $(\mathfrak{b},\mathfrak{N})/\mathfrak{N}$ est un SN-anneau. Alors, de $\overline{\mathfrak{a}}^{*3}=(0)$, on déduit $\overline{\mathfrak{a}}^*=(0)$, comme nous le voulions établir.

Le théorème nous amène au résultat suivant: la famille irradical $\mathfrak{H}$ contient les idéaux de tous ses éléments. En résumé:

Théorème 15: *La famille $\mathfrak{H}$ des anneaux dont le radical supérieur est égal à zéro est une partie de la famille des* SN-*anneaux. Il s'agit d'une famille incomplète et saturée, à laquelle appartiennent les idéaux de ses éléments.* La propriété de saturation à laquelle nous avons déjà auparavant fait d'allusion peut être démontrée par le même procédé dont on a fait usage pour la démonstration correspondante qui concerne la famille $\mathfrak{F}_0$.

Il est clair aussi que le radical d'un anneau arbitraire $\mathfrak{S}$ est donné par l'intersection de tous les idéaux $\mathfrak{Q}_j$ tels que $\mathfrak{S}/\mathfrak{Q}_j\in\mathfrak{H}$. Et on peut ajouter cette définition: le radical $\Psi(\mathfrak{a})$, d'un idéal $\mathfrak{a}$, est l'intersection de tous les idéaux $\mathfrak{T}_x$ tels que $\mathfrak{T}_x\supseteq\mathfrak{a}$, $\mathfrak{S}/\mathfrak{T}_x$ étant un anneau irradical. Alors

$$\mathfrak{N}=\Psi((0))=\cap\mathfrak{Q}_j,\quad\text{avec}\quad\mathfrak{S}/\mathfrak{Q}_j\in\mathfrak{H}.$$

$$\Psi(\mathfrak{a})=\cap\mathfrak{T}_x,\quad(\mathfrak{T}_x\supseteq\mathfrak{a}),\quad\mathfrak{S}/\mathfrak{T}_x\in\mathfrak{H}.$$

Si $\mathfrak{a}$ est un nilidéal, nous avons $\Psi(\mathfrak{a})=\mathfrak{N}$; dans tous les cas, $\Psi(\mathfrak{a})$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{N}$.

6) **Une théorie du radical** – D'une façon différente, en principe, de celle qu'on a employée au § antérieur, et en corrélation immédiate avec la théorie des SN-idéaux, nous appelerons *radical d'un idéal* $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$, l'ensemble $\mathfrak{n}$, d'éléments de $\mathfrak{S}$, tels que, pour chaque $n\in\mathfrak{n}$, tout le p-système qui contient n a avec $\mathfrak{a}$ une intersection non vide. La proposition suivante a lieu; elle rétablit la liaison avec les raisonnements déjà faits.

Théorème 16: *Le radical $\mathfrak{n}$, de $\mathfrak{a}$, est un idéal, précisement l'intersection de tous les* SN-*idéaux minimaux appartenant à* $\mathfrak{a}$. Nous commençons par observer que tout SN-idéal qui contient $\mathfrak{a}$ contient aussi l'ensemble $\mathfrak{n}$. $\mathfrak{y}$ étant un tel idéal, supposons $n\notin\mathfrak{y}$. Il sera $C(\mathfrak{y})$ un p-système qui contient n, donc qui contient au moins un élément de $\mathfrak{a}$. Mais celà ne peut pas arriver, car on a $\mathfrak{y}\supseteq\mathfrak{a}$. De cette sorte, $n\in\mathfrak{y}$, comme nous le voulons. Nous voyons ainsi que l'intersection indiquée dans le théorème contient le radical $\mathfrak{n}$. Si on la désigne par $\cap\mathfrak{y}_\beta$, nous prenons ensuite $q\notin\mathfrak{n}$ pour voir qu'il en est aussi $q\notin\cap\mathfrak{y}_\beta$. De l'hypothèse $q\notin\mathfrak{n}$, on déduit l'existence d'un ensemble P qui est un p-système contenant q mais qui ne contient pas d'élément de $\mathfrak{a}$. Il existe $P_1\supseteq P$ qui est un p-système maximum contennant P et dont l'intersection avec $\mathfrak{a}$ est vide. Du fait que $q\in P_1$, on conclut $q\notin C(P_1)=\mathfrak{y}_1$; donc q n'appartient pas à $\cap\mathfrak{y}_\beta$ et le théorème est établi.

Pour un nilidéal $\mathfrak{a}$, nous avons écrit, dans le § antérieur, $\cap \mathfrak{y}_\beta = \phi_0(\mathfrak{a})$. Si nous posons, pour un idéal quelconque, $\phi_1(\mathfrak{a}) = \cap \mathfrak{y}_\beta$, alors on a, pour les nilidéaux, $\phi_1(\mathfrak{a}) = \phi_0(\mathfrak{a})$.

