GEOMETRIA DIFERENCIAL

UMA INTRODUÇÃO FUNDAMENTAL

(Versão provisória da 3ª Edição)

Armando Machado

UNIVERSIDADE DE LISBOA
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática
2009

Classificação A.M.S. (1991): 53-01, 57-01
ISBN: 972-8394-08-X

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este texto teve a sua origem num curso de Geometria Diferencial dado pelo autor aos estudantes do terceiro ano das licenciaturas em Matemática e Ensino da Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa e desenvolve duas versões anteriores, a primeira publicada em 1985 na colecção Textos e Notas do CMAF e a segunda [14] editada conjuntamente em 1991 pela Editora Cosmos e pela Fundação da Universidade de Lisboa. Em quase todos os pontos o texto vai bastante mais longe do que tem sido possível estudar no curso e vários capítulos não foram sequer aflorados neste.

De um modo geral procurou-se realizar um texto ao mesmo tempo introdutório e fundamental que, mantendo-se a um nível tanto quanto possível elementar, constituísse uma exposição coerente e razoavelmente completa dos conceitos e técnicas mais frequentemente utilizados no estudo da geometria das variedades diferenciáveis. O carácter introdutório do texto não nos inibiu de apresentar demonstrações detalhadas de todos os resultados expostos, mesmo quando estas são tecnicamente mais sofisticadas. Procurou-se assim garantir que o conteúdo fosse tão auto-suficiente quanto possível de modo a que o trabalho pudesse também servir como texto de referência. Essa mesma preocupação levou-nos a incluir o tratamento de vários pontos que saiem do âmbito de Geometria Diferencial, entre os quais se incluem revisões de certos pontos de Álgebra Linear e das noções básicas do Cálculo Diferencial, em ambos os casos no quadro dos espaços vectoriais de dimensão finita e privilegiando os enunciados que não dependem da fixação de uma base, e o exame sistemático dos resultados sobre equações diferenciais ordinárias, que tivémos necessidade de utilizar, incluindo os resultados globais que envolvem a dependência das condições iniciais e de eventuais parâmetros. Pressupomos, de qualquer modo, que o leitor, para além de uma certa destreza matemática, possui conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Topologia Geral.

Ao longo da maior parte do trabalho as variedades são estudadas sob o ponto de vista concreto, isto é, uma variedade será um subconjunto de um espaço vectorial ambiente, de dimensão finita, e o espaço vectorial tangente em cada ponto aparece então como subespaço vectorial desse espaço vectorial ambiente. Este ponto de vista, seguido também, por exemplo, nos livros de Milnor [19] e de Guillemin e Pollack [10], permite trabalhar desde o início num quadro geométrico intuitivo em que se podem estudar rapidamente resultados interessantes e não triviais. A introdução precoce das variedades abstractas pode ter, na nossa opinião, um carácter desmotivador, ao atrasar o aparecimento dos resultados geométricos importantes, por implicar a construção prévia de um imponente edifício abstracto, constituído na maioria por definições e resultados triviais, embora essenciais. Se é de aceitação pacífica a importância pedagógica de estudar os rudimentos da teoria das variedades concretas antes da introdução das variedades abstractas, já não há unanimidade quanto ao momento em que esta última deve ser feita. Neste texto as variedades abstractas são estudadas apenas no último capítulo e organizamos o seu estudo de forma a tirar o maior partido possível dos resultados já estudados nos capítulos anteriores, incluindo aqueles com carácter global. Esse objectivo, assim como o desejo de diminuir o formalismo inicial, levou-nos a optar por definir a noção de variedade abstracta à custa duma classe de equivalência de cartas globais (com contradomínios, em geral, não abertos) em vez duma classe de equivalência de atlas constituídos por cartas locais, como é mais habitual. Esta opção teve naturalmente um preço a pagar, para podermos dispor da possibilidade de colar estruturas de variedade em subconjuntos abertos, e, em particular, de fazer a ponte com as variedades definidas por cartas locais, tivémos que estabelecer um resultado não elementar, que se pode considerar essencialmente o teorema do mergulho de Whitney, olhado pelo avesso.

Uma diferença, em relação ao conteúdo usual de livros com o âmbito deste, está na definição e utilização sistemática do conceito de fibrado vectorial, conceito que só costuma ser introduzido a um nível mais avançado. Naturalmente, em consonância com a opção de trabalhar no quadro das variedades concretas, também estudamos os fibrados vectoriais enquanto subfibrados vectoriais de um fibrado vectorial constante. Este estudo parece-nos ser justificado pela simplicidade e naturalidade do métodos utilizados e pela riqueza das suas aplicações. Para além, evidentemente, do fibrado vectorial tangente a uma variedade, teremos ocasião de utilizar, por exemplo, o fibrado osculador de uma curva, que ajuda a compreender o significado da torção, ou o fibrado vectorial normal de uma variedade, importante para a construção de vizinhaças tubulares, assim como os fibrados vectoriais obtidos como imagens recíprocas.

Passamos agora a apresentar algumas observações mais concretas sobre o conteúdo de cada capítulo.

O primeiro capítulo tem como objectivo a revisão de algumas propriedades básicas dos espaços vectoriais de dimensão finita, reais e complexos, e dos conceitos e resultados do Cálculo Diferencial que são usualmente estudados num curso de Análise Real. No que diz respeito à Álgebra Linear, o objectivo principal é o de fixar notações e relembrar enunciados que serão utilizados mais tarde; supomos naturalmente que o leitor está habituado a trabalhar com espaços vectoriais, aplicações lineares, matrizes, etc… Para além disso, serão referidos com um pouco mais de detalhe alguns pontos que o leitor porventura ainda não encontrou, como as relações entre espaços vectoriais reais e complexos, através da noção de estrutura complexa dum espaço vectorial real, os produtos internos de Hilbert-Schmidt nos espaços de aplicações lineares, a orientação de espaços vectoriais reais ou a possibilidade de representar uma aplicação linear por uma matriz de aplicações lineares, quando se está em presença de decomposições em soma directa do domínio e do codomínio. A exposição dos assuntos de Álgebra Linear acabou por resultar um pouco longa pelo que será porventura mais útil ao leitor saltá-la numa primeira leitura e voltar atrás quando tiver necessidade. No que diz respeito ao Cálculo Diferencial, a palavra *revisão* é aqui utilizada no sentido generalizado na medida em que pretendemos trabalhar, no quadro dos espaços vectoriais de dimensão finita, com enunciados que não dependam da fixação de um sistema de coordenadas (é o que se faz usualmente no quadro mais geral do Cálculo Diferencial em espaços normados de dimensão infinita — ver, por exemplo, os livros de Dieudonné [6] e Lang [13] ou o nosso trabalho [15]). Muitas demonstrações mais simples são omitidas, esperando-se que o leitor, que esteja habituado a trabalhar apenas no quadro dos espaços cartesianos $\mathbb{R}^n$, adapte facilmente as que conhece nesse contexto. A opção aqui tomada é essencial para se poder trabalhar naturalmente com os espaços de aplicações lineares e permite olhar de um modo unificado o que se passa no estudo das variedades, onde as derivadas das aplicações lineares estão definidas em espaços vectoriais tangentes que não possuem bases naturalmente fixadas. Supomos de qualquer modo, aqui como no resto do curso, que o leitor possui os conhecimentos elementares de Topologia Geral e de espaços vectoriais normados e que conhece, em particular, as propriedades especiais dos espaços vectoriais normados de dimensão finita (cf., por exemplo, [15]). Apesar de, como referimos, a revisão do Cálculo Diferencial se enquadrar no que é usualmente estudado no quadro da Análise Real, não deixamos de referir o conceito de diferenciabilidade no sentido complexo, no caso em que os espaços vectoriais em questão são complexos. Essa referência limita-se no entanto às generalizações triviais do que se passa no caso real e não abordamos as propriedades especiais que se estudam no quadro da Análise Complexa.

No segundo capítulo inicia-se o estudo das variedades num espaço vectorial ambiente de dimensão finita. Começa-se por introduzir as noções de cone tangente e cone tangente alargado de um subconjunto arbitrário em cada um dos seus pontos, a segunda das quais na base da definição de espaço vectorial tangente que utilizamos. Estas noções, embora muito antigas (foram introduzidas no livro de Bouligand [3]) não são utilizadas normalmente em textos da natureza deste, mas parecem-nos úteis, tanto pelo seu evidente conteúdo geométrico como por nos permitirem trabalhar por vezes com conjuntos que não sabemos *a priori* serem variedades. Estudamos em seguida a generalização da noção de aplicação de classe C^k ao caso em que o domínio não é obrigatoriamente um conjunto aberto, a partir da existência de prolongamentos locais de classe C^k, assim como as derivadas de tais aplicações, que vão ser aplicações lineares definidas nos espaços vectoriais tangentes. São estudados os teoremas de partição da unidade, que se aplicam em muitas situações para passar de resultados de natureza local para outros com carácter global e que são utilizados na prova de que toda a aplicação de classe C^k admite um prolongamento de classe C^k a um aberto contendo o domínio, e não só prolongamentos locais de classe C^k. Estes teoremas são também utilizados para estabelecer resultados de aproximação de funções contínuas por funções de classe C^∞. Definem-se então as variedades sem bordo, como sendo os subconjuntos que são localmente difeomorfos a abertos de espaços vectoriais de dimensão finita, e estudam-se, no quadro destas, algumas consequências importantes do teorema da função inversa, como os resultados que caracterizam localmente as imersões e as submersões, os que permitem construir as variedades como imagens recíprocas, mediante condições de transversalidade convenientes, e, em particular, os que estudam a intersecção de duas subvariedades. Para além dos resultados que permitem construir variedades como imagens recíprocas, é estabelecido também um resultado que permite identificar variedades associadas a imagens directas de aplicações suaves, resultado que é aplicado, em particular, na construção das variedades de Grassmann, encaradas como conjuntos de projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais. Generalizam-se em seguida as definições e alguns dos resultados estudados, de modo a englobar mais geralmente o caso das variedades com bordo e, eventualmente, com cantos. O capítulo termina com a demonstração do teorema de Sard, numa versão que não utiliza o conceito de medida, resultado que é essencial em várias aplicações geométricas e que é, em particular, utilizado na demonstração do teorema de Whitney, abordada no último capítulo.

O capítulo III constitui a parte central do curso. São introduzidos os fibrados vectoriais, como famílias de subespaços vectoriais de um certo espaço vectorial (as *fibras*) indexadas por um subconjunto de outro espaço vectorial (a *base*), famílias para as quais se deve verificar uma condição de suavidade conveniente. Essa condição de suavidade é apresentada através da exigência de existência de campos de referenciais locais e prova-se que, no caso em que o espaço vectorial ambiente das fibras está munido de um produto interno, ela é equivalente à suavidade da aplicação que a cada ponto da base associa a projecção ortogonal sobre a respectiva fibra. A derivada desta última aplicação permite-nos definir a segunda forma fundamental de um fibrado vectorial, que vai ser uma aplicação bilinear, definida no produto cartesiano do espaço vectorial tangente à base pela fibra e com valores no complementar ortogonal desta. Esta segunda forma fundamental, que caracteriza o modo como as fibras variam de ponto para ponto, é utilizada, por um lado, no estudo da geometria do espaço total do fibrado vectorial, aplicado, por exemplo, na construção de vizinhanças tubulares, e, por outro lado, na abordagem da teoria clássica das curvas e das hipersuperfícies num espaço euclidiano, abordagem que inclui o exame da curvatura e da torção das primeiras e, no contexto das segundas, o estudo da aplicação linear de Weingarten (operador de forma, na terminologia de O'Neill [22]), tal como o das curvaturas e direcções principais e o dos pontos focais. É também no quadro mais geral dos fibrados vectoriais que é estudada a questão da orientabilidade das variedades. Em relação estreita com o estudo da segunda forma fundamental, aparece-nos a noção de derivada covariante de uma secção de um fibrado vectorial com as fibras contidas num espaço euclidiano, derivada essa que é introduzida como uma modificação conveniente da derivada usual, de modo a obter valores na fibra correspondente. As secções paralelas, isto é, aquelas cuja derivada covariante é identicamente nula, são apresentadas como a generalização natural das secções constantes. É definido o tensor de curvatura de Riemann, cuja não nulidade é uma obstrução à existência de secções paralelas de um fibrado vectorial, e é estabelecida a fórmula de Gauss, que relaciona este tensor de curvatura com a segunda forma fundamental. Prova-se a propriedade fundamental de invariância por isometria do tensor de curvatura do fibrado tangente duma variedade, resultado que é aplicado na demonstração do Teorema

Egrégio de Gauss. São abordados os morfismos entre fibrados vectoriais e as respectivas derivadas covariantes e, como aplicação, é feito um estudo elementar das estruturas quase complexas numa variedade e das variedades holomorfas.

O capítulo IV, na sua maior parte de natureza mais analítica do que geométrica, justifica-se pela importância das suas aplicações à Geometria. Trata-se de estabelecer os resultados fundamentais sobre as soluções de uma equação diferencial ordinária com condições iniciais dadas. Inspirando-nos nos métodos utilizados no livro de Pontriaguine [23], obtemos resultados globais sobre o modo como as soluções dependem da variável independente, das condições iniciais e de eventuais parâmetros. As equações diferenciais paramétricas são aplicadas, em particular, para demonstrar, pelo método utilizado no livro de Dieudonné [6], o teorema de Frobenius sobre as soluções de equações diferenciais totais, equações diferenciais em que a variável independente real é substituída por uma variável multidimensional. Este último teorema é utilizado para obter a chamada versão geométrica do teorema de Frobenius, sobre as variedades integrais de um subfibrado vectorial do fibrado tangente, neste capítulo apenas no seu aspecto local.

No quinto capítulo examinamos algumas aplicações geométricas das equações diferenciais ordinárias, estudadas no capítulo precedente. O transporte paralelo, no quadro dos fibrados vectoriais cuja base é um intervalo de $\mathbb{R}$, aparece como um corolário da teoria das equações diferenciais lineares, sendo aplicado para mostrar que, quando a base dum fibrado vectorial é uma variedade conexa, não pode existir mais que uma secção paralela com um valor dado numa das fibras. A existência local de uma tal secção, no caso em que o tensor de curvatura é identicamente nulo, aparece como uma consequência do teorema de Frobenius. As geodésicas duma variedade contida num espaço euclidiano são apresentadas do ponto de vista das trajectórias de velocidade paralela, o que conduz ao seu estudo no quadro duma equação diferencial sobre o espaço total do fibrado vectorial tangente à variedade. Os resultados estudados sobre a dependência das soluções das equações diferenciais em relação aos valores iniciais são então aplicados ao estudo das propriedades da aplicação exponencial.

No último capítulo abordamos finalmente o estudo das variedades abstractas, procurando, sempre que possível, tirar partido do que foi estudado nos capítulos anteriores. Começamos por examinar uma noção um pouco mais geral que a de variedade abstracta, a de estrutura diferenciável, definida como uma classe de equivalência de cartas globais cujos contradomínios são subconjuntos arbitrários de espaços vectoriais de dimensão finita. Esta noção é uma versão simplificada da que foi introduzida por Aronszajn [1], sob o nome de "espaço subcartesiano", e desenvolvida posteriormente por Marshall [17]; ela abarca ao mesmo tempo as variedades, eventualmente com bordo, e os subconjuntos arbitrários de espaços vectoriais de dimensão finita. As noções e resultados básicos, envolvendo as aplicações suaves e os difeomorfismos, são estudados no quadro geral das estruturas diferenciáveis e as variedades são definidas em seguida como estruturas diferenciáveis localmente difeomorfas a abertos de $\mathbb{R}^n$, ou de sectores de $\mathbb{R}^n$, ou, equivalentemente, como estruturas diferenciáveis cujas cartas têm como contradomínio variedades concretas. Seguindo a via de Guillemin e

Pollack [10], o teorema de Sard é utilizado para demonstrar a versão do teorema de Whitney que garante que, para uma variedade de dimensão n, existe sempre uma carta global para um subconjunto de um espaço vectorial de dimensão $2n+1$. Seguidamente, utilizando uma ideia atribuida a Spanier e baseando-nos num lema topológico que encontrámos no livro de Greub Halperin e Vanstone [9], demonstramos o teorema de existência e unicidade da colagem de estruturas de variedade dadas sobre os subconjuntos de uma cobertura aberta e verificando uma condição natural de compatibilidade, teorema esse que pode ser considerado como o teorema do mergulho de Whitney examinado de outro ponto de vista. O resultado que acabamos de referir é utilizado para referir o modo de fazer a ponte com a definição mais usual de variedade, através de atlas constituídos por cartas locais. Ele é também utilizado, mais adiante, no estudo das variedades quociente e no exame da versão global da forma geométrica do teorema de Frobenius.

Uma noção que costuma ser introduzida desde cedo na teoria das variedades abstractas, e à qual nós damos uma importância claramente inferior no nosso texto é a de espaço vectorial tangente a uma variedade abstracta num dos seus pontos e o correspondente conceito global de fibrado tangente. Do nosso ponto de vista, a importância que esta noção apresenta nas exposições usuais está ligada principalmente à necessidade de trabalhar globalmente numa estrutura que foi definida por cartas locais. A partir do momento em que se optou por definir as estruturas diferenciáveis através de cartas globais, todas os contextos em que os vectores tangentes às variedades abstractas são utilizados podem ser adaptados de modo a utilizar os vectores tangentes ao contradomínio de uma carta global. É este o ponto de vista que seguimos quando definimos as imersões e as submersões entre variedades abstractas sem passar pela derivada como aplicação linear entre os espaços vectoriais tangentes abstractos, e, em particular, quando tratamos o problema das variedades quociente e quando nos limitamos a examinar a versão geométrica global do teorema de Frobenius no contexto dos subfibrados vectoriais do fibrado vectorial tangente de uma variedade concreta. Neste último caso, apesar de as folhas associadas serem variedades abstractas, os respectivos espaços tangentes são definidos como subespaços vectoriais do espaço vectorial tangente à variedade concreta (caso particular da situação mais geral em que definimos os espaços tangentes a uma aplicação suave, cujo domínio é uma variedade abstracta e cujo codomínio é uma variedade concreta, como subespaços vectoriais dos espaços vectoriais tangentes a esta última). Para além das adaptações que acabamos de referir, o tratamento que apresentamos das subvariedades imersas e do teorema de Frobenius inspirou-se fortemente no que se encontra no livro de Warner [26].

Apesar de não atribuirmos aos vectores tangentes a uma variedade abstracta o mesmo relevo que estes têm usualmente, não deixamos de nos referir a eles, na última secção do livro, uma vez que é importante que o leitor esteja alertado para o papel que desempenham na literatura. Há vários métodos diferentes para definir os espaços vectoriais tangentes no quadro das variedades abstractas, cada um com as suas vantagens e desvantagens: Para alguns autores os vectores tangentes num ponto aparecem como classes de equivalência de caminhos passando por esse ponto, para outros como operadores diferenciais, para outros ainda como classes de equivalência de pares constituídos por uma carta para um aberto de $\mathbb{R}^n$ e um vector de $\mathbb{R}^n$. Cada um desses métodos tem as suas vantagens e desvantagens, entre estas últimas o facto de aparecerem amiúde isomorfismos canónicos, nem sempre triviais, onde esperaríamos ter igualdades. À partida, em vez de tomarmos partido por um desses métodos, preferimos definir quando é que um espaço vectorial pode ser considerado como espaço tangente, deixando assim um grau de liberdade ao utilizador que poderá, em cada caso, fazer a escolha que se revele mais cómoda e, nalgumas situações, subordinar a escolha de um espaço vectorial tangente a outras feitas anteriormente, de modo a conseguir que certos isomorfismos sejam efectivamente igualdades. Examinamos em seguida, uma das concretizações da noção de espaço vectorial tangente mais utilizada, aquela para a qual os vectores tangentes são definidos como operadores diferenciais.

No fim de cada capítulo é apresentada uma lista de exercícios, nalguns casos destinados a testar a compreensão do texto, noutros apresentando resultados que complementam os estudados antes.

Na bibliografia, apresentada no fim do volume, encontram-se, além dos trabalhos citados no texto, outros livros em que o leitor interessado poderá aprofundar, ou estudar doutro ponto de vista, os assuntos que foram aqui abordados. De entre eles recomendamos especialmente os dois volumes do livro de Spivak [25], o livro de Gray [8], este último com ênfase no estudo, com a ajuda do computador, das curvas e superfícies em $\mathbb{R}^3$ e repleto de figuras elucidativas, assim como os livros de Manfredo do Carmo [4,5].

Gostaríamos de terminar com uma palavra de agradecimento a todos aqueles que contribuíram para melhorar a versão final do texto. A estudante Élia Ferreira coligiu pacientemente dezenas de erros de dactilografia que figuravam numa versão preliminar posta à disposição dos alunos. Os colegas Cecília Ferreira e Luís Trabucho leram cuidadosamente partes do manuscrito e, para além da localização de outros erros de dactilografia, contribuíram com as suas observações para a melhoria de vários pontos da exposição. Apraz-nos também registar o empenho generoso e competente que este último tem dedicado à edição da colecção em que este trabalho se insere, contribuíndo assim, de modo decisivo, para a qualidade desta.

CAPÍTULO I
Revisão de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial

§1. Algumas propriedades dos espaços vectoriais de dimensão finita.

I.1.1 No que se segue todos os espaços vectoriais serão reais ou complexos e, quando não nos referirmos ao corpo dos escalares, estará subentendido que este é o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. É claro que todo o espaço vectorial complexo é, de modo trivial, também um espaço vectorial real (se está definido o produto de um complexo por um vector, está também definido, em particular, o produto de um número real por um vector). Se um espaço vectorial complexo E admite uma base, finita ou infinita, $(x_j)_{j\in J}$, é imediato constatar-se que E, enquanto espaço vectorial real, admite uma base formada pelos vectores x_j e ix_j; em particular, se E, enquanto espaço vectorial complexo, tiver dimensão finita n, então E, enquanto espaço vectorial real, tem dimensão $2n$. Quando estivermos numa situação em que o corpo dos escalares pode ser indistintamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, usaremos frequentemente o símbolo $\mathbb{K}$ para designar esse corpo dos escalares.

I.1.2 O que dissémos atrás pode ser precisado: Se E é um espaço vectorial complexo e $(x_j)_{j\in J}$ é uma família de vectores de E, então ela é linearmente independente (respectivamente é geradora) se, e só se, a família formada pelos vectores x_j e ix_j é linearmente independente (respectivamente geradora) para a estrutura de espaço vectorial real de E.

I.1.3 Se E e F são espaços vectoriais, reais ou complexos, vamos notar $L(E;F)$ o espaço vectorial, real ou complexo respectivamente, cujos elementos são as aplicações lineares $\xi: E \to F$. No caso em que E e F têm dimensões finitas m e n, $L(E;F)$ tem dimensão finita mn. Mais precisamente, se $x_1, \ldots, x_m$ é uma base de E e $y_1, \ldots, y_n$ é uma base de F, $L(E;F)$ vai admitir uma base formada pelas aplicações lineares $\xi_{k,j}$, com $1 \le j \le m$ e $1 \le k \le n$, onde $\xi_{k,j}$ está definida pela condição de aplicar x_j em y_k e os restantes vectores da base de E em 0 (lembrar que uma aplicação linear fica univocamente determinada se dermos de modo arbitrário as imagens dos vectores de uma base). De facto, se $\xi \in L(E;F)$, tem-se $\xi = \sum\limits_{k,j} a_{k,j}\, \xi_{k,j}$, onde as componentes $a_{k,j}$ estão definidas pela condição de se ter $\xi(x_j) = \sum\limits_{k} a_{k,j}\, y_k$ (ambos os membros são aplicações lineares que dão o mesmo resultado quando aplicados a cada um dos vectores da base), por outras palavras, cada $a_{k,j}$ é o elemento da linha k e da coluna j da matriz de ξ nas bases consideradas.

Note-se que, no caso em que E é um espaço vectorial real e F é um espaço vectorial complexo, $L(E;F)$ designa naturalmente o espaço das aplicações lineares de E para F, quando se considera F como espaço vectorial real, mas $L(E;F)$ tem uma estrutura natural de espaço vectorial complexo, subespaço do espaço vectorial complexo de todas as aplicações de E para F. As observações anteriores sobre bases e dimensões estendem-se a este caso; em particular, no caso em que E tem dimensão m e F, enquanto espaço vectorial complexo, tem dimensão n, $L(E;F)$, enquanto espaço vectorial complexo, tem dimensão mn.

No caso em que E e F são espaços vectoriais complexos, eles podem ser também considerados como espaços vectoriais reais mas o significado a dar a $L(E;F)$ não é o mesmo nos dois casos. Por esse motivo, e para evitar confusões, usa-se por vezes as notações $L_{\mathbb{C}}(E;F)$ e $L_{\mathbb{R}}(E;F)$ para os espaços de aplicações lineares, relativamente às estruturas complexas e reais, respectivamente (costumamos referir os elementos destes espaços como *aplicações lineares complexas* e *aplicações lineares reais*, respectivamente). Repare-se que $L_{\mathbb{C}}(E;F)$ é um subespaço vectorial complexo de $L_{\mathbb{R}}(E;F)$.

I.1.4 Mais geralmente, dados espaços vectoriais, reais ou complexos, $E_1,\dots,E_p$ e F, notamos $L(E_1,\dots,E_p;F)$ o espaço vectorial, real ou complexo respectivamente, cujos elementos são as aplicações *multilineares* $\xi\colon E_1\times\cdots\times E_p\to F$, isto é, as aplicações que, quando se fixam $p-1$ das variáveis, são lineares como função da restante. No caso particular em que os espaços $E_1,\dots,E_p$ são todos iguais a um mesmo espaço E, usamos também a notação $L^p(E;F)$, em vez de $L(E_1,\dots,E_p;F)$. É por vezes cómodo admitir o caso particular em que $p=0$, caso em que consideramos $L^0(E;F)=L(\,;F)$ como sinónimo de F.[1] Como anteriormente, no caso em que os espaços vectoriais E_j são reais e F é um espaço vectorial complexo, $L(E_1,\dots,E_p;F)$ tem uma estrutura de espaço vectorial complexo e, quando todos os espaços vectoriais são complexos e queremos distinguir a situação em que os consideramos como tal daquela em que olhamos para eles como espaços vectoriais reais, usamos o índice $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ para indicar o contexto em que nos colocamos, obtendo-se assim um subespaço vectorial complexo $L_{\mathbb{C}}(E_1,\dots,E_p;F)$ de $L_{\mathbb{R}}(E_1,\dots,E_p;F)$.

I.1.5 Notemos $\mathbb{K}$ um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Tem então lugar um isomorfismo

[1] Trata-se de uma convenção que poderia ser facilmente prevista por quem possua um razoável treino lógico: E^0 é um conjunto com um único elemento $*$ (a única aplicação cujo domínio é o conjunto vazio) e todas as aplicações de E^0 em F são multilineares, pelo que tudo o que temos que fazer é identificar cada uma dessas aplicações de E^0 em F com a imagem de $*$ por essa aplicação.

$$\Upsilon: L(\mathbb{K}; F) \to F,$$

definido por $\Upsilon(\xi) = \xi(1)$; o isomorfismo inverso associa a cada $y \in F$ a aplicação linear de $\mathbb{K}$ em F definida por $a \mapsto a\,y$. Mais geralmente, para cada $p \geq 0$, vai ter lugar um isomorfismo

$$\Upsilon: L^p(\mathbb{K}; F) \to F,$$

definido por

$$\Upsilon(\xi) = \xi(1, \ldots, 1),$$

e o isomorfismo inverso $\Upsilon^{-1}: F \to L^p(\mathbb{K}; F)$ associa a cada $y \in F$ a aplicação multilinear de $\mathbb{K}^p$ em F definida por

$$\Upsilon^{-1}(y)(a_1, \ldots, a_p) = a_1 \cdots a_p\, y.$$

É claro que, no caso em que $p = 0$, o isomorfismo Υ não é mais do que a aplicação identidade.

I.1.6 Sejam E, E' e F espaços vectoriais, reais ou complexos e $\xi: E \times E' \to F$ uma aplicação bilinear. Para cada $x \in E$, tem então lugar uma aplicação linear $\widehat{\xi}(x): E' \to F$, definida por $\widehat{\xi}(x)(x') = \xi(x, x')$. A aplicação $\widehat{\xi}: E \to L(E'; F)$, assim definida, é linear e podemos então considerar uma aplicação linear

$$\Upsilon_1: L(E, E'; F) \to L(E; L(E'; F)),$$

definida por $\Upsilon_1(\xi) = \widehat{\xi}$, aplicação linear essa que se constata imediatamente ser mesmo um isomorfismo.
Mais geralmente, dados os espaços vectoriais, reais ou complexos, $E_1, \ldots, E_p$ e F, vai ter lugar, para cada $0 \leq j \leq p$, um isomorfismo

$$\Upsilon_j: L(E_1, \ldots, E_p; F) \to L(E_1, \ldots, E_j; L(E_{j+1}, \ldots, E_p; F)),$$

definido por

$$\Upsilon_j(\xi)(x_1, \ldots, x_j)(x_{j+1}, \ldots, x_p) = \xi(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_p).$$

I.1.7 Usando os isomorfismos Υ_j, atrás definidos, verifica-se imediatamente que, se os espaços vectoriais $E_1, \ldots, E_p$ têm dimensões finitas $m_1, \ldots, m_p$ e se o espaço vectorial F tem dimensão finita n, então $L(E_1, \ldots, E_p; F)$ tem dimensão finita $m_1 \times \cdots \times m_p \times n$.

I.1.8 Se E é um espaço vectorial de dimensão finita, então existe em E pelo menos uma norma e duas normas quaisquer são equivalentes, em particular definem a mesma topologia e têm os mesmos conjuntos limitados. Quando considerarmos E como espaço topológico estará subentendido que estamos a considerar a topologia associada a qualquer das suas normas. Um conjunto

$A \subset E$ é compacto se, e só se, é fechado e limitado. O espaço E, com qualquer das suas normas, é completo e, em consequência, qualquer subespaço vectorial de E é fechado.

I.1.9 Se E e F são espaços vectoriais de dimensão finita, reais ou complexos, toda a aplicação linear $\xi: E \to F$ é contínua; por outras palavras, se considerarmos normas em E e F, existe $M \geq 0$ tal que, para cada $x \in E$, $\|\xi(x)\| \leq M\|x\|$. Ao menor dos números $M \geq 0$ nestas condições dá-se o nome de *norma* de ξ, notada $\|\xi\|$. Fica assim definida uma norma no espaço vectorial $L(E; F)$.

I.1.10 Mais geralmente, se $E_1, \ldots, E_p$ e F são espaços vectoriais de dimensão finita, reais ou complexos, toda a aplicação multilinear $\xi: E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ é contínua, ou seja, se considerarmos normas nestes espaços vectoriais, existe $M \geq 0$ tal que, quaisquer que sejam $x_1 \in E_1, \ldots, x_p \in E_p$, se tenha

$$\|\xi(x_1, \ldots, x_p)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_p\|.$$

Ao menor dos números $M \geq 0$ nestas condições dá-se o nome de *norma* de ξ, notada $\|\xi\|$. Fica assim definida uma norma no espaço vectorial $L(E_1, \ldots, E_p; F)$.

I.1.11 Se $F_1, \ldots, F_p$ são espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensões finitas $m_1, \ldots, m_p$, então o produto cartesiano $F_1 \times \cdots \times F_p$ tem dimensão finita $m_1 + \cdots + m_p$ e, se considerarmos uma norma em cada um daqueles espaços, uma das normas possíveis no produto cartesiano é a *norma do máximo*, definida por

$$\|(x_1, \ldots, x_p)\| = \max_{1 \leq j \leq p} \|x_j\|.$$

I.1.12 Suponhamos que, para cada $1 \leq j \leq p$, $\lambda_j: E'_j \to E_j$ é uma aplicação linear e que $\mu: F \to F'$ é uma aplicação linear. Tem então lugar uma aplicação linear

$$L(\lambda_1, \ldots, \lambda_p; \mu): L(E_1, \ldots, E_p; F) \to L(E'_1, \ldots, E'_p; F')$$

definida por

$$L(\lambda_1, \ldots, \lambda_p; \mu)(\xi) = \mu \circ \xi \circ (\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_p)$$

ou seja,

$$L(\lambda_1, \ldots, \lambda_p; \mu)(\xi)(x_1, \ldots, x_p) = \mu(\xi(\lambda_1(x_1), \ldots, \lambda_p(x_p))).$$

No caso particular em que todos os $\lambda_j: E'_j \to E_j$ são iguais a uma certa aplicação linear $\lambda: E' \to E$, usamos também a notação

$$L^p(\lambda;\mu)\colon L^p(E;F) \to L^p(E';F')$$

em vez de $L(\lambda_1,\dots,\lambda_p;\mu)$.
Repare-se que, quando $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ e μ são isomorfismos, $L(\lambda_1,\dots,\lambda_p;\mu)$ é também isomorfismo, tendo $L(\lambda_1^{-1},\dots,\lambda_p^{-1};\mu^{-1})$ como isomorfismo inverso.

De certo modo em sentido inverso ao que percorremos atrás, vamos agora examinar o mínimo que é necessário acrescentar a um espaço vectorial real para determinarmos um espaço vectorial complexo.

I.1.13 Se E é um espaço vectorial real, chamaremos *estrutura complexa* de E a uma aplicação linear $J\colon E \to E$ tal que $J \circ J = -Id_E$.
Se E é um espaço vectorial complexo, tem lugar uma estrutura complexa $J\colon E \to E$, definida por $J(u) = iu$, a que daremos o nome de *estrutura complexa associada* ao espaço vectorial complexo.

I.1.14 Sejam E um espaço vectorial real e $J\colon E \to E$ uma estrutura complexa de E. Existe então sobre E uma, e uma só, estrutura de espaço vectorial complexo, estendendo a estrutura de espaço vectorial real e cuja estrutura complexa associada seja J.
Dem: A unicidade é clara, uma vez que, se $u \in E$ e $c \in \mathbb{C}$, com $c = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, não pode deixar de ser $cu = au + bJ(u)$. Para provarmos a existência, definamos a multiplicação de um escalar complexo por um vector de E pela fórmula anterior e comecemos por reparar que, no caso em que o complexo é real a multiplicação coincide com a multiplicação dada e que, no caso em que o complexo é $i = 0 + 1\,i$, vem efectivamente $iu = J(u)$. Resta-nos mostrar que E fica efectivamente um espaço vectorial complexo, a única propriedade não trivial a demonstrar sendo a identidade $c(c'u) = (cc')u$. Ora, sendo $c = a + bi$ e $c' = a' + b'i$, com $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, vem

$$\begin{aligned} c(c'u) &= c(a'u + b'J(u)) = a(a'u + b'J(u)) + bJ(a'u + b'J(u)) = \\ &= aa'u + ab'J(u) + ba'J(u) + bb'J(J(u)) = \\ &= (aa' - bb')u + (ab' + ba')J(u) = (cc')u, \end{aligned}$$

uma vez que $cc' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$. □

I.1.15 Em particular, se E é um espaço vectorial real de dimensão finita n, a existência de uma estrutura complexa $J\colon E \to E$ implica que n é par. Com efeito, se p é a dimensão de E, enquanto espaço vectorial complexo, então tem-se $n = 2p$. Repare-se que, reciprocamente, se E é um espaço vectorial real com dimensão par $n = 2p$, então E admite uma estrutura complexa; basta, com efeito, notar $u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_p$ uma base de E e definir $J\colon E \to E$ como sendo a aplicação linear que verifica $J(u_j) = v_j$ e $J(v_j) = -u_j$.

I.1.16 Se E é um espaço vectorial complexo, com estrutura complexa J, podemos considerar um novo espaço vectorial complexo, com o mesmo espaço vectorial real associado, a saber o definido pela estrutura complexa $-J$. A este novo espaço vectorial complexo, que será notado $\overline{E}$, dá-se o nome de *espaço vectorial conjugado* do primeiro. Dados $u \in E$ e $c \in \mathbb{C}$, o produto de c por u, para a estrutura de espaço vectorial complexo conjugado vai coincidir com o produto $\overline{c}u$, relativamente à estrutura original, do complexo conjugado $\overline{c}$ por u.

I.1.17 Sejam E e F espaços vectoriais complexos, com estruturas complexas J e J'. Se $\lambda: E \to F$ é uma aplicação linear real, então λ é uma aplicação linear complexa se, e só se, se tem $J' \circ \lambda = \lambda \circ J$.
Dem: Se λ é uma aplicação linear complexa, então

$$J'(\lambda(u)) = i\lambda(u) = \lambda(iu) = \lambda(J(u)),$$

o que mostra que $J' \circ \lambda = \lambda \circ J$. Reciprocamente, se $J' \circ \lambda = \lambda \circ J$, tem-se, para cada $u \in E$ e $c \in \mathbb{C}$, com $c = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(cu) = \lambda(au + bJ(u)) = a\lambda(u) + b\lambda(J(u)) = a\lambda(u) + bJ'(\lambda(u)) = c\lambda(u),$$

o que mostra que λ é uma aplicação linear complexa. □

I.1.18 Se E e F são espaços vectoriais complexos, uma *aplicação antilinear* $\lambda: E \to F$ é uma aplicação linear real que verifica a condição $\lambda(cu) = \overline{c}\lambda(u)$, para cada $c \in \mathbb{C}$ e $u \in E$. Por outras palavras, uma aplicação linear real $\lambda: E \to F$ é antilinear se, e só se, é uma aplicação linear complexa de $\overline{E}$ para F (ou, equivalentemente, de E para $\overline{F}$), o que acontece se, e só se, $J' \circ \lambda = -\lambda \circ J$.

Examinemos agora o modo como as noções usuais de traço e de determinante de uma matriz quadrada podem ser apresentadas no quadro das aplicações lineares de um espaço vectorial de dimensão finita para si mesmo.

I.1.19 Lembremos as seguintes propriedades bem conhecidas do traço e do determinante das matrizes quadradas:
a) Se A e B são matrizes dos tipos $m \times n$ e $n \times m$, respectivamente, então

$$\mathrm{Tr}(A \times B) = \mathrm{Tr}(B \times A)$$

(sendo $a_{i,j}$ e $b_{j,i}$ os elementos das matrizes A e B, ambos os membros são iguais a $\sum\limits_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} a_{i,j} \times b_{j,i}$).
b) Se A e B são matrizes quadradas, então

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$

I.1.20 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n, real ou complexo, e $\lambda: E \to E$ uma aplicação linear. Ficam então bem definidos dois escalares $\mathrm{Tr}(\lambda)$ e $\det(\lambda)$, o *traço* e o *determinante* de λ, pela condição de, para cada base $x_1, \ldots, x_m$ de E, com $\lambda(x_j) = \sum\limits_i a_{i,j}\, x_i$, se ter $\mathrm{Tr}(\lambda) = \mathrm{Tr}((a_{i,j}))$ e $\det(\lambda) = \det((a_{i,j}))$. Por outras palavras, o traço e o determinante de λ são os da sua matriz numa base arbitrária de E.[2]

Dem: Tudo o que temos que ver é que, se $y_1, \ldots, y_n$ é outra base de E, com $\lambda(y_j) = \sum\limits_i b_{i,j}\, y_i$, tem-se $\det((a_{i,j})) = \det((b_{i,j}))$ e $\mathrm{Tr}((a_{i,j})) = \mathrm{Tr}((b_{i,j}))$. Ora, sendo $x_j = \sum\limits_k c_{k,j}\, y_k$ e notando A, B e C as matrizes de elementos $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ e $c_{k,j}$, respectivamente, a última das quais é invertível, em particular tem determinante não nulo, podemos escrever

$$\lambda(x_j) = \sum_k c_{k,j}\, \lambda(y_k) = \sum_{k,i} c_{k,j}\, b_{i,k}\, y_i$$
$$\lambda(x_j) = \sum_k a_{k,j}\, x_k = \sum_{k,i} a_{k,j}\, c_{i,k}\, y_i,$$

donde $B \times C = C \times A$, o que implica que

$$\det(B) \times \det(C) = \det(C) \times \det(A),$$

portanto $\det(A) = \det(B)$, e que $B = C \times A \times C^{-1}$, portanto

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(C \times (A \times C^{-1})) = \mathrm{Tr}((A \times C^{-1}) \times C) = \mathrm{Tr}(A). \qquad \square$$

I.1.21 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensões m e n sobre $\mathbb{K}$. Tem-se então:

a) A aplicação $\mathrm{Tr}: L(E;E) \to \mathbb{K}$ é linear.

b) Se $\lambda: E \to F$ e $\mu: F \to E$ são aplicações lineares, então $\mathrm{Tr}(\mu \circ \lambda) = \mathrm{Tr}(\lambda \circ \mu)$.

Dem: Trata-se de uma consequência directa das correspondentes propriedades do traço das matrizes. $\square$

I.1.22 Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$. Tem-se então:

a) A aplicação $\det: L(E;E) \to \mathbb{K}$ é homogénea de grau n, isto é, para cada $\lambda \in L(E;E)$ e $a \in \mathbb{K}$, tem-se $\det(a\lambda) = a^n \det(\lambda)$.

b) Para a aplicação identidade $Id_E: E \to E$, tem-se $\det(Id_E) = 1$.

c) Se $\lambda, \mu \in L(E;E)$, então $\det(\mu \circ \lambda) = \det(\mu) \times \det(\lambda)$.

d) Uma aplicação linear $\lambda \in L(E;E)$ é um isomorfismo se, e só se, $\det(\lambda) \neq 0$ e, nesse caso, $\det(\lambda^{-1}) = 1/\det(\lambda)$.

e) Se $\xi: E \to F$ é um isomorfismo e $\lambda \in L(E;E)$, tem-se, para o correspondente $\xi \circ \lambda \circ \xi^{-1} \in L(F;F)$, $\det(\xi \circ \lambda \circ \xi^{-1}) = \det(\lambda)$.

---

[2] Repare-se que, se E e F são espaços vectoriais distintos, com a mesma dimensão, não definimos nem o traço nem o determinante de uma aplicação linear $\lambda: E \to F$.

Dem: As propriedades a), b) e c) são consequências directas das correspondentes propriedades do determinante das matrizes, tal como o é d), se lembrarmos que uma aplicação linear é um isomorfismo se, e só se, a sua matriz é invertível e que, de $\lambda \circ \lambda^{-1} = Id_E$ resulta que $\det(\lambda)\det(\lambda^{-1}) = 1$. A alínea e) resulta de que, fixada uma base $x_1, \ldots, x_n$ em E, a matriz de λ nessa base coincide com a matriz de $\xi \circ \lambda \circ \xi^{-1}$ na base $\xi(x_1), \ldots, \xi(x_n)$ de F. □

Se E é um espaço vectorial complexo de dimensão n e $\lambda\colon E \to E$ é uma aplicação linear, sabemos que podemos também olhar para E como um espaço vectorial real de dimensão $2n$, mas, em geral, o traço e o determinante de λ não serão os mesmos dos dois pontos de vista (no primeiro caso eles são números complexos e, no segundo, são números reais). O resultado seguinte explica a relação entre as duas situações.

I.1.23 Sejam E um espaço vectorial complexo de dimensão n e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear e usemos as notações $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\lambda)$, $\det_{\mathbb{C}}(\lambda)$ e $\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(\lambda)$, $\det_{\mathbb{R}}(\lambda)$ para indicar se estamos a considerar o traço e o determinante no quadro dos espaços vectoriais complexos ou no dos espaços vectoriais reais. Tem-se então:

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(\lambda) = 2\Re(\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\lambda)), \quad \det_{\mathbb{R}}(\lambda) = |\det_{\mathbb{C}}(\lambda)|^2.$$

Dem: Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma base de E, enquanto espaço vectorial complexo e seja C, com elementos $c_{j,k}$, a matriz de λ nesta base, portanto a definida por $\lambda(x_k) = \sum\limits_j c_{j,k}\, x_j$. Podemos escrever $c_{j,k} = a_{j,k} + ib_{j,k}$, com $a_{j,k}, b_{j,k} \in \mathbb{R}$, e então, considerando a base $x_1, \ldots, x_n, ix_1, \ldots, ix_n$ de E, enquanto espaço vectorial real, podemos escrever, lembrando que $\lambda(ix_k) = i\lambda(x_k)$,

$$\begin{cases} \lambda(x_k) = \sum\limits_j a_{j,k}\, x_j + \sum\limits_j b_{j,k}\, ix_j \\ \lambda(ix_k) = -\sum\limits_j b_{j,k}\, x_k + \sum\limits_j a_{j,k}\, ix_j \end{cases}$$

de onde deduzimos que

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(\lambda) = \sum_k a_{k,k} + \sum_k a_{k,k} = 2\sum_k \Re(c_{k,k}) = 2\Re(\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\lambda))$$

e que a matriz C', de tipo $2n \times 2n$, da aplicação linear λ na base real considerada pode ser apresentada por blocos do tipo $n \times n$ na forma

$$C' = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante de C' utilizamos um artifício que encontrámos em [21]. Para isso reparamos que, sendo X a matriz de tipo $2n \times 2n$ com divisão em blocos do tipo $n \times n$

$$X = \begin{bmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{bmatrix},$$

onde I_n nota a matriz identidade do tipo $n \times n$, cuja matriz conjugada é

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{bmatrix},$$

tem-se

$$X \times C' \times \overline{X} = 2 \times \begin{bmatrix} A - iB & 0 \\ 0 & A + iB \end{bmatrix}.$$

Substituindo A por I_n e B por 0 (ou seja, considerando o caso $\lambda = Id_E$), vem também

$$X \times I_{2n} \times \overline{X} = 2 \times I_{2n},$$

e daqui deduzimos que

$$\begin{aligned} \det(X) \times \det(C') \times \det(\overline{X}) &= 2^{2n} \det\left(\begin{bmatrix} A - iB & 0 \\ 0 & A + iB \end{bmatrix}\right) \\ \det(X) \times \det(I_{2n}) \times \det(\overline{X}) &= 2^{2n} \det(I_{2n}), \end{aligned}$$

ou seja, $\det(X) \times \det(\overline{X}) = 2^{2n}$, donde

$$\begin{aligned} \det(C') = \det\left(\begin{bmatrix} A - iB & 0 \\ 0 & A + iB \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} \overline{C} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\right) = \\ = \det(\overline{C}) \times \det(C) &= |\det(C)|^2, \end{aligned}$$

ou seja, $\det(\lambda_{\mathbb{R}}) = |\det(\lambda_{\mathbb{C}})|^2$. □

§2. Espaços euclidianos e hermitianos.

I.2.1 No que segue continuaremos a utilizar $\mathbb{K}$ para designar um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. No sentido de evitar duplicação de enunciados, tratando simultaneamente os casos real e complexo, será cómodo estender trivialmente a $\mathbb{R}$ algumas noções que *a priori* só faziam sentido em $\mathbb{C}$. Assim:

a) Quando $c \in \mathbb{C}$, nota-se $\overline{c}$ o complexo conjugado do complexo c. No quadro dos números reais vamos considerar que, para cada $c \in \mathbb{R}$, $\overline{c}$ é sinónimo de c, o que é compatível com o facto de, quando identificamos $\mathbb{R}$ a uma parte de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ser precisamente o conjunto dos complexos que coincidem com os respectivos conjugados.

b) Quando E é um espaço vectorial complexo, definimos em I.1.16 o espaço vectorial conjugado $\overline{E}$. Quando E é um espaço vectorial real, consideramos

que $\overline{E}$ é sinónimo de E.
c) Quando E e F são espaços vectoriais complexos, chamámos aplicações antilineares às aplicações lineares reais $\lambda: E \to F$ que verificam a condição $\lambda(cu) = \overline{c}\lambda(u)$, para cada $c \in \mathbb{C}$ e $u \in E$. Em consonância com o que se disse em a), quando E e F são espaços vectoriais reais, vamos considerar que as aplicações antilineares $\lambda: E \to F$ são simplesmente as aplicações lineares.
d) Quando E e F são espaços vectoriais complexos, diremos que uma aplicação $\xi: E \times E \to F$ é *sesquilinear* se ela é linear na primeira variável e antilinear na segunda. Quando E e F são espaços vectoriais reais, consideramos que uma aplicação sesquilinear $\xi: E \times E \to F$ é precisamente a mesma coisa que uma aplicação bilinear. É claro que uma aplicação sesquilinear $E \times E \to F$ é precisamente a mesma coisa que uma aplicação bilinear $E \times \overline{E} \to F$.

I.2.2 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Relembremos que um *produto interno* sobre E é uma aplicação sesquilinear $E \times E \to \mathbb{K}$, notada usualmente $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, verificando as seguintes condições:

a) Quaisquer que sejam $x, y \in E$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;[3]
b) Para cada $x \in E$, $\langle x, x\rangle \geq 0$;
c) Se $\langle x, x\rangle = 0$, então $x = 0$.[4]

(a propriedade b) poderá parecer um pouco estranha quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mas ela faz sentido na medida em que, por a), tem-se $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$, e portanto $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$). Relembremos ainda que, se E está munido de um produto interno, podemos considerar sobre E uma *norma associada*, definida por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

tendo então lugar a *desigualdade de Schwarz*, que nos afirma que, quaisquer que sejam $x, y \in E$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

com $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ se, e só se, x e y são linearmente dependentes.
Aos espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de um produto interno, dá-se o nome de *espaços euclidianos* ou *espaços hermitianos*, conforme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I.2.3 O exemplo mais simples de espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno é o espaço cartesiano $\mathbb{K}^n$, com o *produto interno canónico*, definido por

$$\langle (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)\rangle = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}.$$

---

[3]No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esta propriedade diz-nos que a aplicação bilinear é simétrica.
[4]É claro que a recíproca é também verdadeira. Mais geralmente, a bilinearidade real do produto interno implica que se tem $\langle x, y\rangle = 0$, sempre que $x = 0$ ou $y = 0$.

É este o produto interno que consideraremos sempre em $\mathbb{K}^n$, salvo aviso em contrário. Repare-se que a norma associada a este produto interno está definida por

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

I.2.4 Se E é um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$, então existe sempre um produto interno sobre E. Mais precisamente, dada uma base $w_1, \ldots, w_n$ de E pode definir-se um produto interno associado a esta base pondo, para $x = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$ e $y = b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$,

$$\langle x, y\rangle = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}.$$

O produto interno canónico sobre $\mathbb{K}^n$ não é mais do que o associado à base canónica de $\mathbb{K}^n$.

I.2.5 Seja E um espaço vectorial complexo de dimensão finita, munido de um produto interno $\langle\, , \rangle_{\mathbb{C}}$. Sabemos que E pode ser também olhado como espaço vectorial real mas é evidente que, nesse contexto, $\langle\, , \rangle_{\mathbb{C}}$ não vai ser um produto interno (trata-se de uma aplicação com valores em $\mathbb{C}$ e não em $\mathbb{R}$). No entanto é fácil constatar-se que se pode definir em E, considerado como espaço vectorial real, um produto interno, que notaremos $\langle\, , \rangle_{\mathbb{R}}$, pondo

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \Re(\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}})$$ [5]

(reparar que um número complexo e o seu conjugado têm a mesma parte real). Dizemos que $\langle\, , \rangle_{\mathbb{R}}$ é o *produto interno real associado* ao produto interno complexo $\langle\, , \rangle_{\mathbb{C}}$. Repare-se que as normas associadas ao produto interno complexo e ao produto interno real associado coincidem.

I.2.6 Seja E um espaço vectorial complexo, munido de um produto interno complexo $\langle\, , \rangle_{\mathbb{C}}$ e do produto interno real associado $\langle\, , \rangle_{\mathbb{R}}$. Se J é a estrutura complexa associada de E, então, quaisquer que sejam $u, v \in E$, tem-se

$$\langle J(u), J(v)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle iu, iv\rangle_{\mathbb{C}} = i \times -i \times \langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v\,\rangle_{\mathbb{C}},$$

em particular também $\langle J(u), J(v)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$.