Théorème 17: *Le radical $\mathfrak{n} = \phi_1(\mathfrak{a})$ d'un nilidéal est l'intersection $\phi_0(\mathfrak{a})$ des idéaux radicaux minimax appartenant à $\mathfrak{a}$. Le radical $\mathfrak{n} = Q$, de $\mathfrak{S}$, est $Q = \phi_1((0)) = \phi_0((0)) = \mathfrak{L}$.* On en déduit, compte tenu du théorème 13, le

Corollaire 6: *Le radical de $\mathfrak{S}/Q$ est égal à zéro.*

D'après le théorème 16, on peut formuler dans les termes suivantes la théorie du radical: la famille irradical, ou famille des anneaux pour lesqueles $\phi_1((0)) = (0)$, se compose des sommes sousdirectes de SN-anneaux, c'est à dire, se compose exactement des SN-anneaux. Il s'agit, comme l'on a déjà dit, d'une famille saturée et complète $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_0$, à laquelle appartiennent les idéaux de ses éléments. Le radical $Q = \phi_1((0))$ d'un anneau quelconque est donné par $\phi_1((0)) = \cap \mathfrak{x}_k$, où les $\mathfrak{x}_k$ sont tels que $\mathfrak{S}/\mathfrak{x}_k \in \mathfrak{F}_1$; et de façon analogue est défini $\phi_1(\mathfrak{a})$.

L'affirmation que le radical de $\mathfrak{S}/Q$ est (0) résulte directement de l'étude de l'homomorphisme $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/Q$, dans lequel on obtient une correspondance biunivoque et complète entre les SN-idéaux des deux anneaux.

Le fait que nous avons étudié d'abord le radical inférieur dans des termes analogues nous a permis d'identifice $\phi_1((0))$ avec $\mathfrak{L}$, ainsi que de prouver que le radical d'un nilidéal est toujours un nilidéal.

6) **La théorie de McCoy**—Les raisonnements faits sur les radicaux Q et $\mathfrak{L}$ sont analogues à ceux utilisé par McCoy d'une façon qu'on va rapidement analiser. On appele *radical d'un idéal* $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$, l'ensemble $\mathfrak{h}$, d'éléments de $\mathfrak{S}$, tel que, pour chaque $h \in \mathfrak{h}$, tout m-système, qui contient h, a des élements en $\mathfrak{a}$. Un m-système est défini comme un ensemble M d'élements de $\mathfrak{S}$ qui satisfait à la condition suivant: si $c, d \in M$, il existe $x \in \mathfrak{S}$ tel que $cxd \in M$. Alors les rélations entre m-systèmes et idéaux premiers sont analogues à celles entre p-systèmes et SN-idéaux, comme on a déjà fait remarque dans l'Introduction. Il y a un théorème analogue au théorème 17 du numéro antérieur. On a

$$\mathfrak{h} = \phi_2(\mathfrak{a}) = \cap \mathfrak{g}_\alpha, \quad (\mathfrak{g}_\alpha \supseteq \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}_\alpha = \text{idéal premier}),$$

où α parcourt la totalité des indices relatifs aux idéaux premiers qui contiennent $\mathfrak{a}$. Pour l'anneau $\mathfrak{S}$ lui-même, on écrit

$$N = \phi_2((o)) = \cap \mathfrak{p}_j, \quad (\mathfrak{p}_j = \text{idéal premier}),$$

où j parcout la totalité des indices relatives aux idéaux premiers.

Maintenant nous faisons la comparaison des radicaux $\phi_1(\mathfrak{a})$ et $\phi_2(\mathfrak{a})$. Dès que les idéaux premiers sont des SN-anneaux, on voit que

$$\mathfrak{n} = \cap \mathfrak{y}_\beta = \phi_1(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{h} = \cap \mathfrak{g}_\alpha = \phi_2(\mathfrak{a}).$$

Le théorème 7 du § 3 nous affirme que chaque $\mathfrak{y}_\beta$ est une intersection d'idéaux premiers; donc il montre, inversement, qu'on a $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{n}$. Ainsi, il en résulte la proposition suivante, en partie due à Levitzki [5]:

Théorème 18: *Les radicaux $\phi_2(\mathfrak{a})$ et $\phi_1(\mathfrak{a})$ sont égales. Si, en particulier, on a $\mathfrak{a} = (0)$, alors $\phi_0((0)) = \phi_1((0))$ réprésente le radical inférieur de l'anneau.*

Si l'on joint, avec Nagata [6], le préfixe «demi» à un anneau, pour signifier qu'il est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux avec une certaine propriété, indiquée d'ailleurs en ajoutant d'autre désignation, on peut dire:

THÉORÈME 19: *Le radical* $N=\phi_2((0))$ *est zéro, si et seulement si l'anneau en question est demi-premier.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] – A. ALMEIDA COSTA, *Anéis associativos não comutativos*, «Memórias e Estudos do Centro de Matemáticas Aplicadas ao Estudo de Energia Nuclear», n.º 3, Lisboa, 1955.

[2] – J. TIAGO DE OLIVEIRA, *Residuais de sistemas e radicais de anéis*, «Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa», 2.ª série, A – Ciências Matemáticas, vol. V, fasc. 2.º, 1956, pages 177-245.

[3] – NEAL H. MCCOY, *Prime ideals in general rings*, «American Journal of Mathematics», vol LXXI, 1949, pages 823-833.

[4] – R. BAER, *Radical ideals*, «American Journal of Mathematics», vol. LXV, 1943, pages 537-568.

[5] – J. LEVITZKI, *Prime ideals and the lower radical*, «American Journal of Mathematics», vol. LXXIII, 1951, pages 25-29.

[6] – M. NAGATA, *On the theory of radicals in a ring*, «Journal of the Mathematical Society of Japan», vol. 3, n.º 2, 1951, pages 330-344.