I.2.7 Seja, reciprocamente, E um espaço vectorial real, munido de um produto interno $\langle\, , \rangle_{\mathbb{R}}$. Diz-se que uma estrutura complexa $J \colon E \to E$ é *compatível* com o produto interno se se tem $\langle J(u), J(v)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$, quaisquer que sejam $u, v \in \mathbb{R}$ (diz-se então também que o produto interno real é um *produto interno hermitiano* do espaço vectorial complexo definido por J).
Quando isso acontecer, existe um, e um só, produto interno complexo $\langle\, , \rangle_{\mathbb{C}}$ do espaço vectorial complexo definido por J, cujo produto interno real associado seja $\langle\, , \rangle_{\mathbb{R}}$, nomeadamente o definido por

---

[5] Notamos, para cada complexo z, $\Re(z)$ e $\Im(z)$ a parte real e o coeficiente da parte imaginária de z.

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}} + \langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{R}}\, i.$$

Dem: Comecemos por mostrar a unicidade. Para isso, reparamos que, se $\langle\,,\,\rangle_{\mathbb{C}}$ é um produto interno complexo de E cujo produto interno real associado seja $\langle\,,\,\rangle_{\mathbb{R}}$, então, sendo $\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, vem $a = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$ e

$$\langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, iv\rangle_{\mathbb{C}} = -i\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} = b - ai,$$

e portanto $b = \langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{R}}$, donde $\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}} + \langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{R}}\, i$. Definamos agora $\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}}$ pela fórmula anterior. Para terminar a demonstração basta verificarmos que obtemos assim um produto interno complexo em E, visto que é então imediato que o produto interno real associado é $\langle\,,\,\rangle_{\mathbb{R}}$. É imediato que a aplicação $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_{\mathbb{C}}$ é bilinear real e, uma vez que se tem

$$\langle J(u), v\rangle_{\mathbb{R}} = \langle J(J(u)), J(v)\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{R}},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle J(u), v\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle J(u), v\rangle_{\mathbb{R}} + \langle J(u), J(v)\rangle_{\mathbb{R}}\, i = \\ &= -\langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{R}} + \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}\, i = i\,\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{R}} + \langle u, J(J(v))\rangle_{\mathbb{R}}\, i = \\ &= \langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{R}} - \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}\, i = -i\,\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}},\end{aligned}$$

o que mostra que ela é linear complexa na primeira variável e antilinear na segunda, e portanto temos uma aplicação sesquilinear. A igualdade $\langle J(u), v\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle u, J(v)\rangle_{\mathbb{R}}$ implica também que se tem $\langle v, u\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}}}$, em particular $\langle u, u\rangle_{\mathbb{C}}$ é real, e portanto igual a $\langle u, u\rangle_{\mathbb{R}}$, o que implica, em particular, que temos um produto interno complexo. □

I.2.8 Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno $\langle\,,\,\rangle_{\mathbb{R}}$ e de uma estrutura complexa compatível $J\colon E \to E$. Para cada $u \in E$, tem-se então $\langle u, J(u)\rangle_{\mathbb{R}} = 0$.
Dem: Tem-se

$$\langle u, J(u)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle J(u), J(J(u))\rangle_{\mathbb{R}} = \langle J(u), -u\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle u, J(u)\rangle_{\mathbb{R}}. \qquad \square$$

I.2.9 Se E é um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munido de um produto interno, tem lugar um isomorfismo $\theta\colon \overline{E} \to L(E; \mathbb{K})$, definido por

$$\theta(y)(x) = \langle x, y\rangle.$$

Dem: É imediato que, para cada $y \in E$, tem lugar uma aplicação linear de E em $\mathbb{K}$, definida por $x \mapsto \langle x, y\rangle$, o que mostra que se pode definir uma aplicação $\theta\colon E \to L(E; \mathbb{K})$ pela igualdade do enunciado. É trivial constatar que a aplicação θ é antilinear, isto é, é uma aplicação linear $\overline{E} \to L(E; \mathbb{K})$, pelo que, uma vez que $\overline{E}$ e $L(E;\mathbb{K})$ têm a mesma dimensão, para vermos que ela é um isomorfismo basta vermos que o seu núcleo é $\{0\}$. Ora, se $\theta(y) = 0$, tem-se, em particular, $0 = \theta(y)(y) = \langle y, y\rangle$, donde $y = 0$. □

I.2.10 Seja E é um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munido de um produto interno. Diz-se que dois vectores $x, y \in E$ são *ortogonais* se se tem $\langle x, y\rangle = 0$. Se $F \subset E$ é um subespaço vectorial, chama-se *complementar ortogonal* de F o conjunto $F^\perp$ dos vectores $x \in E$ tais que $\langle x, y\rangle = 0$, para todo o $y \in F$.

I.2.11 Seja E um espaço hermitiano, com o produto interno complexo $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ e seja $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$ o produto interno real associado.
Se $x, y \in E$ são vectores ortogonais, relativamente ao produto interno complexo, então x e y são também ortogonais, relativamente ao produto interno real, mas a recíproca já não é válida: Por exemplo, se $x \neq 0$, tem-se $\langle ix, x\rangle_{\mathbb{C}} = i\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}} \neq 0$ e $\langle ix, x\rangle_{\mathbb{R}} = 0$.
No entanto, no caso em que $F \subset E$ é um subespaço vectorial complexo, o complementar ortogonal $F^\perp$, relativamente a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$, coincide com o complementar ortogonal relativamente a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$.
Dem: É claro que, se x pertence ao complementar ortogonal de F, relativamente a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$, então x também pertence ao complementar ortogonal de F, relativamente a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$. Suponhamos, reciprocamente, que x pertence ao complementar ortogonal de F, relativamente a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$. Para cada $y \in F$, vem também $iy \in F$, pelo que podemos escrever

$$\begin{aligned}&\Re(\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}) = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = 0,\\ &\Im(\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}) = \Re(-i\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}) = \Re(\langle x, iy\rangle_{\mathbb{C}}) = \langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}} = 0,\end{aligned}$$

donde $\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = 0$. □

I.2.12 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$, munido de um produto interno e $F \subset E$ um subespaço vectorial de dimensão m. Tem-se então:
a) $F^\perp$ é um subespaço vectorial de dimensão $n - m$;
b) $(F^\perp)^\perp = F$;
c) Tem lugar a soma directa $E = F \oplus F^\perp$;
d) $\{0\}^\perp = E$ e $E^\perp = \{0\}$.
Dem: Comecemos por reparar que tem lugar uma aplicação linear sobrejectiva de $L(E;\mathbb{K})$ sobre $L(F;\mathbb{K})$, que a cada aplicação linear $\xi\colon E \to \mathbb{K}$ associa a restrição $\xi_{/F}\colon F \to \mathbb{K}$ (para ver que toda a aplicação linear de F em $\mathbb{K}$ pode ser prolongada numa aplicação linear de E em $\mathbb{K}$, basta considerar uma base de F, prolongá-la numa base de E e atender a que uma aplicação linear fica definida se dermos, de modo arbitrário, as imagens dos elementos duma base). Por composição desta aplicação linear com o isomorfismo $\theta\colon \overline{E} \to L(E;\mathbb{K})$, somos conduzidos a uma aplicação linear sobrejectiva $\widehat{\theta}\colon \overline{E} \to L(F;\mathbb{K})$, definida ainda por $\widehat{\theta}(y)(x) = \langle x, y\rangle$. Por definição, $F^\perp$ é o núcleo da aplicação linear $\widehat{\theta}$ pelo que, uma vez que $\overline{E}$ e $L(F;\mathbb{K})$ têm

dimensões n e m, respectivamente, concluímos que $F^\perp$ é um subespaço vectorial de dimensão $n-m$ (de $\overline{E}$ ou de E, é o mesmo). Aplicando de novo a mesma conclusão, vemos que $(F^\perp)^\perp$ é um subespaço vectorial de dimensão $n-(n-m)=m$; uma vez que se tem evidentemente $F\subset(F^\perp)^\perp$, podemos concluir que $(F^\perp)^\perp=F$. Se $x\in F\cap F^\perp$, tem-se $\langle x,x\rangle=0$, donde $x=0$. Concluímos daqui que F e $F^\perp$ formam soma directa pelo que, uma vez que a soma das suas dimensões é igual à dimensão n de E, tem-se $E=F\oplus F^\perp$. É imediato que $\{0\}^\perp=E$ e o facto de se ter $E^\perp=\{0\}$ é, por exemplo, uma consequência daquele facto e do que vimos em b). □

I.2.13 Nas condições anteriores nota-se π_F a aplicação linear de E sobre F associada à soma directa referida. Tem-se portanto que, para cada $x\in E$, pode-se escrever, de maneira única $x=x'+x''$, com $x'\in F$ e $x''\in F^\perp$, e então $\pi_F(x)=x'$, por outras palavras, $\pi_F(x)$ é o único vector de F tal que $x-\pi_F(x)\in F^\perp$. Diz-se que π_F é a *projecção ortogonal* de E sobre F. Repare-se que, tendo em conta a alínea b) do resultado precedente, a projecção ortogonal $\pi_{F^\perp}(x)$ de x sobre $F^\perp$ é igual a x'', isto é, a $x-\pi_F(x)$.
É claro que se tem $x\in F$ se, e só se, $\pi_F(x)=x$, assim como $x\in F^\perp$ se, e só se, $\pi_F(x)=0$.
Tendo em conta I.2.11, vemos que, se E é um espaço hermitiano e $F\subset E$ é um subespaço vectorial complexo, então a projecção ortogonal π_F não depende de se considerar o produto interno complexo ou o produto interno real associado.

I.2.14 Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$, munido de um produto interno. Diz-se que um sistema de m vectores $w_1,\ldots,w_m$ é *ortogonal* se se tem $\langle w_j,w_k\rangle=0$, para cada $j\neq k$. Um sistema ortogonal de vectores não nulos é sempre linearmente independente e, no caso em que $m=n$, é uma base de E (uma *base ortogonal* de E), tendo-se, para cada $x\in E$,

$$x=\sum_{j=1}^{n}\frac{\langle x,w_j\rangle}{\langle w_j,w_j\rangle}\,w_j.$$

Dem: Suponhamos que $w_1,\ldots,w_m$ é um sistema ortogonal de vectores não nulos e que se tinha $\sum a_jw_j=0$. Para cada k, podíamos então escrever

$$0=\Big\langle\sum_j a_jw_j,w_k\Big\rangle=\sum_j a_j\langle w_j,w_k\rangle=a_k\langle w_k,w_k\rangle,$$

donde $a_k=0$, o que mostra que o sistema é linearmente independente. No caso em que $m=n$, temos portanto uma base de E pelo que, para cada $x\in E$, podemos escrever $x=\sum a_jw_j$. Tem-se então, para cada k,

$$\langle x, w_k\rangle = \sum_j a_j\langle w_j, w_k\rangle = a_k\langle w_k, w_k\rangle,$$

donde $a_k = \frac{\langle x,w_k\rangle}{\langle w_k,w_k\rangle}$. □

I.2.15 Nas condições anteriores, um sistema de m vectores $w_1, \dots, w_m$ de E diz-se *ortonormado* se for ortogonal e constituído por vectores de norma 1, por outras palavras, se se tiver $\langle w_j, w_k\rangle = \delta_{j,k}$, quaisquer que sejam j, k, onde $\delta_{j,k}$ é o *símbolo de Kronecker*[6]. A um sistema ortonormado de vectores que constitua uma base também se dá o nome de *base ortonormada* de E.
Repare-se que, a partir de um sistema ortogonal de vectores não nulos $y_1, \dots, y_m$, pode sempre obter-se um sistema ortonormado $w_1, \dots, w_m$, pondo simplesmente $w_j = \frac{y_j}{\|y_j\|}$.
Quando $w_1, \dots, w_n$ é uma base ortonormada, a fórmula obtida atrás diz-nos que, para cada $x \in E$, tem-se

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, w_j\rangle\, w_j.$$

Uma das vantagens das bases ortonormadas é a de elas permitirem uma caracterização simples do produto interno de dois vectores a partir das suas componentes.

I.2.16 Seja $w_1, \dots, w_n$ uma base ortonormada de E. Dados $x, y \in E$, com $x = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n$ e $y = b_1w_1 + \cdots + b_nw_n$, tem-se

$$\langle x, y\rangle = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}.$$

Dem: Vem

$$\langle x, y\rangle = \Big\langle \sum_j a_jw_j\,,\, \sum_k b_kw_k\Big\rangle = \sum_{j,k} \langle a_jw_j, b_kw_k\rangle =$$
$$= \sum_{j,k} a_j\overline{b_k}\,\langle w_j, w_k\rangle = \sum_j a_j\overline{b_j}.$$ □

I.2.17 Em particular, vemos que, se E é um espaço vectorial com uma base $w_1, \dots, w_n$, então o produto interno construído a partir dela em I.2.4 vai ser o único para o qual aquela base é ortonormada.

I.2.18 **(Existência de bases ortonormadas)** Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$, munido de um produto interno. Cada sistema

[6]Recordemos que o *símbolo de Kronecker* $\delta_{j,k}$ é, por definição, igual a 1, se $j = k$, e igual a 0, se $j \neq k$.

ortonormado de vectores de E pode então ser prolongado numa base ortonormada de E, em particular, existe uma base ortonormada de E.

Dem: Façamos a demonstração da existência de uma base ortonormada para E por indução na dimensão n de E. Se $n = 0$, o resultado é trivial, visto que a família vazia de vectores é uma base ortonormada. Suponhamos o resultado verdadeiro para os espaços vectoriais de dimensão n e vejamos o que acontece no caso em que E tem dimensão $n+1$. Seja x um vector não nulo de E e seja $F = \mathbb{K}x$ o subespaço vectorial, de dimensão 1, gerado por x. O vector $w_1 = \frac{x}{\|x\|}$ é um vector de norma 1 de F, e portanto uma base ortonormada deste subespaço. Pela hipótese de indução podemos considerar uma base ortonormada $w_2, \ldots, w_{n+1}$ do complementar ortogonal $F^\perp$, que é um espaço vectorial de dimensão n, e é então imediato que $w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}$ é um sistema ortonormado de $n+1$ vectores de E e portanto uma base ortonormada deste espaço. Mais geralmente, se $y_1, \ldots, y_m$ for um sistema ortonormado de vectores de E, podemos considerar o subespaço vectorial F de dimensão m gerado por este sistema e é imediato que, juntando a estes vectores os $n-m$ vectores duma base ortonormada do complementar ortogonal $F^\perp$, obtemos um sistema ortonormado de E com n vectores, logo uma base ortonormada deste espaço. □

I.2.19 Seja E um espaço hermitiano, com o produto interno complexo $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ e seja $w_1, \ldots, w_m$ um sistema ortogonal de vectores de E (respectivamente um sistema ortonormado). Então o sistema de vectores $w_1, \ldots, w_m, iw_1, \ldots, iw_m$ é ortogonal (respectivamente ortonormado), relativamente ao produto interno real associado $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$. Relembremos que, quando o primeiro sistema é uma base de E, enquanto espaço vectorial complexo, o segundo é uma base de E, enquanto espaço vectorial real.

Dem: Para cada $j \neq k$, tem-se

$$0 = \langle w_j, w_k \rangle_{\mathbb{C}} = \langle w_j, w_k \rangle_{\mathbb{R}} + \langle w_j, iw_k \rangle_{\mathbb{R}}\, i,$$

donde $\langle w_j, w_k \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ e $\langle w_j, iw_k \rangle_{\mathbb{R}} = 0$; daqui deduzimos, lembrando I.2.6, que se tem também $\langle iw_j, iw_k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w_j, w_k \rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Por outro lado, para cada j, tem-se

$$\langle w_j, w_j \rangle_{\mathbb{R}} + \langle w_j, iw_j \rangle_{\mathbb{R}}\, i = \langle w_j, w_j \rangle_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R},$$

donde $\langle w_j, iw_j \rangle_{\mathbb{R}} = 0$, o que acaba de provar que temos um sistema ortogonal de vectores de E, relativamente ao produto interno real associado. No caso em que o sistema de partida é mesmo ortonormado, esta mesma fórmula mostra que, por ser $\langle w_j, w_j \rangle_{\mathbb{C}} = 1$, é também $\langle w_j, w_j \rangle_{\mathbb{R}} = 1$ e daqui deduzimos que se tem também $\langle iw_j, iw_j \rangle_{\mathbb{R}} = \langle w_j, w_j \rangle_{\mathbb{R}} = 1$. □

O resultado que se segue estabelece um processo muito útil de caracterizar a projecção ortogonal sobre um subespaço F, quando se dispõe de uma base ortonormada para esse subespaço, ou, mais geralmente, de uma base ortogonal. É claro que, tendo em conta o que vimos em I.2.13, o resultado em questão poderá ser também utilizado quando possuirmos uma base ortogonal para $F^\perp$, em vez de uma base ortogonal para F.

I.2.20 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de produto interno, e $F \subset E$ um subespaço vectorial, munido de uma base ortogonal $w_1, \ldots, w_m$. Para cada $x \in E$, tem-se então

$$\pi_F(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle x, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j$$

em particular, no caso em que a base é mesmo ortonormada,

$$\pi_F(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle x, w_j \rangle w_j.$$

Dem: Uma vez que $y = \sum \frac{\langle x, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j$ pertence evidentemente a F, tudo o que temos que mostrar é que $x - y$ pertence a $F^\perp$. Ora, para cada k, tem-se

$$\begin{aligned}\big\langle x - y, w_k \big\rangle &= \langle x, w_k \rangle - \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle x, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \langle w_j, w_k \rangle = \\ &= \langle x, w_k \rangle - \frac{\langle x, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} \langle w_k, w_k \rangle = 0\end{aligned}$$

e daqui segue-se que, para cada $z \in F$, com $z = \sum b_k w_k$,

$$\big\langle x - y, z \big\rangle = \sum_{k=1}^{m} \overline{b_k} \big\langle x - y, w_k \big\rangle = 0,$$

o que termina a demonstração. □

I.2.21 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de produtos internos, e $\lambda: E \to F$ uma aplicação linear. Tem então lugar uma aplicação linear $\lambda^*: F \to E$, dita *adjunta* de λ, tal que, para cada $y \in F$, $\lambda^*(y)$ é o único elemento de E que verifica a condição

$$\langle x, \lambda^*(y) \rangle = \langle \lambda(x), y \rangle,$$

para todo o $x \in E$.

Dem: Para cada $y \in F$, tem lugar uma aplicação linear $\xi_y: E \to \mathbb{K}$, definida por $\xi_y(x) = \langle \lambda(x), y \rangle$, pelo que a existência e unicidade de um elemento $\lambda^*(y) \in E$, verificando a igualdade do enunciado, fica garantida por I.2.9, tendo-se nas notações desse resultado, $\lambda^*(y) = \theta^{-1}(\xi_y)$. O facto de λ^* ser uma aplicação linear é uma consequência de que a aplicação de F em $L(E; \mathbb{K})$, que a y associa ξ_y, é antilinear, tal como θ^{-1}. □

I.2.22 Sejam E e F espaços hermitianos, com produtos internos notados $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$, e $\lambda\colon E \to F$ uma aplicação linear. Tem-se então que a aplicação linear adjunta $\lambda^*\colon F \to E$ de λ coincide com a adjunta de λ relativamente aos produtos internos reais associados $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$.

Dem: Basta atender a que a igualdade $\langle x, \lambda^*(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \lambda(x), y\rangle_{\mathbb{C}}$ implica trivialmente a igualdade $\langle x, \lambda^*(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \lambda(x), y\rangle_{\mathbb{R}}$. □

I.2.23 Nas condições de I.2.21, tem lugar uma aplicação antilinear de $L(E;F)$ em $L(F;E)$, que a cada λ associa λ^*.

Dem: Dados $\lambda, \mu \in L(E;F)$, tem-se

$$\begin{aligned}&\langle x, \lambda^*(y) + \mu^*(y)\rangle = \langle x, \lambda^*(y)\rangle + \langle x, \mu^*(y)\rangle =\\ &= \langle \lambda(x), y\rangle + \langle \mu(x), y\rangle = \langle \lambda(x) + \mu(x), y\rangle = \langle (\lambda + \mu)(x), y\rangle,\end{aligned}$$

o que implica que $(\lambda + \mu)^*(y) = \lambda^*(y) + \mu^*(y)$. Do mesmo modo, se $\lambda \in L(E;F)$ e $a \in \mathbb{K}$,

$$\langle x, \overline{a}\lambda^*(y)\rangle = a\langle x, \lambda^*(y)\rangle = a\langle \lambda(x), y\rangle = \langle a\lambda(x), y\rangle = \langle (a\lambda)(x), y\rangle,$$

o que implica que $\overline{a}\lambda^*(y) = (a\lambda)^*(y)$. □

I.2.24 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de produto interno, e $\lambda\colon E \to F$ e $\mu\colon F \to G$ duas aplicações lineares. Tem-se então:

a) $(\lambda^*)^* = \lambda$;
b) $(\mu \circ \lambda)^* = \lambda^* \circ \mu^*$;
c) $(Id_E)^* = Id_E$.

Dem: Quaisquer que sejam $x \in E$ e $y \in F$, vem

$$\langle y, \lambda(x)\rangle = \overline{\langle \lambda(x), y\rangle} = \overline{\langle x, \lambda^*(y)\rangle} = \langle \lambda^*(y), x\rangle,$$

o que mostra que $(\lambda^*)^*(x) = \lambda(x)$. Quaisquer que sejam $x \in E$ e $z \in G$, tem-se

$$\langle x, \lambda^*(\mu^*(z))\rangle = \langle \lambda(x), \mu^*(z)\rangle = \langle \mu(\lambda(x)), z\rangle,$$

pelo que $(\mu \circ \lambda)^*(z) = \lambda^* \circ \mu^*(z)$. A afirmação feita em c) é trivial. □

I.2.25 Se E é um espaço vectorial de dimensão finita, munido de produto interno, diz-se que uma aplicação linear $\lambda\colon E \to E$ é *autoadjunta*, se se tem $\lambda^* = \lambda$, isto é, se se tem

$$\langle x, \lambda(y)\rangle = \langle \lambda(x), y\rangle,$$

quaisquer que sejam $x, y \in E$ (no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, também se dá o nome de *simétricas* às aplicações lineares autoadjuntas). O subconjunto de $L(E;E)$, cujos elementos são as aplicações lineares autoadjuntas é um

subespaço vectorial real[7] que notaremos $L_{aa}(E;E)$.
Analogamente, chamamos *antiautoadjuntas* às aplicações lineares $\lambda\colon E\to E$ tais que $\lambda^*=-\lambda$, isto é, tais que $\langle x,\lambda(y)\rangle=-\langle\lambda(x),y\rangle$, quaisquer que sejam $x,y\in E$, e notamos $L_{-aa}(E;E)$ o subespaço vectorial real de $L(E;E)$ constituído pelas aplicações lineares antiautoadjuntas.

I.2.26 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de produto interno e $F\subset E$ um subespaço vectorial. Sendo $\iota_F\colon F\to E$ a inclusão e $\pi_F\colon E\to F$ a projecção ortogonal de E sobre F, tem-se $\iota_F^*=\pi_F$, e portanto também $\pi_F^*=\iota_F$. Em consequência, quando se encara π_F como aplicação linear $E\to E$, π_F é uma aplicação linear autoadjunta.
Dem: Para provar que $\pi_F\colon E\to F$ é a adjunta de $\iota_F\colon F\to E$, o que temos que mostrar é que, quaisquer que sejam $x\in F$ e $y\in E$, tem-se $\langle\iota_F(x),y\rangle=\langle x,\pi_F(y)\rangle$, isto é, $\langle x,y\rangle=\langle x,\pi_F(y)\rangle$, igualdade que é equivalente a $\langle x,y-\pi_F(y)\rangle=0$. Ora, isto acontece efectivamente, uma vez que se tem $x\in F$ e, por definição de projecção ortogonal, $y-\pi_F(y)\in F^\perp$. O facto de se ter também $\pi_F^*=\iota_F$ é agora uma consequência da alínea a) de I.2.24 e o facto de π_F, como aplicação linear $E\to E$, ser autoadjunta resulta da alínea b) do mesmo resultado, uma vez que se pode considerar que temos a composta $\iota_F\circ\pi_F$, e portanto

$$(\iota_F\circ\pi_F)^*=\pi_F^*\circ\iota_F^*=\iota_F\circ\pi_F. \qquad \square$$

Repare-se que o resultado anterior sublinha o cuidado necessário, ao referir a adjunta de uma aplicação linear, de ter bem presente qual o espaço de chegada que se está a considerar: Para a mesma aplicação linear π_F, de domínio E, a sua adjunta é ι_F, quando o espaço de chegada considerado é F, e é a própria aplicação linear π_F, quando o espaço de chegada considerado é E.
A noção de aplicação linear adjunta é talvez mais claramente entendida se examinarmos o que acontece à respectiva matriz, desde que, e isso é fundamental, esta seja tomada relativamente a bases ortonormadas dos espaços euclidianos em questão:

I.2.27 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de produto interno, $w_1,\dots,w_m$ uma base ortonormada de E e $z_1,\dots,z_n$ uma base ortonormada de F. Se $\lambda\in L(E;F)$, tem-se então que a matriz da aplicação linear $\lambda^*\in L(F;E)$ naquelas bases é a matriz transconjugada da matriz de λ nas mesmas bases. Em particular, no caso em que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, uma aplicação linear $\lambda\in L(E;E)$ é simétrica se, e só se, a sua matriz numa base ortonormada é simétrica.
Dem: A matriz da aplicação linear λ é a matriz cujo elemento $a_{k,j}$, da linha k

[7] Repare-se que, quando E é um espaço vectorial hermitiano, apenas podemos garantir que $L_{aa}(E;E)$ é um subespaço vectorial real. A razão está no facto de a aplicação $\lambda\mapsto\lambda^*$ ser antilinear, e não linear complexa.

e coluna j, está definido por

$$\lambda(w_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} z_k,$$

tendo-se portanto, uma vez que a base $z_1, \dots, z_n$ é ortonormada,

$$a_{k,j} = \langle \lambda(w_j), z_k \rangle.$$

Do mesmo modo se vê que o elemento da linha j e coluna k da matriz de λ^* é

$$b_{j,k} = \langle \lambda^*(z_k), w_j \rangle = \langle z_k, \lambda(w_j) \rangle = \overline{\langle \lambda(w_j), z_k \rangle} = \overline{a_{k,j}},$$

donde o resultado. □

I.2.28 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n, munido de produto interno, e $\lambda: E \to E$ uma aplicação linear com adjunta $\lambda^*: E \to E$. Tem-se então

$$\mathrm{Tr}(\lambda^*) = \overline{\mathrm{Tr}(\lambda)}, \quad \det(\lambda^*) = \overline{\det(\lambda)}.$$

Dem: Fixando uma base ortonormada $x_1, \dots, x_n$ de E, sabemos que a matriz de λ^* naquela base é a transposta da conjugada da matriz de λ na mesma base, pelo que basta repararmos que uma matriz e a sua transposta têm o mesmo traço e o mesmo determinante e que o traço e o determinante da matriz cujos elementos são os conjugados dos duma matriz dada são respectivamente iguais aos conjugados do traço e do determinante desta. □

I.2.29 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de produto interno. Diz-se que uma aplicação linear $\lambda: E \to F$ é *ortogonal* se se tem

$$\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

quaisquer que sejam $x, y \in E$. Uma tal aplicação linear verifica então trivialmente a condição $\|\lambda(x)\| = \|x\|$, qualquer que seja $x \in E$, em particular é sempre uma aplicação linear injectiva. Dá-se o nome de *isometria linear* a um isomorfismo ortogonal, isto é, a uma aplicação linear ortogonal $\lambda: E \to F$, que seja um isomorfismo de E sobre F. No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é mais comum chamar aplicações lineares *unitárias* às aplicações lineares ortogonais.

I.2.30 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de produto interno, $w_1, \dots, w_m$ uma base ortonormada de E e $\lambda: E \to F$ uma aplicação linear. São então equivalentes as condições seguintes:

a) λ é uma aplicação linear ortogonal;

b) $\|\lambda(x)\| = \|x\|$, qualquer que seja $x \in E$;

c) $\lambda^* \circ \lambda = Id_E$;

d) $\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_m)$ é um sistema ortonormado de vectores de F.

Além disso, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, a aplicação linear complexa $\lambda: E \to F$ é ortogonal, relativamente aos produtos internos complexos, se, e só se, é ortogonal relativamente aos produtos internos reais associados.

Dem: Vamos começar por verificar que cada uma das condições c) e d) é equivalente à condição a). É trivial que a condição a) implica a condição d) e o facto de ela implicar c) vem de que podemos então escrever, quaisquer que sejam $x, y \in E$,

$$\langle x, \lambda^* \circ \lambda(y)\rangle = \langle \lambda(x), \lambda(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

o que implica que $\lambda^* \circ \lambda(y) = y$. Supondo que se verifica c), tem-se, do mesmo modo,

$$\langle \lambda(x), \lambda(y)\rangle = \langle x, \lambda^*(\lambda(y))\rangle = \langle x, y\rangle,$$

o que não é mais do que a condição a). Supondo que se verifica d), tem-se, para $x, y \in E$, $x = \sum\limits_j a_j w_j$ e $y = \sum\limits_k b_k w_k$, portanto

$$\begin{aligned}\langle \lambda(x), \lambda(y)\rangle &= \Big\langle \sum_j a_j \lambda(w_j)\,, \sum_k b_k \lambda(w_k)\Big\rangle = \\ &= \sum_{j,k} a_j \overline{b_k} \langle \lambda(w_j), \lambda(w_k)\rangle = \sum_{j,k} a_j \overline{b_k} \langle w_j, w_k\rangle = \\ &= \Big\langle \sum_j a_j w_j\,, \sum_k b_k w_k\Big\rangle = \langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

o que mostra que λ é uma aplicação linear ortogonal. Reparemos agora que, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, a caracterização em c) implica, tendo em conta I.2.22, que λ é ortogonal, relativamente aos produtos internos complexos, se, e só se, é ortogonal relativamente aos produtos internos reais associados. Por esse motivo, para demonstrar a equivalência entre a) e b), que nos falta, podemos examinar apenas o que se passa no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ora, a condição a) implica evidentemente b) e, supondo que se verifica b), partimos da identidade

$$\begin{aligned}\langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle,\end{aligned}$$

que implica que

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\,(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2),$$

para deduzir que

$$\begin{aligned}\langle \lambda(x), \lambda(y)\rangle &= \frac{1}{2}\,(\|\lambda(x) + \lambda(y)\|^2 - \|\lambda(x)\|^2 - \|\lambda(y)\|^2) = \\ &= \frac{1}{2}\,(\|\lambda(x + y)\|^2 - \|\lambda(x)\|^2 - \|\lambda(y)\|^2) =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \langle x, y\rangle,$$

o que prova a). □

I.2.31 Por exemplo, se E é um espaço euclidiano e $J\colon E \to E$ é uma estrutura complexa, então J é uma estrutura complexa compatível se, e só se, é uma aplicação linear ortogonal (e portanto uma isometria linear), o que é equivalente a J ser antiautoadjunta.

Dem: O facto de J ser compatível se, e só se, é uma aplicação linear ortogonal é simplesmente a definição. Por outro lado, a identidade $J \circ J = -Id_E$ garante que J é um isomorfismo, com $J^{-1} = -J$, e, pelo resultado precedente, J é uma aplicação linear ortogonal se, e só se, $J^* = J^{-1}$, ou seja, se, e só se, $J^* = -J$. □

Vimos em I.1.15 que todo o espaço vectorial real de dimensão par admite uma estrutura complexa. Como exemplo de aplicação do que estabelecemos atrás, vemos agora que, quando o espaço é euclidiano, podemos afirmar um pouco mais.

I.2.32 Seja E um espaço euclidiano de dimensão par $n = 2p$. Existe então sobre E uma estrutura complexa compatível J. Mais precisamente, dada uma base ortonormada de E, que notamos $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_p$, podemos tomar para J a aplicação linear definida por $J(u_j) = v_j$ e $J(v_j) = -u_j$ (J aplica aquela base ortonormada numa base ortonormada).

A noção de aplicação linear ortogonal admite uma generalização em que, em vez das normas serem conservadas, elas vêm multiplicadas por uma certa constante.

I.2.33 Sejam E e F espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita, munidos de produto interno, $w_1, \ldots, w_m$ uma base ortonormada de E e $\lambda\colon E \to F$ uma aplicação linear. Se $c \geq 0$, são então equivalentes as condições seguintes:

a) $\langle \lambda(x), \lambda(y)\rangle = c^2\langle x, y\rangle$, quaisquer que sejam $x, y \in E$;
b) $\|\lambda(x)\| = c\|x\|$, qualquer que seja $x \in E$;
c) $\lambda^* \circ \lambda = c^2 Id_E$;
d) $\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_m)$ é um sistema ortogonal de vectores de F de norma c.

Se $c = 0$, elas são equivalentes a $\lambda = 0$ e se $c > 0$, elas são ainda equivalentes ao facto de $\frac{1}{c}\lambda$ ser uma aplicação linear ortogonal e implicam, em particular, que λ é uma aplicação linear injectiva.

Dizemos que λ é uma *aplicação linear conforme*, com *coeficiente de conformalidade* c, se se verificam as condições anteriores. Dizemos simplesmente que λ é uma *aplicação linear conforme* se λ é conforme para algum coeficiente de conformalidade $c \geq 0$.

Dem: É fácil de ver que, se $c = 0$, cada uma das condições a) a d) é equivalente a $\lambda = 0$ (reparar que a) pode-se escrever, de modo equivalente, na forma $\langle x, \lambda^* \circ \lambda(y) \rangle = 0$ e implica trivialmente b)). Se $c > 0$, as condições a) a d) são respectivamente equivalentes a

a′) $\langle \frac{1}{c}\lambda(x), \frac{1}{c}\lambda(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

b′) $\|\frac{1}{c}\lambda(x)\| = \|x\|$

c′) $(\frac{1}{c}\lambda)^* \circ (\frac{1}{c}\lambda) = Id_E$

d′) $\frac{1}{c}\lambda(w_1), \ldots, \frac{1}{c}\lambda(w_m)$ é um sistema ortonormado de vectores de F,

a primeira das quais corresponde a afirmar que $\frac{1}{c}\lambda$ é uma aplicação linear ortogonal e cada uma das outras reduz-se à condição correspondente em I.2.30, para a aplicação linear $\frac{1}{c}\lambda$. □

I.2.34 **(Notas) a)** Uma aplicação linear ortogonal $\lambda: E \to F$ é precisamente a mesma coisa que uma aplicação linear conforme com coeficiente de conformalidade 1.

b) No caso em que E e F são espaços vectoriais complexos, a condição c) mostra que a aplicação linear complexa $\lambda: E \to F$ é conforme, com coeficiente de conformalidade c se, e só se, o é quando se olha para E e F como espaços vectoriais reais, com os produtos internos reais associados.

c) No caso em que E tem dimensão 1, a condição d) mostra que toda a aplicação linear $\lambda: E \to F$ é conforme.

O resultado que se segue dá-nos uma caracterização, muitas vezes útil, das aplicações lineares que são projecções ortogonais sobre subespaços.

I.2.35 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de produto interno, e $\lambda: E \to E$ uma aplicação linear. Tem-se então que λ é a projecção ortogonal sobre algum subespaço F de E se, e só se, $\lambda^* = \lambda$ e $\lambda \circ \lambda = \lambda$ e, nesse caso, um tal F é único e igual a $\lambda(E)$.

Dem: Comecemos por supor que λ é a projecção ortogonal de E sobre o subespaço $F \subset E$. Já vimos em I.2.26 que λ é autoadjunta e, uma vez que, para cada $u \in E$, $\lambda(u) \in F$ e que, para cada $u \in F$, $\lambda(u) = u$, vemos que $\lambda(E) = F$ e que, para cada $u \in E$, $\lambda(\lambda(u)) = \lambda(u)$, isto é, $\lambda \circ \lambda = \lambda$.

Suponhamos, reciprocamente, que $\lambda \in L(E; E)$ é tal que $\lambda^* = \lambda$ e $\lambda \circ \lambda = \lambda$. Seja $F = \lambda(E)$ e tomemos $u \in E$ arbitrário. Tem-se $\lambda(u) \in F$ e, para cada $v \in F$, podemos escrever $v = \lambda(w)$, para algum $w \in E$, pelo que

$$\begin{aligned}&\langle u - \lambda(u), v \rangle = \langle u, \lambda(w) \rangle - \langle \lambda(u), \lambda(w) \rangle = \\ &= \langle u, \lambda(w) \rangle - \langle u, \lambda(\lambda(w)) \rangle = \langle u, \lambda(w) \rangle - \langle u, \lambda(w) \rangle = 0,\end{aligned}$$

o que mostra que $u - \lambda(u) \in F^\perp$, e portanto $\lambda(u)$ é a projecção ortogonal de u sobre F. □

§3. Os produtos internos de Hilbert-Schmidt.

I.3.1 Suponhamos que, para cada $1 \le j \le p$, E_j é um espaço vectorial de dimensão n_j, munido de produto interno. No produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_p$, que é um espaço vectorial de dimensão $n_1 + \cdots + n_p$, tem então lugar um produto interno definido por

$$\langle (x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_p) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \cdots + \langle x_p, y_p \rangle.$$

Por exemplo, se cada E_j fosse igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, com o produto interno usual ($\langle a, b \rangle = a\overline{b}$), obtínhamos o produto cartesiano $\mathbb{K}^p$, com o produto interno usual.

Repare-se que a norma sobre $E_1 \times \cdots \times E_p$, associada a este produto interno, *não é*, em geral, a norma do máximo, definida em I.1.11.

I.3.2 Sejam E e F espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensões m e n, respectivamente, munidos de produto interno. Existe então sobre o espaço vectorial $L(E; F)$, de dimensão $n \times m$, um, e um só, produto interno, tal que, qualquer que seja a base ortonormada $w_1, \ldots, w_m$ de E, se tenha, para $\lambda, \mu \in L(E; F)$,

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle \lambda(w_j), \mu(w_j) \rangle.$$

Além disso, considerando também o produto interno correspondente sobre $L(F; E)$, tem-se. para $\lambda, \mu \in L(E; F)$,

$$\langle \lambda^*, \mu^* \rangle = \overline{\langle \lambda, \mu \rangle}.$$

Alternativamente, fixadas bases ortonormadas $w_1, \ldots, w_m$ de E e $z_1, \ldots, z_n$ de F, onde λ e μ têm matrizes de elementos $a_{k,j}$ e $b_{k,j}$, definidas portanto por $\lambda(w_j) = \sum_k a_{k,j} z_k$ e $\mu(w_j) = \sum_k b_{k,j} z_k$, tem-se

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{k,j} a_{k,j}\, \overline{b_{k,j}}.$$ [8]

Dem: Fixemos uma base ortonormada $w_1, \ldots, w_m$ de E e definamos, para $\lambda, \mu \in L(E; F)$,

[8] Por outras palavras, identificando as aplicações lineares, com as respectivas matrizes e estas com elementos de $\mathbb{K}^{mn}$, de uma das maneiras naturais, ao produto interno de $L(E; F)$ fica a corresponder o produto interno canónico de $\mathbb{K}^{mn}$ (cf. I.2.3).

$$\langle\lambda,\mu\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle\lambda(w_j),\mu(w_j)\rangle.$$

Se nos lembrarmos que uma aplicação linear, que se anula nos elementos de uma certa base, é nula, constatamos facilmente que fica assim definido um produto interno no espaço vectorial $L(E;F)$. Para justificar a primeira afirmação do enunciado, tudo o que teríamos que ver é que este produto interno não depende da base ortonormada que fixámos em E. Para verificarmos isso vamos utilizar um processo que nos permite, ao mesmo tempo, demonstrar a segunda afirmação do enunciado, assim como a fórmula que envolve as matrizes de λ e μ em bases ortonormadas arbitrárias. Consideremos então uma base ortonormada $z_1,\ldots,z_n$ de F, assim como o produto interno em $L(F;E)$ definido a partir desta base ortonormada. Se verificarmos que se tem $\langle\lambda^*,\mu^*\rangle = \overline{\langle\lambda,\mu\rangle}$, a independência da escolha das bases ortonormadas ficará demonstrada (o primeiro membro da igualdade não depende da base fixada em E e o segundo não depende da base fixada em F, pelo que nenhum deles pode depender de nenhuma das escolhas). Ora, considerando as matrizes de λ e μ nas duas bases ortonormadas consideradas, vem

$$\begin{aligned}\langle\lambda,\mu\rangle &= \sum_j \langle\lambda(w_j),\mu(w_j)\rangle = \\ &= \sum_j \Big\langle \sum_k a_{k,j} z_k\,,\, \sum_{k'} b_{k',j} z_{k'} \Big\rangle = \\ &= \sum_{j,k,k'} a_{k,j}\,\overline{b_{k',j}}\,\langle z_k, z_{k'}\rangle = \sum_{j,k} a_{k,j}\,\overline{b_{k,j}}\end{aligned}$$

e, do mesmo modo, tendo em conta I.2.27,

$$\langle\lambda^*,\mu^*\rangle = \sum_{k,j} \overline{a_{k,j}}\;\overline{\overline{b_{k,j}}} = \overline{\langle\lambda,\mu\rangle}. \qquad \square$$

I.3.3 Ao produto interno sobre $L(E;F)$ que definimos atrás costuma-se dar o nome de *produto interno de Hilbert-Schmidt*. Repare-se que a norma de $L(E;F)$ associada a este produto interno não é, em geral, a mesma que a definida em I.1.9, a partir das normas de E e F associadas aos respectivos produtos internos.

Reparemos que, se fixarmos uma base ortonormada $w_1,\ldots,w_m$ de E ficamos com um isomorfismo de $L(E;F)$ sobre $F\times\cdots\times F$ (m factores), que a cada λ associa $(\lambda(w_1),\ldots,\lambda(w_m))$, isomorfismo que vai ser uma isometria linear, quando se considera em $L(E;F)$ o produto interno de Hilbert-Schmidt e em $F\times\cdots\times F$ o produto interno referido em I.3.1.

I.3.4 Sejam E, F e G três espaços euclidianos ou hermitianos, $\lambda \in L(E;F)$, $\mu \in L(F;G)$ e $\xi \in L(E;G)$. Tem-se então

$$\langle \lambda, \mu^* \circ \xi \rangle = \langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle = \langle \mu, \xi \circ \lambda^* \rangle.$$

Dem: Fixemos uma base ortonormada $w_1, \dots, w_m$ de E. Tem-se então

$$\begin{aligned}\langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle &= \sum_j \langle \mu(\lambda(w_j)), \xi(w_j) \rangle = \\ &= \sum_j \langle \lambda(w_j), \mu^*(\xi(w_j)) \rangle = \langle \lambda, \mu^* \circ \xi \rangle.\end{aligned}$$

o que demonstra a primeira igualdade. Quanto à segunda, ela vai ser uma consequência da primeira e da última conclusão de I.3.2, visto que podemos escrever

$$\begin{aligned}&\langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle = \overline{\langle (\mu \circ \lambda)^*, \xi^* \rangle} = \overline{\langle \lambda^* \circ \mu^*, \xi^* \rangle} = \\ &= \overline{\langle \mu^*, \lambda^{**} \circ \xi^* \rangle} = \overline{\langle \mu^*, (\xi \circ \lambda^*)^* \rangle} = \langle \mu, \xi \circ \lambda^* \rangle.\end{aligned}$$ □

I.3.5 **(O caso em que $\boldsymbol{E}$ é real e $\boldsymbol{F}$ é complexo) a)** Sejam E um espaço vectorial real de dimensão m, munido de um produto interno real $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$ e F um espaço vectorial complexo de dimensão finita, munido de um produto interno complexo $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ e notemos também $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$ o produto interno real associado de F. Tem-se então que o produto interno de Hilbert-Schmidt de $L(E;F)$, enquanto espaço vectorial real, associado aos produtos internos $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$, é o associado a um produto interno de $L(E;F)$, enquanto espaço vectorial complexo, nomeadamente o definido por

$$\langle \lambda, \mu \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{m} \langle \lambda(w_j), \mu(w_j) \rangle_{\mathbb{C}},$$

onde $w_1, \dots, w_m$ é uma base ortonormada arbitrária de E.

b) Sejam E e F espaços vectoriais complexos, munidos de produtos internos, que notaremos $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$, e consideremos o produto interno complexo sobre $L_{\mathbb{R}}(E;F)$ referido em a), correspondente a considerar E como espaço vectorial real com o produto interno real associado $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$. Tem-se então que o produto interno complexo induzido por este em $L_{\mathbb{C}}(E;F) \subset L_{\mathbb{R}}(E;F)$ é o dobro do produto interno de Hilbert-Schmidt complexo de $L_{\mathbb{C}}(E;F)$.

c) No quadro descrito em a), valem as adaptações naturais de I.3.4, nomeadamente:

c1) Se E é um espaço euclidiano, F e G são espaços hermitianos, $\lambda \in L(E;F)$, $\mu \in L_{\mathbb{C}}(F;G)$ e $\xi \in L(E;G)$, então

$$\langle \lambda, \mu^* \circ \xi \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle_{\mathbb{C}}.$$

c2) Se E, F são espaços euclidianos, G é um espaço hermitiano, $\lambda \in L(E;F)$, $\mu \in L(F;G)$ e $\xi \in L(E;G)$, então

$$\langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mu, \xi \circ \lambda^* \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Dem: a) É fácil constatar, tal como na definição do produto interno de Hilbert-Schmidt no caso em que temos o mesmo corpo de escalares, que, fixada a base ortonormada $w_1, \ldots, w_m$ de E, a expressão do enunciado define efectivamente um produto interno complexo sobre $L(E;F)$, cujo produto interno real associado está definido por

$$\langle \lambda, \mu \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{j=1}^{m} \langle \lambda(w_j), \mu(w_j) \rangle_{\mathbb{R}},$$

sendo portanto o de Hilbert-Schmidt. Basta então repararmos que o facto de este produto interno complexo não depender da base ortonormada escolhida resulta de que isso acontece com o produto interno real associado.
b) Basta atender a que, sendo $w_1, \ldots, w_m$ uma base ortonormada complexa de E, relativamente ao produto interno $\langle \, , \rangle_{\mathbb{C}}$, podemos considerar a base ortonormada real $w_1, \ldots, w_m, iw_1, \ldots, iw_m$ de E, relativamente ao produto interno real associado, tendo-se portanto, para $\lambda, \mu \in L_{\mathbb{C}}(E;F)$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda, \mu \rangle_{\mathbb{C}} &= \sum_{j=1}^{m} \langle \lambda(w_j), \mu(w_j) \rangle_{\mathbb{C}} + \sum_{j=1}^{m} \langle \lambda(iw_j), \mu(iw_j) \rangle_{\mathbb{C}} = \\ &= \sum_{j=1}^{m} \langle \lambda(w_j), \mu(w_j) \rangle_{\mathbb{C}} + \sum_{j=1}^{m} \langle i\lambda(w_j), i\mu(w_j) \rangle_{\mathbb{C}} = \\ &= 2 \times \sum_{j=1}^{m} \langle \lambda(w_j), \mu(w_j) \rangle_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

c) Trata-se de uma consequência das fórmulas em I.3.4, se repararmos que, pela relação entre um produto interno complexo e o produto interno real associado, estabelecida em I.2.7, podemos escrever, no primeiro caso,

$$\begin{aligned}\langle \lambda, \mu^* \circ \xi \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle \lambda, \mu^* \circ \xi \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle \lambda, i(\mu^* \circ \xi) \rangle_{\mathbb{R}} = \\ &= \langle \lambda, \mu^* \circ \xi \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle \lambda, \mu^* \circ (i\xi) \rangle_{\mathbb{R}} = \\ &= \langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

e, no segundo caso,

$$\begin{aligned}\langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle \mu \circ \lambda, \xi \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle \mu \circ \lambda, i\xi \rangle_{\mathbb{R}} = \\ &= \langle \mu, \xi \circ \lambda^* \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle \mu, i\xi \circ \lambda^* \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mu, \xi \circ \lambda^* \rangle_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$ □

Estudámos atrás a caracterização da adjunta de uma aplicação linear e do produto interno de duas aplicações lineares em termos das respectivas matrizes em bases ortonormadas. Por vezes interessa examinar uma situação análoga, em que as matrizes relativas a bases são substituídas por matrizes associadas a somas directas. Começamos, para isso, por examinar o que são essas matrizes.

I.3.6 Sejam E e F espaços vectoriais e fixemos subespaços vectoriais $E_1, \dots, E_m$, de E, e $F_1, \dots, F_n$, de F, tais que tenham lugar as decomposições em soma directa $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ e $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$. Se $\lambda: E \to F$ é uma aplicação linear, vamos chamar *matriz* de λ, relativamente às somas directas consideradas, à família de aplicações lineares $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$, com $\lambda_{i,j}: E_j \to F_i$ definida por $\lambda_{i,j} = \pi'_i \circ \lambda_{/E_j}$, onde $\pi'_i: F \to F_i$ são as projecções associadas à segunda soma directa. A matriz é frequentemente notada

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,m} \end{bmatrix}$$

ou ainda, se quisermos tornar visualmente mais claro quais as somas directas consideradas,

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & \cdots & E_m \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{array} & \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,m} \end{bmatrix} \end{array}.$$

I.3.7 Nas condições anteriores, dada uma matriz arbitrária de aplicações lineares $\lambda_{i,j}: E_j \to F_i$, com $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$, vai existir uma, e uma só, aplicação linear $\lambda: E \to F$ cuja matriz seja aquela, nomeadamente a definida por $\lambda = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \lambda_{i,j} \circ \pi_j$, onde $\pi_j: E \to E_j$ são as projecções associadas à primeira soma directa. O espaço vectorial $L(E; F)$ fica assim isomorfo ao produto cartesiano dos espaços vectoriais $L(E_j; F_i)$, com $1 \le j \le m$ e $1 \le i \le n$, pelo isomorfismo que a cada λ associa a respectiva matriz de aplicações lineares.

Dem: Se $\lambda: E \to F$ é uma aplicação linear tal que $\pi'_i \circ \lambda_{/E_j} = \lambda_{i,j}$, tem-se, para cada $x \in E$

$$\lambda(x) = \sum_{1 \le i \le n} \pi'_i(\lambda(x)) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \pi'_i(\lambda(\pi_j(x))) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \lambda_{i,j}(\pi_j(x)),$$

donde $\lambda = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \lambda_{i,j} \circ \pi_j$. Reciprocamente, definindo $\lambda \in L(E; F)$ por esta igualdade, tem-se, para cada $x \in E_j$, $\lambda(x) = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_{i,j}(x)$, com $\lambda_{i,j}(x) \in F_i$, para cada i, pelo que $\lambda_{i,j}(x) = \pi'_i(\lambda(x))$. □

I.3.8 **(Functorialidade)** Consideremos espaços vectoriais E, F, G e subespaços vectoriais $E_1, \dots, E_m$, de E, $F_1, \dots, F_n$, de F, e $G_1, \dots, G_p$, de G, tais que tenham lugar as somas directas

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m, \quad F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n, \quad G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_p.$$

Tem-se então:

a) A matriz da aplicação linear $Id_E : E \to E$ é

$$\begin{bmatrix} Id_{E_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Id_{E_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Id_{E_n} \end{bmatrix}.$$

b) Se $\lambda : E \to F$ e $\mu : F \to G$ têm matrizes

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{p,1} & \mu_{p,2} & \cdots & \mu_{p,n} \end{bmatrix},$$

respectivamente, então $\mu \circ \lambda : E \to G$ tem matriz

$$\begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,m} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \rho_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p,1} & \rho_{p,2} & \cdots & \rho_{p,m} \end{bmatrix},$$

onde $\rho_{i,k} = \sum\limits_{1 \le j \le n} \mu_{i,j} \circ \lambda_{j,k}$.[9]

Dem: A demonstração de a) é trivial e, quanto a b), atendemos a que, para cada $x \in E_k$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu \circ \lambda(x) &= \mu\Big(\sum_{1 \le j \le n} \pi'_j(\lambda(x))\Big) = \sum_{1 \le j \le n} \mu(\lambda_{j,k}(x)) = \\ &= \sum_{1 \le i \le p} \sum_{1 \le j \le n} \pi''_i(\mu(\lambda_{j,k}(x))) = \sum_{1 \le i \le p} \sum_{1 \le j \le n} \mu_{i,j} \circ \lambda_{j,k}(x), \end{aligned}$$

com $\mu_{i,j} \circ \lambda_{j,k}(x) \in G_i$, para cada i, donde $\rho_{i,k}(x) = \sum\limits_{1 \le j \le n} \mu_{i,j} \circ \lambda_{j,k}(x)$. □

I.3.9 No quadro de um espaço vectorial E, munido de produto interno, sabemos que as bases ortonormadas jogam um papel especialmente relevante. Do mesmo modo, nesse quadro, de entre as decomposições em soma directa $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ vão ser especialmente importantes aquelas em *soma directa ortogonal*, isto é, aquelas em que, para cada $i \neq j$, $x \in E_i$ e $x' \in E_j$, tem-se $\langle x, x' \rangle = 0$. Repare-se que, como se verifica facilmente, dizer que a decomposição em soma directa $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ é ortogonal equivale a

[9] Reparar na analogia com a matriz identidade e com a fórmula usual para o produto de matrizes.

dizer que as projecções $\pi_i\colon E \to E_i$ associadas à soma directa coincidem com as projecções ortogonais de E sobre as parcelas E_i.

I.3.10 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de produto interno e de decomposições em soma directa ortogonal $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ e $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$. Sejam $\lambda, \mu \in L(E;F)$, com matrizes

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,m} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,m} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \cdots & \mu_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Tem-se então:
a) A aplicação linear $\lambda^*\colon F \to E$ tem matriz

$$\begin{bmatrix} (\lambda_{1,1})^* & (\lambda_{2,1})^* & \cdots & (\lambda_{n,1})^* \\ (\lambda_{1,2})^* & (\lambda_{2,2})^* & \cdots & (\lambda_{n,2})^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_{1,m})^* & (\lambda_{2,m})^* & \cdots & (\lambda_{n,m})^* \end{bmatrix},$$

por outras palavras, tem-se $(\lambda^*)_{j,i} = (\lambda_{i,j})^*$.
b) Tem-se, para os produtos internos de Hilbert-Schmidt,

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \langle \lambda_{i,j}, \mu_{i,j} \rangle.$$

Dem: Sejam $\pi_j\colon E \to E_j$ e $\pi'_i\colon F \to F_i$ as projecções ortogonais e $\iota_j\colon E_j \to E$ e $\iota'_i\colon F_i \to F$ as inclusões. Tem-se então

$$(\lambda^*)_{j,i} = \pi_j \circ \lambda^*_{/F_i} = \pi_j \circ \lambda^* \circ \iota'_i = \iota_j^* \circ \lambda^* \circ \pi_i'^* = (\pi'_i \circ \lambda \circ \iota_j)^* = (\lambda_{i,j})^*,$$

o que prova a). Quanto a b), comecemos por notar que, se $y, y' \in F$, então tem-se $\langle y, y' \rangle = \sum_{1 \le i \le n} \langle \pi'_i(y), \pi'_i(y) \rangle$, uma vez que $y = \sum_i \pi'_i(y)$, $y' = \sum_{i'} \pi'_{i'}(y')$ e, para $i \ne i'$, $\langle \pi'_i(y), \pi'_{i'}(y') \rangle = 0$. Daqui resulta, tendo em conta a definição dos produtos internos de Hilbert-Schmidt, que, para $\alpha, \beta \in L(E;F)$, tem-se

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i \langle \pi'_i \circ \alpha, \pi'_i \circ \beta \rangle.$$

Uma vez que, fixada uma base ortonormada em cada E_j, a união dessas bases vai ser uma base ortonormada de E, concluímos que

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \mu \rangle &= \sum_{1 \le j \le m} \langle \lambda_{/E_j}, \mu_{/E_j} \rangle = \sum_{1 \le j \le m} \sum_{1 \le i \le n} \langle \pi'_i \circ \lambda_{/E_j}, \pi'_i \circ \mu_{/E_j} \rangle = \\ &= \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \langle \lambda_{i,j}, \mu_{i,j} \rangle. \end{aligned}$$

□

Por vezes ser-nos-á útil sabermos calcular determinantes e traços de aplicações lineares em termos das suas matrizes relativas a uma decomposição em soma directa. Para simplificar examinamos apenas o que se passa quando com as somas directas de duas parcelas. Os resultados gerais podem facilmente ser deduzidos destes por indução no número de parcelas.

I.3.11 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n e E_1, E_2 dois subespaços vectoriais tais que tenha lugar a soma directa $E = E_1 \oplus E_2$. Seja $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear com matriz

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} \end{bmatrix},$$

relativa à decomposição considerada. Tem-se então:
a) $\mathrm{Tr}(\lambda) = \mathrm{Tr}(\lambda_{1,1}) + \mathrm{Tr}(\lambda_{2,2})$.
b) Se $\lambda_{2,1} = 0$ ou $\lambda_{1,2} = 0$, então $\det(\lambda) = \det(\lambda_{1,1}) \times \det(\lambda_{2,2})$.
Dem: Sendo p e q as dimensões de E_1 e E_2, respectivamente, fixemos uma base de E cujos primeiros p elementos estejam em E_1 e os últimos q elementos em E_2. A matriz A de λ nesta base pode ser dividida em blocos,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix},$$

onde $A_{i,j}$ é a matriz da aplicação linear $\lambda_{i,j}$ nas bases consideradas. O resultado é então uma consequência de que, para uma matriz A assim dividida, tem-se trivialmente $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A_{1,1}) + \mathrm{Tr}(A_{2,2})$ e de que é bem conhecido que, com a hipótese de se ter $A_{2,1} = 0$ ou $A_{1,2} = 0$, tem-se também $\det(A) = \det(A_{1,1}) \times \det(A_{2,2})$ (O leitor que não conhecesse esse resultado prová-lo-ia facilmente reparando que, na soma correspondente ao determinante de A, só podem ser não nulas as parcelas correspondentes a permutações σ que apliquem cada um dos dois subconjuntos $\{1, \ldots, p\}$ e $\{p+1, \ldots, n\}$ em si mesmo). □

§4. Orientação de espaços vectoriais reais.

I.4.1 Seja E um espaço vectorial *real* de dimensão n e sejam $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_n$ duas bases de E. Podemos então considerar a matriz de mudança da primeira base para a segunda, que é a matriz com n linhas e n colunas, cujo elemento $a_{j,k}$, da linha j e coluna k, está definido por

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\, u_j.$$

Trata-se de uma matriz invertível, cuja matriz inversa é a matriz da mudança da segunda base para a primeira. Diz-se que as duas bases *têm a mesma orientação* se a matriz de mudança da primeira base para a segunda tem determinante positivo; caso contrário, isto é, se esse determinante é negativo, diz-se que as duas bases *têm orientações opostas*.[10]
A razão por que esta noção só é apresentada no quadro dos espaços vectoriais reais está em que, no caso de termos um espaço vectorial complexo, a matriz de mudança de base terá elementos complexos pelo que o seu determinante será em geral um número complexo, não fazendo portanto sentido pedir que ele seja positivo ou negativo. Não esquecer, no entanto, que um espaço vectorial complexo E de dimensão n pode ser olhado como espaço vectorial real, de dimensão $2n$, e, desse ponto de vista, já faz sentido falar de duas bases reais de E terem ou não a mesma orientação.

I.4.2 A relação "têm a mesma orientação" é uma relação de equivalência no conjunto $\Omega^n(E)$ das bases de E. Além disso, se as bases $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_n$ têm orientações opostas e as bases $v_1, \ldots, v_n$ e $w_1, \ldots, w_n$ têm orientações opostas, então as bases $u_1, \ldots, u_n$ e $w_1, \ldots, w_n$ têm a mesma orientação.
Dem: A reflexividade vem de que o determinante da matriz identidade é igual a 1. A simetria é uma consequência do facto de o determinante da matriz inversa ser o inverso do determinante da matriz de partida, tendo, em particular, o mesmo sinal que este. Quanto à transitividade e à última afirmação do enunciado, basta atendermos a que a matriz de mudança da base $u_1, \ldots, u_n$ para a base $w_1, \ldots, w_n$ é o produto da matriz de mudança da base $u_1, \ldots, u_n$ para a base $v_1, \ldots, v_n$ pela matriz de mudança da base $v_1, \ldots, v_n$ para a base $w_1, \ldots, w_n$, tendo portanto determinante igual ao produto dos determinantes daquelas. □

I.4.3 A propriedade suplementar referida no enunciado precedente implica que o conjunto $\Omega_n(E)$ das base de E tem, no máximo, duas classes de equivalência para a relação de equivalência em questão, visto que, se duas bases não forem equivalentes, qualquer base que não seja equivalente a uma delas é equivalente à outra.
De facto, se $E \neq \{0\}$, $\Omega_n(E)$ tem mesmo duas classes de equivalência: Para o ver, basta reparar que, se multiplicarmos um dos vectores de uma base por -1, obtemos uma base não equivalente (se multiplicarmos uma coluna duma matriz por -1, o seu determinante vem multiplicado por -1). Diga-se a propósito que, se trocarmos a ordem de dois vectores de uma base, obtemos também uma base não equivalente (se trocarmos duas colunas de uma matriz, obtemos uma nova matriz, cujo determinante é simétrico do da primeira).
Já se $E = \{0\}$, E tem uma única base, a família vazia de vectores, e portanto $\Omega_n(E)$ tem uma única classe de equivalência.

[10] Repare-se que a ordenação dos elementos da base é aqui essencial.

Repare-se que, embora tenhamos definido quando é que duas bases têm a mesma orientação, não dissemos o que se deve entender por orientação de uma base. É verdade que, no espaço vectorial dos vectores livres da nossa Geometria euclidiana, estamos habituados a falar de bases directas e de bases retrógradas, mas essa classificação é algo que ultrapassa a simples estrutura de espaço vectorial e tem muito a ver com uma escolha arbitrária de uma base como modelo.
Outra observação é a de que a ideia intuitiva que temos de duas bases terem ou não a mesma orientação não corresponde directamente à definição que apresentámos acima[11]. Intuitivamente, duas bases $u_1, \dots, u_n$ e $v_1, \dots, v_n$ têm a mesma orientação se pudermos deformar continuamente a primeira na segunda, isto é, se existir uma aplicação contínua do intervalo $[0, 1]$ no conjunto $\Omega^n(E)$ das bases de E (uma parte do espaço vectorial E^n de dimensão n^2), que em 0 tome como valor a primeira base e em 1 a segunda. É fácil provar que duas bases que tenham a mesma orientação, neste sentido intuitivo, têm também a mesma orientação, no sentido da definição que apresentámos: à deformação da primeira base na segunda vai corresponder uma deformação da matriz identidade na matriz de mudança de base, feita ao longo do conjunto das matrizes invertíveis, e a função determinante, sendo contínua e nunca se anulando ao longo dessa deformação, vai ter que ter sempre o mesmo sinal. A implicação recíproca é também verdadeira, mas a respectiva demonstração é menos elementar e não será aqui abordada (o leitor interessado poderá examinar o exercício I.18 para o caso particular de duas bases ortonormadas e o exercício III.6 para o caso geral). No caso particular do espaço vectorial dos vectores livres do nosso espaço da Geometria euclidiana, esta implicação recíproca pode ser demonstrada de modo simples se admitirmos uma propriedade, que já todos "verificámos experimentalmente" e que refere que, se não for possível deformar continuamente uma base u_1, u_2, u_3 numa base v_1, v_2, v_3, então é possível deformar continuamente a primeira base na base $v_1, v_2, -v_3$. Em qualquer caso, no que se vai seguir utilizaremos a definição apresentada atrás e não o conceito intuitivo de duas bases terem a mesma orientação.

I.4.4 Se E é um espaço vectorial real de dimensão n, chama-se *orientação* de E a uma aplicação α do conjunto $\Omega^n(E)$ das bases de E no conjunto $\{-1, 1\}$, tal que, quaisquer que sejam as bases $u_1, \dots, u_n$ e $v_1, \dots, v_n$ de E, se tenha $\alpha(u_1, \dots, u_n) = \alpha(v_1, \dots, v_n)$ se, e só se, as duas bases têm a mesma orientação. Por outras palavras a aplicação α deve ser constante sobre cada classe de equivalência e tomar valores distintos em classes de equivalência distintas.
Chama-se *espaço vectorial orientado* a um espaço vectorial no qual se fixou uma orientação. Às bases $u_1, \dots, u_n$, para as quais se tem $\alpha(u_1, \dots, u_n) = 1$ dá-se o nome de *bases directas* e àquelas para as quais $\alpha(u_1, \dots, u_n) = -1$, o de *bases retrógradas*.

[11]Uma criança consegue aprender qual é a sua mão direita antes de saber calcular o determinante de uma matriz.

Dito de outro modo, um espaço vectorial orientado é um espaço vectorial em que se dá uma regra que permita dizer quando é que uma base é directa ou retrógrada, mas isto de modo compatível com a definição I.4.1.

I.4.5 Sejam E um espaço vectorial real de dimensão n e $u_1, \ldots, u_n$ uma base fixada de E. Para cada $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, existe então uma, e uma só, orientação α de E, tal que $\alpha(u_1, \ldots, u_n) = \varepsilon$. Por outras palavras, uma orientação fica bem definida, se tomarmos uma base arbitrária e *decretarmos* se ela deve ser directa ou retrógrada. Em particular cada espaço vectorial real E de dimensão finita tem duas, e só duas orientações; se uma delas é α, a outra é $-\alpha$.

Dem: Basta definir, para cada base $v_1, \ldots, v_n$ de E, $\alpha(v_1, \ldots, v_n) = \varepsilon$, se as duas bases tiverem a mesma orientação, e $\alpha(v_1, \ldots, v_n) = -\varepsilon$, caso contrário. O facto de a aplicação α assim definida ser uma orientação é uma consequência simples de I.4.2. □

I.4.6 Repare-se que, na discussão anterior, admitimos também o caso em que o espaço vectorial E é $\{0\}$. Nesse caso, E admite uma única base, a saber, a família vazia de vectores, mas, mesmo assim, E admite ainda duas orientações, a saber, aquela para a qual a base em questão é directa (dizemos que esta é a *orientação positiva* de E) e aquela para a qual ela é retrógrada (dizemos que esta é a *orientação negativa* de E).

No caso em que $E \neq \{0\}$, $\Omega_n(E)$ tem, como referimos, duas classes de equivalência e dar uma orientação equivale a escolher uma dessas classes de equivalência (aquela cujos elementos são as bases aplicadas em 1).[12]

I.4.7 Se E é um espaço vectorial real de dimensão 1, uma base de E é simplesmente um vector não nulo e duas bases x e y têm a mesma orientação se, e só se, se tem $y = ax$, com $a > 0$ (os dois vectores têm o *mesmo sentido*). O conjunto das bases de E é simplesmente $E \setminus \{0\}$ e às duas classes de equivalência dá-se o nome de *semi-rectas abertas* de E.

Quando E está orientado, chamamos *vectores positivos* (respectivamente *negativos*) àqueles que constituem bases directas (respectivamente retrógradas). As semi-rectas abertas de E são assim o conjunto E_+ dos vectores positivos e o conjunto E_- dos vectores negativos. Em particular, constatamos que as semi-rectas abertas são conjuntos abertos convexos, uma vez que, fixada uma base directa x, E_+ e E_- são as imagens dos conjuntos abertos convexos $]0, +\infty[$ e $]-\infty, 0[$ de $\mathbb{R}$ pelo isomorfismo $t \mapsto tx$.

Orientar um espaço vectorial real de dimensão 1 equivale assim a escolher

[12]Alguns autores definem orientação de um espaço vectorial como sendo uma classe de equivalência, para a relação de equivalência definida em I.4.1. O que acabamos de dizer mostra que, para um espaço vectorial distinto de $\{0\}$, esta definição é equivalente à que apresentámos. No entanto, a definição apresentada por esses autores faz com que, ao contrário do que acontece com a que estamos a utilizar, o espaço vectorial $\{0\}$ tenha apenas uma orientação, o que é uma flagrante injustiça.

uma das duas semi-rectas abertas, aquela que vai ser constituída pelos vectores positivos para a orientação.

A geometria do complementar de $\{0\}$ num espaço vectorial real de dimensão 1 generaliza-se naturalmente quando estamos em presença de um espaço vectorial real E de dimensão n e de um subespaço vectorial de dimensão $n-1$.

I.4.8 Sejam E um espaço vectorial real de dimensão n e $F \subset E$ um *hiperplano*, isto é, um subespaço vectorial de dimensão $n-1$. Podemos então considerar o espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$, que tem dimensão 1, e a aplicação linear sobrejectiva $E \to \frac{E}{F}$, que a cada x associa a sua classe de equivalência $[x]_F$, cujo kernel é precisamente o subespaço vectorial F. O complementar $E \setminus F$, que é a imagem recíproca de $\frac{E}{F} \setminus \{0\}$, fica assim união de dois subconjuntos abertos convexos, a que damos o nome de *semi-espaços abertos* de E associados a F, nomeadamente o constituído pelos vectores $x \in E$ tais que $[x]_F$ pertence a uma das semi-rectas e aquele cujos elementos são os vectores x tais que $[x]_F$ pertence à outra semi-recta.
Nas condições anteriores, chamamos *orientação transversa* de F em E, a uma orientação do espaço vectorial $\frac{E}{F}$ de dimensão 1. Dada uma orientação transversa, notamos E_+ e E_- os dois semi-espaços abertos determinados por F, respectivamente o constituído pelos vectores x tais que $[x]_F$ é positivo e o constituído pelos vectores x tais que $[x]_F$ é negativo.
É claro que, no caso em que E tem dimensão 1, $\{0\}$ é um hiperplano de E e os semi-espaços abertos de E são precisamente as semi-rectas abertas de E (a aplicação linear canónica $E \to \frac{E}{\{0\}}$ é um isomorfismo).

I.4.9 O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial de dimensão n, com uma base privilegiada, a saber, a *base canónica* $e_1, \ldots, e_n$, onde e_j é o vector que tem uma coordenada 1 na posição j e todas as outras coordenadas 0. Chama-se *orientação canónica* de $\mathbb{R}^n$ a orientação para a qual essa base é directa, sendo esta a orientação que se considera em $\mathbb{R}^n$, sempre que não se faça aviso em contrário. No caso particular em que $n = 1$ a orientação canónica de $\mathbb{R}$ é aquela para o qual os vectores positivos são os números positivos e os vectores negativos são os números negativos.

I.4.10 Sejam E e F espaços vectoriais reais de dimensão n, munidos de orientações, e $\xi \colon E \to F$ um isomorfismo. Tem-se então que, ou ξ aplica bases directas de E em bases directas de F e bases retrógradas de E em bases retrógradas de F, caso em que dizemos que ξ *conserva as orientações*, ou ξ aplica bases directas de E em bases retrógradas de F e bases retrógradas de E em bases directas de F, caso em que dizemos que ξ *inverte as orientações*.
Dem: Tudo o que é preciso verificar é que, se $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_n$ são duas bases de E, elas têm a mesma orientação se, e só se, as bases

$\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n)$ e $\xi(v_1), \ldots, \xi(v_n)$ de F têm a mesma orientação. Ora, isso é uma consequência de que, se se tiver $v_j = \sum a_{k,j}\, u_k$, tem-se também

$$\xi(v_j) = \sum a_{k,j}\, \xi(u_k). \qquad \square$$

I.4.11 Sejam E e F espaços vectoriais reais, de dimensão n, e $\xi\colon E \to F$ um isomorfismo. Dada uma orientação de E, existe então uma, e uma só, orientação de F tal que ξ conserve as orientações (dizemos que esta última é obtida a partir da primeira por *transporte* por meio do isomorfismo ξ).
Dem: Toma-se uma orientação qualquer em F e, se essa não servir, serve a outra. $\square$

I.4.12 Como exemplo da situação anterior, temos aquele em que E é um espaço vectorial real de dimensão 1 e consideramos o hiperplano $\{0\} \subset E$ e o quociente $\frac{E}{\{0\}}$. A aplicação canónica $E \to \frac{E}{\{0\}}$, que vai ser assim um isomorfismo e dada uma orientação em E fica determinada uma orientação de $\frac{E}{\{0\}}$, isto é uma orientação transversa de $\{0\}$ em E, pela condição deste isomorfismo conservar as orientações. Constatamos que os semi-espaços abertos de E associados ao hiperplano $\{0\}$ são, neste caso, simplesmente as semi-rectas abertas e que as notações E_+ e E_- não dependem dos dois contextos.

No caso em que temos um isomorfismo $\xi\colon E \to E$, de um espaço vectorial E de dimensão finita sobre si mesmo, o facto de ξ conservar ou inverter as orientações não depende da orientação que se considera em E, desde que se considere a mesma no domínio e no codomínio. De facto, tem lugar a seguinte relação com o determinante:

I.4.13 Sejam E um espaço vectorial real de dimensão finita, sobre o qual consideramos uma das suas orientações, e $\xi\colon E \to E$ um isomorfismo. Tem-se então que ξ conserva as orientações se, e só se, $\det(\xi) > 0$.
Dem: Basta lembrar que, se $x_1, \ldots, x_n$ é uma base de E e $\xi(x_j) = \sum a_{k,j}\, x_k$, então $\det(\xi)$ é o determinante da matriz dos $a_{k,j}$, que não é mais do que a matriz de mudança da base $x_1, \ldots, x_n$ para a base $\xi(x_1), \ldots, \xi(x_n)$. $\square$

I.4.14 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial complexo de dimensão n e $\xi\colon E \to E$ um isomorfismo complexo. Considerando então E como espaço vectorial real de dimensão $2n$, tem-se então que ξ conserva as orientações.
Dem: Basta atender a que, por I.1.23, $\det_{\mathbb{R}}(\xi) = |\det_{\mathbb{C}}(\xi)|^2$, em particular $\det_{\mathbb{R}}(\xi) > 0$. $\square$

Apesar de, como já referimos, só fazer sentido falar de orientações para espaços vectoriais reais, uma das consequências do corolário anterior é a possibilidade de definir uma orientação canónica de qualquer espaço vectorial complexo, quando considerado como espaço vectorial real.

I.4.15 Seja E um espaço vectorial complexo de dimensão n. Existe então sobre E, enquanto espaço vectorial real, uma, e uma só, orientação, a que daremos o nome de *orientação canónica*, tal que, qualquer que seja a base complexa $x_1, \ldots, x_n$ de E, a base real $x_1, ix_1, x_2, ix_2, \ldots, x_n, ix_n$ seja directa.[13]

Dem: Tudo o que temos que verificar é que, se fixarmos uma base complexa $x_1, \ldots, x_n$ de E e considerarmos a orientação para a qual a base real $x_1, ix_1, \ldots, x_n, ix_n$ é directa, então, dada outra base complexa $y_1, \ldots, y_n$, a base real $y_1, iy_1, \ldots, y_n, iy_n$ é também directa. Ora, isso é uma consequência de o isomorfismo complexo $\xi: E \to E$, definido por $\xi(x_j) = y_j$, que, pelo corolário precedente, conserva as orientações, aplicar a primeira base na segunda. □

I.4.16 Se E e F são espaços vectoriais complexos de dimensão n e $\xi: E \to F$ é um isomorfismo complexo, então, considerando E e F como espaços vectoriais reais, com as orientações canónicas, ξ conserva as orientações.

Dem: Basta atender a que, se $x_1, \ldots, x_n$ é uma base complexa de E, então $\xi(x_1), \ldots, \xi(x_n)$ é uma base complexa de F e ξ aplica a base directa $x_1, ix_1, \ldots, x_n, ix_n$ de E na base directa $\xi(x_1), i\xi(x_1), \ldots, \xi(x_n), i\xi(x_n)$ de F. □

I.4.17 Seja E um espaço vectorial real de dimensão $m+n$, tal que tenha lugar uma soma directa $E = F \oplus G$, com F e G subespaços vectoriais de dimensões m e n respectivamente. Tem-se então:

a) Se $u_1, \ldots, u_m$ e $u'_1, \ldots, u'_m$ são duas bases de F com a mesma orientação (resp. com orientações opostas) e se $v_1, \ldots, v_n$ é uma base de G, então as bases de E $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ e $u'_1, \ldots, u'_m, v_1, \ldots, v_n$ têm a mesma orientação (resp. têm orientações opostas);

b) Se $u_1, \ldots, u_m$ é uma base de F e se $v_1, \ldots, v_n$ e $v'_1, \ldots, v'_n$ são bases de G com a mesma orientação (resp. com orientações opostas), então as bases de E $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ e $u_1, \ldots, u_m, v'_1, \ldots, v'_n$ têm a mesma orientação (resp. têm orientações opostas).

Dem: **a)** Se A é a matriz de mudança da base $u_1, \ldots, u_m$ para a base $u'_1, \ldots, u'_m$ e se notarmos I a matriz identidade de tipo $n \times n$, a matriz de mudança da base $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ para a base $u'_1, \ldots, u'_m, v_1, \ldots, v_n$ é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

tendo portanto determinante igual ao da matriz A.

b) Se B é a matriz de mudança da base $v_1, \ldots, v_n$ para a base $v'_1, \ldots, v'_n$ e se notarmos I a matriz identidade de tipo $m \times m$, a matriz de mudança da base $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ para a base $u_1, \ldots, u_m, v'_1, \ldots, v'_n$ é uma matriz da

[13] Alguns autores usam uma convenção diferente, considerando como directa a base $x_1, \ldots, x_n, ix_1, \ldots, ix_n$. A convenção aqui seguida tem a vantagem de funcionar melhor em relação com a definição em I.4.18.

forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

tendo portanto determinante igual ao da matriz B. □

I.4.18 Nas condições anteriores, dadas orientações α_F de F e α_G de G existe uma única orientação α_E de E, a que chamamos a *orientação associada à soma directa*, tal que, quaisquer que sejam as bases $u_1, \ldots, u_m$ de F e $v_1, \ldots, v_n$ de G, se tem, para a correspondente base $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ de E,

$$\alpha_E(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n) = \alpha_F(u_1, \ldots, u_m) \times \alpha_G(v_1, \ldots, v_n).$$

Além disso, se trocarmos uma das duas orientações α_F e α_G e conservarmos a outra, a orientação α_E vem trocada.
Dem: Consideremos uma base $u_1, \ldots, u_m$ de F e uma base $v_1, \ldots, v_n$ de G e a orientação α_E de E, para a qual

$$\alpha_E(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n) = \alpha_F(u_1, \ldots, u_m) \times \alpha_G(v_1, \ldots, v_n).$$

Usando o resultado precedente, vemos sucessivamente que, qualquer que seja a base $u'_1, \ldots, u'_m$ de F,

$$\alpha_E(u'_1, \ldots, u'_m, v_1, \ldots, v_n) = \alpha_F(u'_1, \ldots, u'_m) \times \alpha_G(v_1, \ldots, v_n)$$

e que, quaisquer que sejam as bases $u'_1, \ldots, u'_m$ de F e $v'_1, \ldots, v'_n$ de G,

$$\alpha_E(u'_1, \ldots, u'_m, v'_1, \ldots, v'_n) = \alpha_F(u'_1, \ldots, u'_m) \times \alpha_G(v'_1, \ldots, v'_n)$$

pelo que a orientação α_E verifica a condição do enunciado. A afirmação sobre o que sucede quando se troca uma das orientações é uma consequência imediata da definição. □

I.4.19 **(Nota)** Nas condições dos resultados anteriores, se tem lugar a soma directa $E = F \oplus G$, é claro que tem também lugar a soma directa $E = G \oplus F$. Dadas as bases $u_1, \ldots, u_m$ de F e $v_1, \ldots, v_n$ de G, podemos considerar as bases $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ e $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ de E e pode-se passar da primeira destas bases para a segunda fazendo sucessivamente $m \times n$ trocas de posição entre pares de elementos; podemos portanto concluir que estas duas bases têm a mesma orientação, no caso em que $m \times n$ é par e têm orientações opostas, no caso em que $m \times n$ é ímpar. Concluímos daqui que, dadas orientações α_F e α_G de F e de G, as orientações de E determinadas pelas somas directas $E = F \oplus G$ e $E = G \oplus F$ coincidem se, e só se, $m \times n$ é par.

Como aplicação directa da noção de orientação determinada por uma soma directa temos a orientação produto de um produto cartesiano de espaços vectoriais orientados.

I.4.20 Sejam E e F espaços vectoriais reais, com dimensões m e n, munidos de orientações α_E e α_F. Tem-se então que

$$E \times F = (E \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times F),$$

em que podemos considerar em $E \times \{0\}$ e em $\{0\} \times F$ as orientações α'_E e α'_F para as quais os isomorfismos canónicos $E \to E \times \{0\}$, $x \mapsto (x, 0)$, e $F \to \{0\} \times F$, $y \mapsto (0, y)$, conservam as orientações. Define-se então a *orientação produto* $\alpha_{E\times F} = \alpha_E \times \alpha_F$ de $E \times F$ como sendo a associada àquela soma directa e às orientações α'_E e α'_F. Concretizando a definição precedente, vemos que, se $u_1, \ldots, u_m$ é uma base de E e $v_1, \ldots, v_n$ é uma base de F, tem-se uma base correspondente

$$(u_1, 0), \ldots, (u_m, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_n)$$

de $E \times F$, para a qual

$$\begin{aligned}&\alpha_{E\times F}((u_1, 0), \ldots, (u_m, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_n)) = \\ &= \alpha_E(u_1, \ldots, u_m) \times \alpha_F(v_1, \ldots, v_n).\end{aligned}$$

Outra aplicação da noção de orientação associada a uma soma directa é a possibilidade de definir uma orientação induzida num hiperplano dum espaço vectorial orientado, quando é dada uma orientação transversa desse hiperplano.

I.4.21 Sejam E um espaço vectorial real de dimensão n, munido de uma orientação α_E, e $F \subset E$ um hiperplano. Para cada vector $x \in E \setminus F$ tem então lugar a soma directa $E = (\mathbb{R}x) \oplus F$ e definimos a *orientação* α_F de F *associada* a x e à orientação de E como sendo aquela para a qual a orientação dada α_E é a associada àquela soma directa, à orientação α_F e à orientação de $\mathbb{R}x$ para a qual x é uma base directa. Por outras palavras, para cada base $u_1, \ldots, u_{n-1}$ de F, $x, u_1, \ldots, u_{n-1}$ é uma base de E para a qual se tem

$$\alpha_F(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \alpha_E(x, u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

A propriedade fundamental desta noção é a de que, dado outro vector $y \in E \setminus F$, a orientação de F determinada pelo vector y coincide com a determinada pelo vector x se, e só se, x e y pertencem ao mesmo semi-espaço aberto de E determinado por F.

Dem: Fixemos uma base $u_1, \ldots, u_{n-1}$ de F. Dados dois vectores $x, y \in E \setminus F$, podemos escrever

$$y = a\,x + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\,u_j,$$

com $a \neq 0$, vindo então $[y]_F = a\,[x]_F$ e a matriz de mudança da base

$x, u_1, \ldots, u_{n-1}$ para a base $y, u_1, \ldots, u_{n-1}$ é

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e tem portanto determinante igual a a. Vemos assim que se tem $\alpha_E(x, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \alpha_E(y, u_1, \ldots, u_{n-1})$ se, e só se, $a > 0$, se, e só se, x e y pertencem ao mesmo semi-espaço aberto. □

I.4.22 Se E é um espaço vectorial real de dimensão n, munido de uma orientação α_E, e $F \subset E$ é um hiperplano, munido de uma orientação transversa, define-se a *orientação* α_F de F *induzida* pela de E e pela orientação transversa como sendo a associada a qualquer vector x no semi-espaço positivo, no sentido que acabamos de referir.
É claro que a orientação induzida vem trocada, se trocarmos a orientação transversa, mantendo a orientação de E, ou se trocarmos a orientação de E, mantendo a orientação transversa.

Terminamos esta secção com algumas observações sobre propriedades envolvendo as orientações nas dimensões mais baixas, nos casos em que se está também em presença de um produto interno.

I.4.23 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão 1.
a) Existe um, e um só, vector positivo x tal que $\|x\| = 1$, o *vector unitário positivo* de E.
b) x e $-x$ são os únicos vectores de E de norma 1, o segundo não sendo mais do que o vector unitário positivo para a orientação oposta de E.
Dem: Partindo de um vector não nulo arbitrário y, o vector $x = \frac{y}{\|y\|}$ verifica $\|x\| = 1$. Se x' é um vector arbitrário, tem-se $x' = ax$, com $a \in \mathbb{R}$, e então $\|x'\| = |a|\|x\| = |a|$, pelo que $\|x'\| = 1$ se, e só se, $a = 1$ ou $a = -1$, o que mostra que x e $-x$ são os únicos vectores de norma 1 de E, sendo claro que, destes, um, e um só, é positivo. □

I.4.24 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão 2.
a) Existe uma, e uma só, estrutura complexa $J\colon E \to E$ compatível com o produto interno e cuja orientação associada (cf. I.4.15) seja a dada. Para cada $u \neq 0$ em E, $J(u)$ é o único vector de E tal que $\|J(u)\| = \|u\|$, $\langle J(u), u\rangle = 0$ e $u, J(u)$ é uma base directa de E.[14]
b) J e $-J$ são as únicas estruturas complexas de E compatíveis com o produto interno, a segunda não sendo mais do que aquela cuja orientação associada é a oposta.

[14]Intuitivamente, J é a rotação de um quarto de volta no sentido directo.

Dem: Comecemos por reparar que, se $u \in E$ é não nulo, então o espaço dos vectores ortogonais a u tem dimensão 1, e portanto possui dois, e só dois, vectores v de norma $\|u\|$, um simétrico do outro, e que destes há um, e um só, para o qual a base u, v é directa.
Fixemos então um vector $u_0 \in E$ com $\|u_0\| = 1$ e seja $v_0 \in E$ o vector para o qual u_0, v_0 é uma base ortonormada directa. Seja $J \colon E \to E$ a aplicação linear definida pela condição de se ter $J(u_0) = v_0$ e $J(v_0) = -u_0$, aplicação linear que é um isomorfismo ortogonal, por aplicar a base ortonormada u_0, v_0 na base ortonormada $v_0, -u_0$, e que verifica $J \circ J = -Id_E$, sendo portanto uma estrutura complexa de E compatível com o produto interno. Se $u \in E$ é um vector não nulo arbitrário, podemos escrever $u = au_0 + bv_0$ e então

$$J(u) = aJ(u_0) + bJ(v_0) = -bu_0 + av_0,$$

o que mostra que $\|J(u)\| = a^2 + b^2 = \|u\|$ e que $\langle u, J(u)\rangle = 0$, pelo que $u, J(u)$ é uma base de E, esta base sendo directa uma vez que

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2 > 0.$$

Esta estrutura complexa compatível J de E verifica assim a condição enunciada em a). É claro que $-J$ é outra estrutura complexa compatível, para a qual, para cada $u \in E$ com $\|u\| = 1$, $u, -J(u)$ é uma base ortonormada retrógrada de E, pelo que $-J$ não verifica a condição de a), mas verifica-a relativamente à orientação oposta de E. Para terminar a demonstração resta-nos mostrar que, se J' é uma estrutura complexa compatível arbitrária de E, então $J' = J$ ou $J' = -J$. Ora, vem $\langle J'(u_0), J'(u_0)\rangle = \langle u_0, u_0\rangle = 1$, donde $\|J'(u_0)\| = 1$, e $\langle u_0, J'(u_0)\rangle = 0$ (cf. I.2.8), pelo que, como referimos no início, tem-se $J'(u_0) = v_0$ ou $J'(u_0) = -v_0$, no primeiro caso tendo-se também $J'(v_0) = J'(J'(u_0)) = -u_0$, donde $J' = J$, e no segundo caso tendo-se também $J'(v_0) = -J'(J'(u_0)) = u_0$, donde $J' = -J$. □

I.4.25 Sejam E e F espaços euclidianos orientados de dimensão 2 e sejam J e J' as correspondentes estruturas complexas de E e F (cf. a alínea a) de I.4.24). Seja $\lambda \colon E \to F$ uma aplicação linear real. Tem-se então que λ é uma aplicação linear conforme (cf. I.2.33) se, e só se, λ é linear complexa ou antilinear. Mais precisamente, no caso em que $\lambda \neq 0$ é conforme, λ é um isomorfismo, sendo linear complexa se conservar as orientações e antilinear se inverter as orientações.
Dem: Suponhamos que λ é linear complexa. Uma vez que E e F são espaços vectoriais complexos de dimensão 1, considerando em E e F os produtos internos complexos cujas partes reais são os produtos internos dados (cf. I.2.7), podemos ter em conta as alíneas b) e c) de I.2.34 para garantir que λ é uma aplicação linear conforme. Além disso, se $\lambda \neq 0$, λ é um isomorfismo complexo e portanto, tendo em conta I.4.16, λ conserva as orientações.
Suponhamos agora que λ é antilinear. Trocando a orientação de E e

substituindo J por $-J$, caímos no caso anterior, o que nos permite deduzir que λ é conforme e que, no caso em que $\lambda \neq 0$, λ é um isomorfismo que conserva as orientações, isto é, que inverte as orientações quando se considera a orientação original.
Uma vez que 0 é simultaneamente linear complexa e antilinear, resta-nos mostrar que, se $\lambda \neq 0$ é conforme, então λ é linear complexa ou antilinear. Seja $u \in E$ com $\|u\| = 1$. Tendo em conta I.4.24, $u, J(u)$ é uma base ortonormada directa de E e portanto, por I.2.33, os vectores $\lambda(u)$ e $\lambda(J(u))$ são ortogonais e com um mesma norma $c > 0$, em particular constituem uma base de F e portanto λ é um isomorfismo. Se λ conserva as orientações, esta base é directa e portanto, mais uma vez por I.4.24, $\lambda(J(u)) = J'(\lambda(u))$; neste caso tem-se também

$$\lambda \circ J(J(u)) = -\lambda(u) = J'(J'(\lambda(u))) = J'(\lambda(J(u))),$$

pelo que $\lambda \circ J = J' \circ \lambda$ (temos duas aplicações lineares a coincidir na base $u, J(u)$ de E) e λ é uma aplicação linear complexa. Se λ inverte as orientações então, trocando a orientação de E e subsituindo J por $-J$, caímos no caso anterior e deduzimos que, relativamente a $-J$, λ é linear complexa, sendo assim antilinear para a estrutura complexa original. □

§5. Cálculo Diferencial em espaços vectoriais de dimensão finita.

O leitor estudou decerto já os fundamentos do Cálculo Diferencial no quadro das aplicações definidas em abertos de $\mathbb{R}^m$ e com valores em $\mathbb{R}^n$. Nas aplicações à Geometria será muitas vezes útil trabalhar com uma ligeira generalização, em que os espaços cartesianos $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ são substituídos por espaços vectoriais reais E e F com dimensões m e n. É claro que um espaço vectorial real E de dimensão m é sempre isomorfo a $\mathbb{R}^m$, mas há muitos isomorfismos possíveis, um associado a cada base que se escolha em E, e os conceitos expressos directamente em termos de espaços vectoriais ajudam a sublinhar o seu aspecto invariante, isto é, a sua independência relativamente à escolha das bases. Na exposição que apresentamos em seguida tentaremos colocar o Cálculo Diferencial no quadro invariante referido. Algumas demonstrações mais simples serão omitidas, mas o leitor poderá facilmente construí-las, eventualmente por adaptação das que conhece no quadro dos espaços cartesianos.
Uma segunda observação é a de que, apesar de ser o quadro dos espaços vectoriais reais aquele que será mais importante no seguimento, há situações em que não envolve esforço suplementar considerar simultaneamente o caso em que o corpo dos escalares envolvido é $\mathbb{C}$.

I.5.1 Sejam E e F espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f\colon U \to F$ uma aplicação. Diz-se que f é *diferenciável* no ponto $x_0 \in U$ se existe uma aplicação linear $\xi: E \to F$ tal que, definindo $\alpha: U \to F$ pela igualdade

$$f(x) = f(x_0) + \xi(x - x_0) + \alpha(x),$$

a aplicação α verifique a seguinte propriedade: Para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $\|x - x_0\| \le \varepsilon$, tem-se $x \in U$ e

$$\|\alpha(x)\| \le \delta \|x - x_0\|$$

(é fácil de ver que esta condição, que, salvo no caso trivial em que E tem dimensão 0, pode ser expressa, de modo equivalente, por

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

não depende das normas que se consideram sobre E e F). Não pode haver mais do que uma aplicação linear $\xi: E \to F$ nas condições anteriores, como se pode concluir, por exemplo, a partir do resultado I.5.3 adiante, e a essa aplicação linear dá-se o nome de *derivada* ou *diferencial* de f no ponto x_0, sendo notada $Df(x_0)$ ou Df_{x_0}. Para cada $u \in E$ é costume referirmo-nos então ao valor $Df_{x_0}(u) \in F$ como sendo a derivada de f no ponto x_0 *na direcção* de u. Se f é diferenciável no ponto x_0, então f é contínua em x_0.

I.5.2 Repare-se que, no caso em que E e F são espaços vectoriais complexos, a definição anterior pode ser entendida em dois sentidos, conforme se exija que $\xi = Df_{x_0}$ seja uma aplicação linear real ou uma aplicação linear complexa. Temos assim uma noção de diferenciabilidade *no sentido real* e uma de diferenciabilidade *no sentido complexo*. No que se segue, quando falarmos simplesmente de diferenciabilidade estará subentendido que é o sentido real que está em jogo, mesmo no caso em que E e F são espaços vectoriais complexos. Quando quisermos significar a diferenciabilidade no sentido complexo, falaremos de aplicação $\mathbb{C}$-*diferenciável*.
É claro que toda a aplicação $\mathbb{C}$-diferenciável em x_0 é, em particular, diferenciável nesse ponto. Além disso, como se constata sem dificuldade, uma aplicação f diferenciável em x_0 é $\mathbb{C}$-diferenciável nesse ponto se, e só se, o seu diferencial Df_{x_0} é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear.
A observação anterior permite generalizar trivialmente muitas propriedades da diferenciabilidade à $\mathbb{C}$-diferenciabilidade. Para aligeirar o texto, abster-nos-emos de enunciar explicitamente a maioria das generalizações desse tipo.

I.5.3 Nas condições de I.5.1, se $\xi: E \to F$ é uma aplicação linear verificando as condições referidas, tem-se, para cada $u \in E$,

$$Df_{x_0}(u) = \xi(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t},$$

onde $t \in \mathbb{R}$, no caso da diferenciabilidade, e $t \in \mathbb{C}$, no caso da $\mathbb{C}$-diferen-

ciabilidade.
Dem: Atender a que, afastando já o caso trivial em que $u = 0$, deduz-se de

$$f(x_0 + tu) = f(x_0) + \xi(tu) + \alpha(x_0 + tu)$$

que

$$\frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} = \xi(u) + \frac{\alpha(x_0 + tu)}{t},$$

onde

$$\|\frac{\alpha(x_0 + tu)}{t}\| = \|u\| \frac{\|\alpha(x_0 + tu)\|}{\|tu\|} \to 0,$$

quando $t \to 0$. □

I.5.4 A diferenciabilidade de uma aplicação num ponto é uma noção local. Mais precisamente, suponhamos que $U \subset E$ é um aberto, que $f: U \to F$ é uma aplicação, que $V \subset U$ é outro aberto e que $x_0 \in V$. Tem-se então que f é diferenciável em x_0 se, e só se, a restrição $f_{/V}: V \to F$ é diferenciável em x_0 e, nesse caso, as aplicações lineares $Df(x_0)$ e $Df_{/V}(x_0)$ coincidem.

I.5.5 Se $U \subset E$ é um aberto e se $f: U \to F$ é uma aplicação constante, então f é diferenciável em todos os pontos $x \in U$ e com $Df_x = 0$.
Se $\xi: E \to F$ é uma aplicação linear, então ξ é diferenciável em todos os pontos $x \in E$ e tem-se $D\xi_x = \xi$.

I.5.6 Se $U \subset E$ é um aberto e $x_0 \in U$, então a derivação em x_0 de aplicações com valores num espaço vectorial F de dimensão finita é um *operador linear*, no sentido que, se $f: U \to F$ e $g: U \to F$ são diferenciáveis em x_0 e se $a \in \mathbb{R}$, então $f + g: U \to F$ e $af: U \to F$ são ainda diferenciáveis em x_0 e tem-se

$$D(f+g)_{x_0} = Df_{x_0} + Dg_{x_0}\ ,\ D(af)_{x_0} = aDf_{x_0}.$$

No caso em que F é mesmo um espaço vectorial complexo, esta última conclusão é válida, mais geralmente, para cada $a \in \mathbb{C}$.
É claro que a propriedade de diferenciabilidade da soma de duas aplicações diferenciáveis estende-se trivialmente, por indução, à soma de um número finito de aplicações diferenciáveis.

I.5.7 Sejam $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação diferenciável no ponto $x_0 \in U$. Se $\lambda: F \to G$ é uma aplicação linear, então $\lambda \circ f: U \to G$ é diferenciável em x_0 e

$$D(\lambda \circ f)_{x_0} = \lambda \circ Df_{x_0},$$

isto é,

$$D(\lambda \circ f)_{x_0}(u) = \lambda(Df_{x_0}(u)).$$

I.5.8 Sejam $U \subset E$ um aberto e, para cada $1 \le j \le p$, $f_j: U \to F_j$ uma aplicação. Notemos $f: U \to F_1 \times \cdots \times F_p$ a aplicação cujas componentes são os f_j, isto é, a definida por

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)).$$

Tem-se então que f é diferenciável em $x_0 \in U$ se, e só se, cada f_j é diferenciável em x_0 e, nesse caso,

$$Df(x_0)(u) = (Df_1(x_0)(u),, \ldots, Df_p(x_0)(u)).$$

Dem: Apesar de estarmos a omitir a muitas demonstrações e de a deste resultado poder ser feita de forma tão simples como as dos anteriores, é instrutivo reparar que este enunciado é uma consequência dos dois anteriores. Considerando, com efeito, as projecções e as injecções canónicas, $\pi_j: F_1 \times \cdots \times F_p \to F_j$ e $\iota_j: F_j \to F_1 \times \cdots \times F_p$, aplicações lineares definidas respectivamente por

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_p) = x_j, \quad \iota_j(x) = (0, \ldots, x, \ldots, 0\,)$$

(x na posição j), tem-se $f_j = \pi_j \circ f$ e $f = \sum \iota_j \circ f_j$. □

I.5.9 Sejam $U \subset E$ um aberto, $f: U \to F$ uma aplicação e $F' \subset F$ um subespaço vectorial tal que $f(U) \subset F'$. Tem-se então que f é diferenciável em $x_0 \in U$, como aplicação de U em F, se, e só se, isso acontece a f, como aplicação de U em F' e, nesse caso, Df_{x_0} é o mesmo dos dois pontos de vista.

Dem: É fácil constatar-se que a única coisa não trivial a demonstrar é que, se f é diferenciável em x_0, como aplicação de U em F, então a respectiva derivada $Df_{x_0}: E \to F$ é uma aplicação linear que toma valores no subespaço F'. Ora, isso resulta, por exemplo, da fórmula para $Df_{x_0}(u)$ em I.5.3, se nos lembrarmos de que F' é fechado em F. □

I.5.10 **(Teorema da derivada da função composta)** Sejam os espaços vectoriais de dimensão finita E, F e G, os abertos $U \subset E$ e $V \subset F$ e as aplicações $f: U \to V$, diferenciável em x_0, e $g: V \to G$, diferenciável em $f(x_0)$ (ao dizermos que $f: U \to V$ é diferenciável em x_0 estamos a significar que o é como aplicação de U em F). Tem-se então que $g \circ f: U \to G$ é diferenciável em x_0 e

$$D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{f(x_0)} \circ Df_{x_0},$$

isto é,

$$D(g \circ f)_{x_0}(u) = Dg_{f(x_0)}(Df_{x_0}(u)).$$

Repare-se que o resultado referido em I.5.7 é um caso particular deste.

Dem: Apesar de a demonstração deste resultado não apresentar novidades em relação à do que lhe corresponde no quadro dos espaços cartesianos $\mathbb{R}^n$, o

facto de ela ser um pouco mais delicada que as dos resultados anteriores leva-nos a apresentá-la aqui. Para uma melhor sistematização, dividimo-la em várias alíneas:
a) Tendo em conta a definição, tudo o que temos que mostrar é que, definindo uma aplicação $\gamma\colon U \to G$ por

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + Dg_{f(x_0)}(Df_{x_0}(x - x_0)) + \gamma(x),$$

a aplicação γ verifica a condição na definição de diferenciabilidade, isto é, para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $\|x - x_0\| \le \varepsilon$, se tenha $x \in U$ e $\|\gamma(x)\| \le \delta\|x - x_0\|$. Seja então dado $\delta > 0$.
b) Fixemos $M > 0$ tal que, para cada $u \in E$ e cada $v \in F$, se tenha

$$\|Df_{x_0}(u)\| \le M\|u\|, \quad \|Dg_{f(x_0)}(v)\| \le M\|v\|$$

(lembrar que toda a aplicação linear é contínua).
c) Tendo em conta a diferenciabilidade de f em x_0, considerando a aplicação $\alpha\colon U \to F$ definida por

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + \alpha(x),$$

podemos fixar $\varepsilon' > 0$ tal que, sempre que $\|x - x_0\| \le \varepsilon'$, se tenha $x \in U$ e

$$\|\alpha(x)\| \le \frac{\delta}{2M}\|x - x_0\|, \quad \|\alpha(x)\| \le \|x - x_0\|.$$

A segunda desigualdade implica, em particular, que, sempre que $\|x - x_0\| \le \varepsilon'$, tem-se

$$\|f(x) - f(x_0)\| \le \|Df_{x_0}(x - x_0)\| + \|\alpha(x)\| \le (M + 1)\|x - x_0\|.$$

d) Tendo em conta a diferenciabilidade de g em $f(x_0)$, considerando a aplicação $\beta\colon V \to G$ definida por

$$g(y) = g(f(x_0)) + Dg_{f(x_0)}(y - f(x_0)) + \beta(y),$$

podemos considerar $\varepsilon'' > 0$ tal que, sempre que $\|y - f(x_0)\| \le \varepsilon''$, tem-se $y \in V$ e

$$\|\beta(y)\| \le \frac{\delta}{2(M + 1)}\|y - f(x_0)\|.$$

e) Tendo em conta a continuidade de f em x_0, consideremos enfim $0 < \varepsilon \le \varepsilon'$ tal que, sempre que $\|x - x_0\| \le \varepsilon$, se tenha $\|f(x) - f(x_0)\| \le \varepsilon''$. Sempre que $\|x - x_0\| \le \varepsilon$, podemos escrever

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + Dg_{f(x_0)}(f(x) - f(x_0)) + \beta(f(x)) = \\ &= g(f(x_0)) + Dg_{f(x_0)}(Df_{x_0}(x - x_0) + \alpha(x)) + \beta(f(x)) = \\ &= g(f(x_0)) + Dg_{f(x_0)}(Df_{x_0}(x - x_0)) + Dg_{f(x_0)}(\alpha(x)) + \beta(f(x)), \end{aligned}$$

ou seja, $\gamma(x) = Dg_{f(x_0)}(\alpha(x)) + \beta(f(x))$, e portanto

$$\begin{aligned}\|\gamma(x)\| &\le \|Dg_{f(x_0)}(\alpha(x))\| + \|\beta(f(x))\| \le \\ &\le M\|\alpha(x)\| + \frac{\delta}{2(M+1)}\|f(x)-f(x_0)\| \le \\ &\le \frac{\delta}{2}\|x-x_0\| + \frac{\delta}{2}\|x-x_0\| = \delta\|x-x_0\|,\end{aligned}$$

como queríamos. □

I.5.11 Sejam F, G, H espaços vectoriais de dimensão finita e $\beta: F \times G \to H$ uma aplicação bilinear. Tem-se então que β é diferenciável em cada (x_0, y_0) e

$$D\beta_{(x_0,y_0)}(u,v) = \beta(u,y_0) + \beta(x_0,v).$$

Dem: Dado $(x_0, y_0) \in F \times G$, podemos escrever, para cada (x, y),

$$\beta(x,y) = \beta(x_0,y_0) + \beta(x-x_0,y_0) + \beta(x_0,y-y_0) + \beta(x-x_0,y-y_0),$$

onde, para um certo $M > 0$,

$$\|\beta(x-x_0,y-y_0)\| \le M\|x-x_0\|\|y-y_0\|,$$

e portanto, considerando por exemplo em $F \times G$ a norma do máximo,

$$\|\beta(x-x_0,y-y_0)\| \le M\|(x-x_0,y-y_0)\|^2.$$

Dado $\delta > 0$, vemos que, para $\varepsilon = \frac{\delta}{M}$, tem-se, para $\|(x-x_0,y-y_0)\| \le \varepsilon$,

$$\|\beta(x-x_0,y-y_0)\| \le \delta\|(x-x_0,y-y_0)\|,$$

que implica que β é diferenciável em (x_0, y_0) e que a aplicação linear $D\beta_{(x_0,y_0)}: F \times G \to H$ está definida por

$$D\beta_{(x_0,y_0)}(u,v) = \beta(u,y_0) + \beta(x_0,v).$$ □

A fórmula para a derivada de uma aplicação bilinear obtida atrás permite, em conjunto com o teorema de derivação da função composta, enunciar uma regra de derivação, de utilização muito frequente na prática, que generaliza a regra usual de derivação de um produto de funções reais.

I.5.12 **(Regra de Leibnitz)** Sejam F, G, H espaços vectoriais de dimensão finita e $\beta: F \times G \to H$ uma aplicação bilinear. Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ e $g: U \to G$ duas aplicações diferenciáveis em $x_0 \in U$. É então também diferenciável em x_0 a aplicação $h: U \to H$ definida por

$$h(x) = \beta(f(x), g(x))$$

e tem-se

$$Dh_{x_0}(u) = \beta(Df_{x_0}(u), g(x_0)) + \beta(f(x_0), Dg_{x_0}(u)).$$

Dem: Tem-se $h = \beta \circ \varphi$, onde $\varphi: U \to F \times G$ está definida por $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, pelo que, tendo em conta o resultado precedente e a regra de derivação da função composta,

$$\begin{aligned} Dh_{x_0}(u) &= D\beta_{\varphi(x_0)}(D\varphi_{x_0}(u)) = D\beta_{(f(x_0),g(x_0))}(Df_{x_0}(u), Dg_{x_0}(u)) = \\ &= \beta(Df_{x_0}(u), g(x_0)) + \beta(f(x_0), Dg_{x_0}(u)). \end{aligned} \qquad \square$$

I.5.13 A regra de Leibnitz usual, para a derivação do produto de duas funções reais, não é mais do que o caso particular do resultado precedente em que $F = G = H = \mathbb{R}$ e em que $\beta(y,z) = y \times z$. Esse caso particular conduz a uma mnemónica útil para a fórmula geral e que consiste em utilizar a notação multiplicativa para a aplicação bilinear β, escrevendo, para $y \in F$ e $z \in G$, $y \times z$ para significar $\beta(y,z) \in H$. Nesse quadro, a aplicação h pode ser notada como $f \times g$ e a regra de Leibnitz escreve-se na forma familiar

$$D(f \times g)_{x_0}(u) = Df_{x_0}(u) \times g(x_0) + f(x_0) \times Dg_{x_0}(u).$$

É claro que, em cada caso concreto, a fórmula anterior será apenas um passo intermédio, muitas vezes não explicitado, e que o símbolo $\times$ deverá ser substituído no fim pelo significado que tem nesse caso.
Para além da multiplicação de números reais (ou complexos) apresentamos agora exemplos de outras aplicações bilineares relativamente às quais é comum aplicar a regra de Leibnitz:
a) F é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ (igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\beta: \mathbb{K} \times F \to F$ é a multiplicação de um escalar por um vector.
b) F é um espaço vectorial real, munido de um produto interno, e $\beta: F \times F \to \mathbb{R}$ é o produto interno de vectores.
c) $\beta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o produto externo usual de dois vectores de $\mathbb{R}^3$.
d) F e G são espaços vectoriais de dimensão finita e $\beta: L(F;G) \times F \to G$ é a *aplicação de avaliação*, definida por $\beta(\lambda, y) = \lambda(y)$.
e) Sendo $\mathcal{M}_n$ o espaço vectorial das matrizes (reais ou complexas) com n linhas e n colunas, $\beta: \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ é a multiplicação de matrizes.
Será talvez um exercício útil explicitar, em cada um destes exemplos, qual o modo como se enuncia a correspondente regra de Leibnitz.

Com frequência teremos ocasião de estudar a diferenciabilidade de aplicações com valores num espaço de aplicações lineares $L(F;G)$. O resultado que apresentamos em seguida poderá ser útil nessa situação, por permitir reduzir esse estudo ao da diferenciabilidade de aplicações com valores em G. Note-se que, ao contrário dos resultados que temos vindo a estudar e que podem facilmente ser generalizados ao quadro dos espaços vectoriais normados de dimensão infinita, este utiliza de modo essencial o facto de F ser de dimensão finita.

I.5.14 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to L(F;G)$ uma aplicação. Para cada vector $v \in F$, notemos $f_{(v)}: U \to G$ a aplicação definida por $f_{(v)}(x) = f(x)(v)$. Tem-se então que f é diferenciável no ponto $x_0 \in U$ se, e só se, para cada v, $f_{(v)}$ é diferenciável em x_0 e, quando isso acontecer, tem-se, para cada $u \in E$,

$$Df_{x_0}(u)(v) = Df_{(v)_{x_0}}(u).$$ [15]

Mais precisamente, dada uma base $v_1, \ldots, v_n$ de F, para garantir que f é diferenciável em x_0, basta verificar que $f_{(v)}$ é diferenciável em x_0 quando v é um dos n vectores daquela base.

Dem: Comecemos por supor que f é diferenciável em x_0. Para cada $v \in F$, podemos considerar uma aplicação linear $\pi_{(v)}: L(F;G) \to G$, definida por $\mu \mapsto \mu(v)$. Uma vez que $f_{(v)} = \pi_{(v)} \circ f$, concluímos que $f_{(v)}$ é diferenciável em x_0 e que

$$Df_{(v)_{x_0}}(u) = \pi_{(v)}(Df_{x_0}(u)) = Df_{x_0}(u)(v).$$

Suponhamos, reciprocamente, que cada $f_{(v)}$ é diferenciável em x_0. Consideremos uma base $v_1, \ldots, v_n$ de F. Tem então lugar um isomorfismo

$$\Phi: L(F;G) \to G \times \cdots \times G, \quad \Phi(\mu) = (\mu(v_1), \ldots, \mu(v_n))$$

(lembrar que uma aplicação linear de F para G fica determinada quando se dão arbitrariamente as imagens dos vectores de uma base de F) e, portanto, utilizando I.5.7 com a aplicação linear Φ^{-1}, para verificar que f é diferenciável em x_0, basta verificar que $\Phi \circ f: U \to G \times \cdots \times G$ é diferenciável em x_0. Ora, isso é uma consequência de se ter

$$\Phi \circ f(x) = (f_{(v_1)}(x), \ldots, f_{(v_n)}(x)). \qquad \square$$

I.5.15 Suponhamos que F é um espaço vectorial real (respectivamente complexo) de dimensão finita, que $J \subset \mathbb{R}$ (respectivamente $J \subset \mathbb{C}$) é um aberto e que $f: J \to F$ é uma aplicação. Tem-se então que f é diferenciável (resp. é $\mathbb{C}$-diferenciável) no ponto $t_0 \in J$ se, e só se, existe o limite

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(t_0 + s) - f(t_0)}{s} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Esse limite é designado por $f'(t_0)$, ou $\frac{df}{dt}(t_0)$, e verificam-se as seguintes

---

[15] A fórmula anterior tem por vezes algo de chocante para quem a examina pela primeira vez: Para se calcular $Df_{x_0}(u)(v)$, calcula-se primeiro $f(x)(v)$ e depois deriva-se o resultado em x_0 na direcção de u. Poderia parecer mais natural considerar que o resultado deveria ser $Df_{x_0}(v)(u)$ mas, se repararmos bem é aquele, e não este, que faz sentido: Se f é uma aplicação definida num aberto de E e com valores em $L(F;G)$, faz sentido derivá-la num ponto na direcção de um vector de E e o resultado é então um elemento de $L(F;G)$, que aplicado a um vector de F dá um vector de G.

relações entre $Df_{t_0} \in L(\mathbb{R};F)$ (respectivamente $\in L(\mathbb{C};F)$) e $f'(t_0) \in F$:

a) $f'(t_0) = Df_{t_0}(1) = \Upsilon(Df_{t_0})$;
b) $Df_{t_0}(s) = sf'(t_0)$.

Repare-se que, no caso em que $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, não obrigatoriamente aberto mas de interior não vazio, é usual tomar-se a existência do limite anterior como definição da diferenciabilidade de f no ponto t_0.
Dem: O facto de a diferenciabilidade de f em t_0 implicar a existência do limite e o facto de este ser igual a $Df_{t_0}(1)$ não é mais do que um caso particular de I.5.3. Reciprocamente, supondo que existe o limite, que notamos $f'(t_0)$, podemos considerar a aplicação linear $\xi\colon \mathbb{R} \to F$ definida por $\xi(s) = sf'(t_0)$ e então, pondo

$$f(t) = f(t_0) + \xi(t-t_0) + \alpha(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \alpha(t),$$

tem-se que

$$\frac{\|\alpha(t)\|}{|t-t_0|} = \|\frac{\alpha(t)}{t-t_0}\| = \|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - f'(t_0)\|,$$

vai ter limite 0 quando $t \to t_0$. □

I.5.16 No contexto anterior podemos examinar algumas formulações alternativas do teorema da derivação da função composta quando alguns dos espaços envolvidos são abertos de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$, formulações que se reduzem trivialmente à formulação geral através das igualdades em a) e b) de I.5.15. Temos assim:
a) Sejam J um aberto de $\mathbb{R}$, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, $V \subset F$ um aberto e $f\colon J \to V$ e $g\colon V \to G$ duas aplicações diferenciáveis nos pontos $t_0 \in J$ e $f(t_0) \in V$, respectivamente. Tem-se então que $g \circ f\colon J \to G$ é diferenciável em t_0 e

$$(g \circ f)'(t_0) = Dg_{f(t_0)}(f'(t_0)).$$

b) Sejam J' um aberto de $\mathbb{R}$, E e G espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f\colon U \to J'$ e $g\colon J' \to G$ duas aplicações diferenciáveis nos pontos $x_0 \in U$ e $f(x_0) \in J'$, respectivamente. Tem-se então que $g \circ f\colon U \to G$ é diferenciável em x_0 e

$$D(g \circ f)_{x_0}(u) = Df_{x_0}(u) \cdot g'(f(x_0)).$$

c) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ e $J' \subset \mathbb{R}$ dois abertos, G um espaço vectorial de dimensão finita e $f\colon J \to J'$ e $g\colon J' \to G$ duas aplicações diferenciáveis nos pontos $t_0 \in U$ e $f(t_0) \in J'$, respectivamente. Tem-se então que $g \circ f\colon J \to G$ é diferenciável em t_0 e

$$(g \circ f)'(t_0) = f'(t_0) \cdot g'(f(t_0)).$$

São também válidos os resultados análogos no quadro dos abertos de $\mathbb{C}$ e da $\mathbb{C}$-diferenciabilidade.

A fórmula da média, que apresentamos em seguida em várias versões, permite majorar a variação de uma aplicação a partir de majorações envolvendo as respectivas derivadas. Ela é um instrumento de utilização frequente nas aplicações do Cálculo Diferencial

I.5.17 **(Fórmula da média)** Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, F um espaço vectorial de dimensão finita, munido de uma norma e $f: J \to F$ uma aplicação diferenciável em todos os pontos. Sejam $a, b \in J$ e $M \geq 0$ tais que, para cada t no intervalo de extremidades a e b, $\|f'(t)\| \leq M$. Tem-se então

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|.$$

Dem: Pode-se já supor que $a < b$, uma vez que o caso $a = b$ é trivial e que aquele em que $a > b$ se reduz ao primeiro por troca do papel das variáveis. Fixemos $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos o conjunto C dos $t \in [a, b]$ tais que

$$\|f(t) - f(a)\| \leq (M + \delta)(t - a).$$

Trata-se de um subconjunto fechado de $[a, b]$, que é não vazio, por conter a, pelo que podemos considerar o máximo c do conjunto C, que verifica portanto a desigualdade

$$\|f(c) - f(a)\| \leq (M + \delta)(c - a).$$

Se se tivesse $c < b$, então o facto de se ter

$$\lim_{t \to c} \|\frac{f(t) - f(c)}{t - c}\| = \|f'(c)\| \leq M < M + \delta$$

implicava a possibilidade de escolher t, com $c < t < b$ tal que

$$\|\frac{f(t) - f(c)}{t - c}\| < M + \delta,$$

de onde deduzíamos que

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(a)\| &\leq \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \leq \\ &\leq (M + \delta)(t - c) + (M + \delta)(c - a) = (M + \delta)(t - a),\end{aligned}$$

ou seja, $t \in C$, o que contrariava a hipótese de c ser o máximo de C. Tem-se assim $c = b$, ou seja, $\|f(b) - f(a)\| \leq (M + \delta)(b - a)$. Por fim, uma vez que $\delta > 0$ é arbitrário, a desigualdade anterior implica que se tem mesmo $\|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$. □

I.5.18 **(Segunda versão da fórmula da média)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de normas, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação diferenciável em todos os pontos. Sejam $x, y \in U$ e $M \geq 0$ tais que, para cada z no segmento de extremidades x e y, $z \in U$ e $\|Df_z\| \leq M$. Tem-se então

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|.$$

Dem: Basta aplicar a propriedade anterior à aplicação $g: J \to F$ definida por $g(t) = f(x + t(y - x))$, num certo intervalo aberto J, contendo $[0, 1]$, que verifica $g(0) = f(x)$, $g(1) = f(y)$ e

$$g'(t) = Df_{x+t(y-x)}(y - x).$$ □

I.5.19 **(Corolário)** Sejam $U \subset E$ um aberto *conexo* e $f: U \to F$ uma aplicação diferenciável em todos os pontos, tal que $Df_x = 0$, para cada $x \in U$. Tem-se então que f é uma aplicação constante.
Dem: Se o aberto U fosse mesmo convexo, tínhamos uma consequência directa do resultado precedente, visto que se pode tomar aí $M = 0$. No caso em que U é apenas conexo, fixado $x_0 \in U$, o facto de cada ponto de U admitir uma vizinhança aberta e convexa contida em U (por exemplo uma bola) implica, tendo em conta o caso particular atrás referido, que o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que $f(x) = f(x_0)$ é simultaneamente aberto e fechado em U, logo igual a U. □

I.5.20 **(Terceira versão da fórmula da média)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de normas, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação diferenciável em todos os pontos. Sejam $x, y \in U$, $\xi: E \to F$ uma aplicação linear e $\delta \geq 0$ tais que, para cada z no segmento de extremidades x e y, se tenha $z \in U$ e $\|Df_z - \xi\| \leq \delta$. Tem-se então

$$\|f(y) - f(x) - \xi(y - x)\| \leq \delta\|y - x\|.$$

Dem: Basta aplicar o resultado anterior à aplicação $g: U \to F$ definida por $g(x) = f(x) - \xi(x)$. □

§6. Aplicações de classe C^k.

I.6.1 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita e $U \subset E$ um aberto. Define-se recursivamente quando é que uma aplicação $f: U \to F$ é *de classe C^k*, do seguinte modo:
a) f diz-se de classe C^0 se for contínua.
b) f diz-se de classe C^{k+1} se for diferenciável em todos os pontos e se for de classe C^k a aplicação $Df: U \to L(E; F)$, que a x associa Df_x. Verifica-se imediatamente por indução que, se $f: U \to F$ é de classe C^k, então f é também de classe C^j, para cada $0 \leq j \leq k$. A aplicação $f: U \to F$ diz-se *de classe C^∞* se for de classe C^k, para cada k. Às aplicações de classe C^∞ daremos também o nome de *aplicações suaves* (trata-se de uma tentativa de

tradução do inglês *smooth*).
Repare-se que, mesmo no caso em que algum dos espaços vectoriais E e F é um espaço vectorial complexo, é a sua estrutura de espaço vectorial real que está exclusivamente em jogo nesta definição, assim como na quase totalidade desta secção. Apenas no fim da secção abordaremos o análogo das aplicações de classe C^k no quadro dos espaços vectoriais complexos e da $\mathbb{C}$-diferenciabilidade.

No caso em que E é o espaço cartesiano $\mathbb{R}^m$, a definição de aplicação de classe C^k costuma ser dada em termos das derivadas parciais e não da aplicação $Df: U \to L(\mathbb{R}^m; F)$. Veremos adiante a equivalência das duas definições (cf. I.7.6).

I.6.2 Sejam $U \subset E$ e $f: U \to F$ uma aplicação de classe C^k. Define-se recursivamente a *derivada de ordem* k de f como sendo a aplicação $D^k f: U \to L^k(E; F)$ verificando as seguintes propriedades:
a) $D^0 f: U \to L^0(E; F) = F$ coincide com a aplicação f.
b) Supondo que f é de classe C^{k+1}, podemos considerar a aplicação de classe C^k $Df: U \to L(E; F)$ e já sabemos recursivamente o que é a derivada de ordem k $D^k(Df): U \to L^k(E; L(E; F))$, definindo-se então a aplicação $D^{k+1} f: U \to L^{k+1}(E; F)$ como sendo a composição de $D^k(Df)$ com o isomorfismo

$$\Upsilon_k^{-1}: L^k(E; L(E; F)) \to L^{k+1}(E; F)$$

referido em I.1.6. Por outras palavras, tem-se

$$D^{k+1} f_x(u_1, \ldots, u_{k+1}) = D^k(Df)_x(u_1, \ldots, u_k)(u_{k+1}).$$

Em particular, a aplicação $D^1 f: U \to L(E; F)$ não é mais do que Df.

I.6.3 No sentido de compreender melhor a definição precedente, examinemos o caso particular, que se encontra com muita frequência, da derivada de segunda ordem. Se $f: U \to F$ é uma aplicação de classe C^2, a derivada de segunda ordem $D^2 f: U \to L^2(E; F)$ associa a cada $x \in U$ uma aplicação bilinear $D^2 f_x: E \times E \to F$ definida pela igualdade

$$D^2 f_x(u, v) = D(Df)_x(u)(v).$$

Repare-se no significado do segundo membro da igualdade anterior: Uma vez que $Df: U \to L(E; F)$ é uma aplicação de classe C^1, em particular diferenciável em cada ponto, faz sentido considerar a sua derivada no ponto x e na direcção de u, $D(Df)_x(u)$, a qual é um elemento do espaço de chegada $L(E; F)$, ou seja, uma aplicação linear $E \to F$, e portanto o valor $D(Df)_x(u)(v)$ desta aplicação linear em v é um elemento de F.
Apesar da interpretação do segundo membro da igualdade anterior que acabamos de referir, o cálculo da derivada de segunda ordem $D^2 f_x(u, v)$ é

feito usualmente de um modo ligeiramente diferente, de modo a evitar ter que derivar uma aplicação com valores num espaço de aplicações lineares $L(E;F)$: O que se faz é utilizar I.5.14 para calcular $D(Df)_x(u)(v)$. Assim, para determinar $D^2f_x(u,v)$, seguir-se-á em geral o seguinte caminho:
1) Considerando v fixado, considera-se a aplicação de U para F, que a x associa $Df_x(v)$.
2) Deriva-se a aplicação assim obtida no ponto x, na direcção de u.

I.6.4 **(Exemplos) a)** Se $f\colon U \to F$ é uma aplicação constante, então $Df_x = 0$, para cada $x \in U$, de onde resulta imediatamente que f é de classe C^∞ e com $D^k f = 0$, para cada $k \geq 1$.
b) Se $\xi\colon E \to F$ é linear, sabemos que ξ é diferenciável em todos os pontos e com $D\xi_x = \xi$, para cada $x \in E$, o que mostra que $D\xi$ é uma aplicação constante. Concluímos daqui que ξ é uma aplicação de classe C^∞ e que $D^k\xi = 0$, para cada $k \geq 2$.
c) Se $\beta\colon F \times G \to H$ é bilinear, já verificámos que β é diferenciável em todos os pontos e com $D\beta_{(x,y)}(u,v) = \beta(u,y) + \beta(x,v)$, o que implica, em particular, que $D\beta\colon F \times G \to L(F \times G; H)$ é uma aplicação linear. Concluímos daqui que β é uma aplicação de classe C^∞ e que $D^k\beta = 0$, para cada $k \geq 3$.

I.6.5 Sejam os espaços vectoriais de dimensão finita E, F e G, $U \subset E$ um aberto, $f, g\colon U \to F$ duas aplicações de classe C^k, $c \in \mathbb{R}$ e $\mu\colon F \to G$ uma aplicação linear. São então de classe C^k as aplicações $f + g\colon U \to F$, $cf\colon U \to F$ e $\mu \circ f\colon U \to G$ e tem-se

$$\begin{aligned} D^k(f+g)_x(u_1,\ldots,u_k) &= D^k f_x(u_1,\ldots,u_k) + D^k g_x(u_1,\ldots,u_k),\\ D^k(cf)_x(u_1,\ldots,u_k) &= cD^k f_x(u_1,\ldots,u_k)\\ D^k(\mu\circ f)_x(u_1,\ldots,u_k) &= \mu(D^k f_x(u_1,\ldots,u_k)). \end{aligned}$$

A segunda conclusão é válida, mais geralmente, para cada $c \in \mathbb{C}$, no caso em que F é um espaço vectorial complexo, e a primeira estende-se naturalmente, por indução, à soma de um número finito de aplicações de classe C^k.
Dem: A demonstração faz-se facilmente por indução em k. Repare-se, em relação com a propriedade de composição com uma aplicação linear μ, que a igualdade $D(\mu \circ f)_x(u) = \mu(Df_x(u))$ pode ser reescrita na forma

$$D(\mu \circ f)_x = L(Id_E; \mu)(Df_x),$$

onde $L(Id_E;\mu)\colon L(E;F) \to L(E;G)$ está definido em I.1.12. □

I.6.6 Se E e F são espaços vectoriais de dimensão finita, diz-se que uma aplicação $\overline{\lambda}\colon E \to F$ é *afim* se existe uma aplicação linear $\lambda\colon E \to F$ e um elemento $y \in F$ tais que $\overline{\lambda}(x) = \lambda(x) + y$, para cada $x \in E$. A aplicação linear λ e o elemento $y \in F$ estão univocamente determinados por $\overline{\lambda}$ (reparar que $y = \overline{\lambda}(0)$); diz-se que λ é a *aplicação linear associada* à aplicação afim.

É claro que toda a aplicação linear é uma aplicação afim, tendo ela mesmo como aplicação linear associada.

I.6.7 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, $\overline{\lambda}\colon E \to F$ uma aplicação afim, de aplicação linear associada λ, e $U \subset E$ e $V \subset F$ dois conjuntos abertos tais que $\overline{\lambda}(U) \subset V$. Se $f\colon V \to G$ é uma aplicação de classe C^k, tem-se então que $f \circ \overline{\lambda}_{/U}\colon U \to G$ é também de classe C^k e

$$D^k(f \circ \overline{\lambda})_x(u_1, \dots, u_k) = D^k f_{\overline{\lambda}(x)}(\lambda(u_1), \dots, \lambda(u_k)).$$

Dem: Como anteriormente, a demonstração faz-se facilmente por indução em k, reparando que a igualdade $D(f \circ \overline{\lambda}_{/U})_x(u) = Df_{\overline{\lambda}(x)}(\lambda(u))$ se pode escrever na forma

$$D(f \circ \overline{\lambda}_{/U})_x = L(\lambda; Id_G)(Df_{\overline{\lambda}(x)}),$$

onde $L(\lambda; Id_G)\colon L(F;G) \to L(E;G)$ é uma aplicação linear. □

I.6.8 **(A noção de aplicação de classe C^k é local)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um conjunto aberto e $f\colon U \to F$ uma aplicação. Tem-se então:

a) Se f é de classe C^k e se $V \subset U$ é outro aberto, a restrição $f_{/V}\colon V \to F$ é também de classe C^k e, para cada k, $D^k(f_{/V}) = (D^k f)_{/V}$.

b) Se $(U_j)_{j \in J}$ é uma família de abertos de E, de união U, tal que cada restrição $f_{/U_j}\colon U_j \to F$ seja de classe C^k (ou, o que é equivalente, se, para cada $x \in U$, existe um aberto V, com $x \in V \subset U$, tal que $f_{/V}$ seja de classe C^k), então f é de classe C^k.

I.6.9 Sejam os espaços vectoriais de dimensão finita E e, para cada $1 \le j \le p$, F_j, seja $U \subset E$ um aberto e seja, para cada $1 \le j \le p$, $f_j\colon U \to F_j$ uma aplicação. Seja $f\colon U \to F_1 \times \cdots \times F_p$ a aplicação cujas componentes são os f_j, isto é, a definida por

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

Tem-se então que f é de classe C^k se, e só se, cada f_j é de classe C^k e, nesse caso,

$$D^k f_x(u_1, \dots, u_k) = (D^k f_{1x}(u_1, \dots, u_k), \dots, D^k f_{p_x}(u_1, \dots, u_k)).$$

Dem: Pode-se apresentar uma justificação decalcada pela de I.5.8. □

I.6.10 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um conjunto aberto e $f\colon U \to F$ uma aplicação de classe C^k. Para cada $0 \le j \le k$ tem-se então que $D^j f\colon U \to L^j(E;F)$ é uma aplicação de classe C^{k-j} e

$$D^{k-j}(D^j f)_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_k) = D^k f_x(u_1, \dots, u_k).$$

Dem: Repare-se que o caso em que $j = 0$ é trivial e aquele em que $j = 1$ não é mais do que a definição. Façamos então a demonstração por indução em k, o caso $k = 0$ sendo trivial. Suponhamos então o resultado válido para um certo k e que $f: U \to F$ é de classe C^{k+1} e seja $0 \le j \le k$. Uma vez que $Df: U \to L(E; F)$ é de classe C^k, a hipótese de indução garante que $D^j(Df): U \to L^j(E; L(E; F))$ é de classe C^{k-j} e com

$$D^{k-j}(D^j(Df))_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_k) = D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k).$$

Reparemos agora que a igualdade de definição

$$D^{j+1}f_x(v_1, \dots, v_{j+1}) = D^j(Df)_x(v_1, \dots, v_j)(v_{j+1})$$

diz-nos que se tem, nas notações de I.1.6, $D^{j+1}f_x = \Upsilon_j^{-1}(D^j(Df)_x)$, onde $\Upsilon_j^{-1}: L^j(E; L(E; F)) \to L^{j+1}(E; F)$ é uma aplicação linear, pelo que podemos concluir que $D^{j+1}f: U \to L^{j+1}(E; F)$ é de classe C^{k-j}, ou seja, $C^{(k+1)-(j+1)}$, e que

$$\begin{aligned}
&D^{(k+1)-(j+1)}(D^{j+1}f)_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_{k+1}) = \\
&= \Upsilon_j^{-1}(\,D^{k-j}(D^j(Df))_x(u_1, \dots, u_{k-j})\,)(u_{k-j+1}, \dots, u_{k+1}) = \\
&= D^{k-j}(D^j(Df))_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \\
&= D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \\
&= D^{k+1}f_x(u_1, \dots, u_{k+1}),
\end{aligned}$$

o que termina a prova por indução. □

I.6.11 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação de classe C^k, tal que a aplicação derivada $D^k f: U \to L^k(E; F)$ seja de classe C^j. Tem-se então que f é de classe C^{k+j}.

Dem: Tal como anteriormente, fazemos a demonstração por indução em k, o caso $k = 0$ sendo trivial e o caso $k = 1$ não sendo mais do que a definição. Suponhamos o resultado válido para um certo k e que $f: U \to F$ é de classe C^{k+1} e com $D^{k+1}f: U \to L^{k+1}(E; F)$ de classe C^j. Tem-se então que $Df: U \to L(E; F)$ é de classe C^k e, reparando que a igualdade

$$D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = D^{k+1}f_x(u_1, \dots, u_{k+1})$$

pode ser reescrita na forma $D^k(Df)_x = \Upsilon_k(D^{k+1}f_x)$, concluímos que $D^k(Df): U \to L^k(E; L(E; F))$ é de classe C^j. Pela hipótese de indução podemos assim garantir que $Df: U \to L(E; F)$ é de classe C^{k+j} e portanto f é de classe C^{k+1+j}. □

I.6.12 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ e $V \subset F$ dois abertos e $f: U \to V$ e $g: V \to G$ duas aplicações de classe C^k. Tem-se então que $g \circ f: U \to G$ é também de classe C^k.

Dem: Tal como nos casos anteriores, a demonstração faz-se por indução em k. No caso $k = 0$ temos simplesmente a asserção de a composta de duas aplicações contínuas ser ainda contínua. Suponhamos que o resultado é válido para um certo k e que f e g são de classe C^{k+1}. Sabemos que $g \circ f$ é então diferenciável em todos os pontos e que, para cada $x \in U$,

$$D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x.$$

Uma vez que $Dg: V \to L(F;G)$ é de classe C^k e que $f: U \to V$ é de classe C^k, concluímos, pela hipótese de indução, que tem lugar uma aplicação de classe C^k de U em $L(F;G)$, que a cada x associa $Dg_{f(x)}$. Temos também uma aplicação de classe C^k $Df: U \to L(E;F)$, pelo que obtemos uma aplicação de classe C^k de U em $L(F;G) \times L(E;F)$, que a cada $x \in U$ associa o par $(Dg_{f(x)}, Df_x)$, aplicação essa que, composta com a aplicação de composição, que é uma aplicação bilinear, logo de classe C^∞, de $L(F;G) \times L(E;F)$ em $L(E;G)$, vai dar, mais uma vez pela hipótese de indução, uma aplicação de classe C^k de U em $L(E;G)$, a qual, como referimos, não é mais do que $D(g \circ f)$. Concluímos portanto que $g \circ f$ é de classe C^{k+1}. □

I.6.13 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita e $F' \subset F$ um subespaço vectorial. Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto e $f: U \to F$ uma aplicação tal que $f(U) \subset F'$. Tem-se então que f é de classe C^k, como aplicação de U em F, se, e só se, f é de classe C^k, como aplicação de U em F', e, nesse caso, $D^k f$ é o mesmo dos dois pontos de vista.

I.6.14 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to L(F;G)$ uma aplicação. Para cada vector $v \in F$, notemos $f_{(v)}: U \to G$ a aplicação definida por $f_{(v)}(x) = f(x)(v)$. Tem-se então que f é de classe C^k se, e só se, para cada v, $f_{(v)}$ é de classe C^k e, quando isso acontecer, tem-se, para $u_1, \ldots, u_k \in E$,

$$D^k f_{x_0}(u_1, \ldots, u_k)(v) = D^k f_{(v)x_0}(u_1, \ldots, u_k).$$

Mais precisamente, dada uma base $v_1, \ldots, v_n$ de F, para garantir que f é de classe C^k, basta verificar que $f_{(v)}$ é de classe C^k quando v é um dos n vectores daquela base.
Dem: Basta adaptar trivialmente a demonstração apresentada para I.5.14. □

I.6.15 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um aberto, F um espaço vectorial de dimensão finita e $f: J \to F$ uma aplicação de classe C^k. Define-se então uma aplicação $f^{(k)}: J \to F$ como sendo a composta da aplicação $D^k f: J \to L^k(\mathbb{R}; F)$ com o isomorfismo canónico $\Upsilon: L^k(\mathbb{R}; F) \to F$ (cf. I.1.5). Por outras palavras,

$$f^{(k)}(t) = D^k f_t(1, \ldots, 1).$$

É claro que $f^{(1)}$ é o que atrás se chamou f' e, em vez da notação $f^{(2)}$, também é costume escrever f''. Uma notação alternativa bem conhecida para $f^{(k)}(t)$ é $\frac{d^k f}{dt^k}(t)$.

Vamos agora estabelecer uma propriedade muito importante da derivada de segunda ordem de uma aplicação de classe C^2, nomeadamente que ela é sempre, em cada ponto, uma aplicação bilinear simétrica. Começamos, para isso, por demonstrar um lema.

I.6.16 **(Lema)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto, $f\colon U \to F$ uma aplicação de classe C^2 e $x_0 \in U$. Para cada $\delta > 0$, existe então $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $u, v \in E$ verificam $\|u\| \le \varepsilon$ e $\|v\| \le \varepsilon$, tem-se

$$\|f(x_0 + u + v) - f(x_0 + u) - f(x_0 + v) + f(x_0) - D^2 f_{x_0}(u, v)\| \le \delta \|u\| \|v\|.$$

Dem: Seja $r > 0$ tal que a bola fechada de centro x_0 e raio r esteja contida em U e que, para cada x nessa bola fechada, $\|D(Df)_x - D(Df)_{x_0}\| \le \delta$ e tomemos $\varepsilon = \frac{r}{2}$. Seja $u \in E$ tal que $\|u\| \le \varepsilon$ e consideremos a aplicação $g_{(u)}$, com valores em F, definida por

$$g_{(u)}(y) = f(x_0 + u + y) - f(x_0 + y)$$

no aberto de E, contendo a bola fechada de centro 0 e raio ε, cujos elementos são os y tais que $x_0 + y \in U$ e $x_0 + u + y \in U$. Tem-se

$$D{g_{(u)}}_y(v) = Df_{x_0+u+y}(v) - Df_{x_0+y}(v)$$

ou seja, $D{g_{(u)}}_y = Df_{x_0+u+y} - Df_{x_0+y}$, e portanto, tendo em conta a terceira versão da fórmula da média em I.5.20, com $\xi = D(Df)_{x_0}\colon E \to L(E; F)$, podemos concluir que, para cada y na bola fechada de centro 0 e raio ε,

$$\|D{g_{(u)}}_y - D(Df)_{x_0}(u)\| = \|Df_{x_0+u+y} - Df_{x_0+y} - D(Df)_{x_0}(u)\| \le \delta \|u\|.$$

Podemos agora aplicar segunda vez a mesma versão da fórmula da média, com $\xi = D(Df)_{x_0}(u)\colon E \to F$, para garantir que, para cada $v \in E$ com $\|v\| \le \varepsilon$,

$$\begin{aligned}&\|f(x_0 + u + v) - f(x_0 + u) - f(x_0 + v) + f(x_0) - D^2 f_{x_0}(u, v)\| = \\ &= \|g_{(u)}(v) - g_{(u)}(0) - D(Df)_{x_0}(u)(v)\| \le \delta \|u\| \|v\|.\end{aligned}$$ □

I.6.17 **(Simetria da derivada de segunda ordem)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f\colon U \to F$ uma aplicação de classe C^2. Para cada $x \in U$, tem-se então que a derivada de segunda ordem

$$D^2 f_x\colon E \times E \to F$$

é uma aplicação bilinear simétrica, isto é, tem-se $D^2 f_x(u, v) = D^2 f_x(v, u)$, quaisquer que sejam $u, v \in E$.
Dem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta o lema anterior, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $\|u\| \le \varepsilon$ e $\|v\| \le \varepsilon$, tem-se

$$\|f(x+u+v)-f(x+u)-f(x+v)+f(x)-D^2f_x(u,v)\| \le \delta\|u\|\|v\|,$$

assim como, evidentemente, a desigualdade que se obtém desta por troca dos papéis de u e v. Uma vez que a soma das quatro primeiras parcelas dentro da norma no primeiro membro fica invariante por troca dos papéis de u e v, concluímos que, sempre que $\|u\| \le \varepsilon$ e $\|v\| \le \varepsilon$, tem-se

$$\|D^2f_x(v,u)-D^2f_x(u,v)\| \le 2\delta\|u\|\|v\|.$$

Deduzimos agora que, se u e v são vectores não nulos arbitrários de E, podemos escrever

$$u = \frac{\|u\|}{\varepsilon}\,\frac{\varepsilon u}{\|u\|}, \quad v = \frac{\|v\|}{\varepsilon}\,\frac{\varepsilon v}{\|v\|},$$

com $\frac{\varepsilon u}{\|u\|}$ e $\frac{\varepsilon v}{\|v\|}$ vectores de norma ε, pelo que podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\|D^2f_x(v,u)-D^2f_x(u,v)\| = \\
&= \frac{\|u\|}{\varepsilon}\frac{\|v\|}{\varepsilon}\|D^2f_x(\frac{\varepsilon v}{\|v\|},\frac{\varepsilon u}{\|u\|}) - D^2f_x(\frac{\varepsilon u}{\|u\|},\frac{\varepsilon v}{\|v\|})\| \le \\
&\le \frac{\|u\|}{\varepsilon}\frac{\|v\|}{\varepsilon} \times 2\,\delta\,\varepsilon^2 = 2\delta\|u\|\|v\|,
\end{aligned}$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de $\delta > 0$, implica que

$$\|D^2f_x(v,u)-D^2f_x(u,v)\| = 0,$$

isto é, $D^2f_x(u,v) = D^2f_x(v,u)$, o que termina a demonstração, uma vez que esta igualdade é trivialmente também verificada quando um dos vectores u e v é 0. □

I.6.18 **(Corolário)** Sejam $U \subset E$ um aberto e $f\colon U \to F$ uma aplicação de classe C^k. Então, para cada $x \in U$, a aplicação multilinear $D^kf_x\colon E \times \cdots \times E \to F$ é simétrica.

Dem: A demonstração faz-se por indução em k, a partir do caso $k = 2$, que já foi demonstrado. Na passagem de k para $k+1$, para vermos que $D^{k+1}f_x \in L^{k+1}(E;F)$ é simétrica, basta vermos que $D^{k+1}f_x(u_1,\ldots,u_{k+1})$ não muda quando se troca u_j com u_{j+1}. No caso em que $j \le k-1$, isso é uma consequência da hipótese de indução e do facto de se ter

$$D^{k+1}f_x(u_1,\ldots,u_{k+1}) = D^k(Df)_x(u_1,\ldots,u_k)(u_{k+1}).$$

No caso em que $j = k$, isso é uma consequência da igualdade

$$D^{k+1}f_x(u_1,\ldots,u_{k+1}) = D^{k-1}(D^2f)_x(u_1,\ldots,u_{k-1})(u_k,u_{k+1}),$$

desde que se repare que a aplicação de classe C^{k-1} $D^2f\colon U \to L^2(E;F)$ toma valores no subespaço vectorial $L^2_{sim}(E;F)$ de $L^2(E;F)$, formado pelas aplicações bilineares simétricas, o que implica que $D^{k-1}(D^2f)_x$ aplica E^{k-1} em $L^2_{sim}(E;F)$. □

Como referimos no início desta secção, até agora apenas a diferenciabilidade no sentido real interveio no que estivémos a estudar. Vamos agora abordar rapidamente a adaptação do que temos estado a fazer para o quadro da $\mathbb{C}$-diferenciabilidade.

I.6.19 Sejam E e F espaços vectoriais complexos de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação. Diz-se que f é uma *aplicação holomorfa* se f é uma aplicação suave (isto é, de classe C^∞, relativamente às estruturas de espaço vectorial real de E e de F) e, para cada $x \in U$, f é $\mathbb{C}$-diferenciável em x (isto é, cada $Df_x: E \to F$ é uma aplicação linear complexa).

I.6.20 No sentido de aligeirar o texto, abstemo-nos de enunciar explicitamente os resultados sobre aplicações holomorfas que resultam trivialmente dos correspondentes resultados sobre aplicações suaves e da constatação que as derivadas envolvidas são efectivamente aplicações lineares complexas. Por exemplo, as constantes são holomorfas, tal como o são as aplicações lineares complexas e as aplicações bilineares complexas, a composta de aplicações holomorfas é holomorfa, etc…

A definição de aplicação holomorfa levanta talvez duas questões: Uma sobre se não estaremos a "pedir demais", outra sobre se não estaremos a "pedir de menos".
A primeira questão tem a ver com a razão por que nos limitamos a estudar as aplicações de classe C^∞ que são $\mathbb{C}$-diferenciáveis em cada ponto e não estudamos, mais geralmente, as aplicações de classe C^k que são $\mathbb{C}$-diferenciáveis em cada ponto. A explicação está em que não se ganhava nada com a generalização, na medida em se pode provar que toda a aplicação que seja $\mathbb{C}$-diferenciável em todos os pontos é automaticamente de classe C^∞ (propriedade que evidentemente não é válida no quadro da diferenciabilidade no sentido real). A propriedade que acabamos de referir é extremamente forte e está infelizmente fora de questão podermos abordar a sua justificação neste curso (o seu local natural é num curso sobre funções de várias variáveis complexas).
A segunda questão tem a ver com a razão por que pedimos simplesmente que a aplicação seja de classe C^∞ e $\mathbb{C}$-diferenciável em todos os pontos e não exigimos também que a aplicação $Df: U \to L_{\mathbb{C}}(E;F)$ seja ainda $\mathbb{C}$-diferenciável em todos os pontos. Esta segunda questão tem felizmente, e como veremos a seguir, uma resposta muito mais simples que a primeira.

I.6.21 Sejam E e F espaços vectoriais complexos de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação holomorfa. Tem-se então que a aplicação $Df: U \to L_{\mathbb{C}}(E; F)$ é também holomorfa e, para cada $x \in U$, a derivada $D^2 f_x: E \times E \to F$ é bilinear complexa.

Dem: Como vamos ver, o resultado vai ser uma consequência simples do facto de a derivada de segunda ordem em cada ponto ser uma aplicação bilinear simétrica. Uma vez que $Df: U \to L(E; F)$ é de classe C^∞, por isso acontecer a f, e toma valores em $L_{\mathbb{C}}(E; F)$, para vermos que esta aplicação é holomorfa tudo o que temos que verificar é que, para cada $x \in U$, $D(Df)_x: E \to L_{\mathbb{C}}(E; F)$ é mesmo uma aplicação linear complexa. Tendo em conta a igualdade de definição

$$D^2 f_x(u, v) = D(Df)_x(u)(v),$$

vemos que a aplicação bilinear $D^2 f_x: E \times E \to F$ é $\mathbb{C}$-linear na segunda variável e que o que queremos provar é que ela é também $\mathbb{C}$-linear na primeira variável. Ora, isso resulta do facto de esta aplicação bilinear ser simétrica, visto que podemos escrever, para cada $a \in \mathbb{C}$,

$$D^2 f_x(au, v) = D^2 f_x(v, au) = a\, D^2 f_x(v, u) = a\, D^2 f_x(u, v). \qquad \square$$

I.6.22 Nas condições anteriores, para cada k, tem-se, mais geralmente, que as derivadas $D^k f_x: E^k \to F$ são multilineares complexas e a aplicação $D^k f: U \to L^k_{\mathbb{C}}(E; F)$ é holomorfa.

Dem: Demonstramos, por indução em $k \geq 1$ que cada $D^k f: U \to L^k_{\mathbb{C}}(E; F)$ é holomorfa e cada $D^{k+1} f_x: E^{k+1} \to F$ é multilinear complexa, o caso $k = 1$ sendo o resultado precedente. Supondo o resultado verdadeiro para um certo k, podemos utilizá-lo com a aplicação holomorfa $Df: U \to L_{\mathbb{C}}(E; F)$ para garantir que

$$D^{k+1}(Df)_x: E^{k+1} \to L_{\mathbb{C}}(E; F)$$

é multilinear complexa e a igualdade de definição

$$D^{k+2} f_x(u_1, \ldots, u_{k+2}) = D^{k+1}(Df)_x(u_1, \ldots, u_{k+1})(u_{k+2})$$

mostra então que $D^{k+2} f_x: E^{k+2} \to F$ é multilinear complexa. Este último facto implica que a aplicação suave $D^{k+1} f: U \to L^{k+1}_{\mathbb{C}}(E; F)$ é holomorfa, isto é, que cada $D(D^{k+1} f)_x: E \to L^{k+1}_{\mathbb{C}}(E; F)$ é linear complexa, se tivermos em conta a igualdade

$$D(D^{k+1} f)_x(u_1)(u_2, \ldots, u_{k+2}) = D^{k+2} f_x(u_1, u_2, \ldots, u_{k+2}). \qquad \square$$

§7. Derivadas parciais.

I.7.1 Sejam os espaços vectoriais de dimensão finita $E_1, \dots, E_p$ e F, o conjunto aberto $U \subset E_1 \times \cdots \times E_p$ e a aplicação $f: U \to F$. Se $(x_{1_0}, \dots, x_{p_0}) \in U$, e se $1 \le j \le p$, diz-se que f é *j-parcialmente diferenciável* naquele ponto se for diferenciável em x_{j_0}, como função da j-ésima variável, isto é, se, sendo U_j o aberto de E_j, que contém x_{j_0},

$$U_j = \{x_j \in E_j \mid (x_{1_0}, \dots, x_{j-1_0}, x_j, x_{j+1_0}, \dots, x_{p_0}) \in U\},$$

a aplicação $f_j: U_j \to F$, definida por

$$f_j(x_j) = f(x_{1_0}, \dots, x_{j-1_0}, x_j, x_{j+1_0}, \dots, x_{p_0}),$$

é diferenciável em x_{j_0}. Nesse caso, define-se a j-ésima *derivada parcial* de f naquele ponto como sendo o elemento

$$D_j f(x_{1_0}, \dots, x_{p_0}) = Df_j(x_{j_0}) \in L(E_j; F),$$

que se nota também $D_j f_{(x_{1_0}, \dots, x_{p_0})}$.

I.7.2 Nas condições anteriores, e no caso em que um dos espaços vectoriais E_j é $\mathbb{R}$, usa-se a notação

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{1_0}, \dots, x_{p_0})$$

para o elemento

$$D_j f(x_{1_0}, \dots, x_{p_0})(1) = \Upsilon(D_j f(x_{1_0}, \dots, x_{p_0})) \in F$$

(comparar com I.5.15).

I.7.3 Se U é um aberto de $E_1 \times \cdots \times E_p$ e se $f: U \to F$ é diferenciável no ponto $(x_{1_0}, \dots, x_{p_0}) \in U$, então, para cada $1 \le j \le p$, f é também j-parcialmente diferenciável nesse ponto, tendo-se as seguintes relações entre a derivada de f e as respectivas derivadas parciais:

$$D_j f_{(x_{1_0}, \dots, x_{p_0})}(u) = Df_{(x_{1_0}, \dots, x_{p_0})}(0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$$

(u na posição j),

$$Df_{(x_{1_0}, \dots, x_{p_0})}(u_1, \dots, u_p) = \sum_{j=1}^{p} D_j f_{(x_{1_0}, \dots, x_{p_0})}(u_j).$$

Dem: A primeira igualdade é uma consequência simples do teorema da derivação da função composta e a segunda resulta da primeira, tendo em conta a linearidade da derivada e o facto de $(u_1, \ldots, u_p)$ ser soma de p parcelas, cada uma com uma das coordenadas, j, igual a u_j e as restantes coordenadas nulas. □

I.7.4 **(Teorema Fundamental)** Sejam U um aberto de $E_1 \times \cdots \times E_p$ e $f: U \to F$ uma aplicação que, para cada $1 \le j \le p$, seja j-parcialmente diferenciável em todos os pontos e com $D_j f: U \to L(E_j; F)$ contínua. Tem-se então que f é diferenciável em todos os pontos.

Dem: Para ver que f é diferenciável no ponto $(x_{10}, \ldots, x_{p0})$, basta ver que isso acontece à sua restrição a um aberto mais pequeno que contenha esse ponto, pelo que se pode já supor que U é da forma $U_1 \times \cdots \times U_p$, com cada U_j aberto convexo de E_j, contendo x_{j0}. Nesse caso, escrevemos

$$f(x_1, \ldots, x_p) = f(x_{10}, \ldots, x_{p0}) + \sum_{j=1}^{p} g_j(x_1, \ldots, x_p),$$

onde

$$\begin{aligned} g_j(x_1, \ldots, x_p) = f(&x_{10}, \ldots, x_{j-1\,0}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_p) - \\ &- f(x_{10}, \ldots, x_{j-1\,0}, x_{j0}, x_{j+1}, \ldots, x_p), \end{aligned}$$

e, para provarmos a diferenciabilidade de f em $(x_{10}, \ldots, x_{p0})$, ficamos reduzidos a provar a diferenciabilidade de cada g_j nesse ponto. Para isso, escrevemos

$$\begin{aligned} g_j(x_1, \ldots, x_p) = g_j(x_{10}, \ldots, x_{p0}) &+ D_j f_{(x_{10}, \ldots, x_{p0})}(x_j - x_{j0}) + \\ &+ \alpha(x_1, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

e ficamos reduzidos a provar que a aplicação α verifica a condição na definição de diferenciabilidade, o que é uma consequência simples da continuidade de $D_j f$ e da terceira versão da fórmula da média (cf. I.5.20). □

I.7.5 Sejam U um aberto de $E_1 \times \cdots \times E_p$ e $f: U \to F$ uma aplicação. Tem-se então que f é de classe C^{k+1} se, e só se, para cada $1 \le j \le p$, f é j-parcialmente diferenciável em todos os pontos e $D_j f: U \to L(E_j; F)$ é uma aplicação de classe C^k.

Dem: A base da demonstração é o resultado anterior. Consideram-se, além disso, as injecções canónicas $\iota_j: E_j \to E_1 \times \cdots \times E_p$ e as projecções canónicas $\pi_j: E_1 \times \cdots \times E_p \to E_j$, às quais ficam associadas aplicações lineares

$$\begin{aligned} L(\iota_j; Id_F)&: L(E_1 \times \cdots \times E_p; F) \to L(E_j; F), \\ L(\pi_j; Id_F)&: L(E_j; F) \to L(E_1 \times \cdots \times E_p; F), \end{aligned}$$

bastando então reparar que as fórmulas de I.7.3 podem ser traduzidas na forma

$$D_jf = L(\iota_j; Id_F) \circ Df,$$
$$Df = \sum_{j=1}^{p} L(\pi_j; Id_F) \circ D_jf. \qquad \square$$

I.7.6 **(Corolário)** Sejam F um espaço vectorial de dimensão finita, $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação. tem-se então que f é de classe C^{k+1} se, e só se, f é j-parcialmente diferenciável em todos os pontos e cada aplicação $\frac{\partial f}{\partial x_j}: U \to F$ é de classe C^k.

Dem: Basta atender a que, tendo em conta I.6.14, é equivalente dizer que $D_jf: U \to L(\mathbb{R}; F)$ é de classe C^k e dizer que $\frac{\partial f}{\partial x_j}: U \to F$ é de classe C^k. $\square$

I.7.7 **(Corolário)** Seja $\xi: E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ uma aplicação multilinear. Tem-se então que ξ é de classe C^∞ e

$$D\xi_{(x_1,\ldots,x_p)}(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{j=1}^{p} \xi(x_1, \ldots, x_{j-1}, u_j, x_{j+1}, \ldots, x_p).$$ [16]

Dem: A demonstração faz-se por indução em p, reparando que o facto de ξ ser multilinear vai implicar que ξ é parcialmente diferenciável em cada ponto relativamente a cada variável, com

$$D_j\xi_{(x_1,\ldots,x_p)}(u_j) = \xi(x_1, \ldots, x_{j-1}, u_j, x_{j+1}, \ldots, x_p),$$

o facto de cada $D_j\xi: E_1 \times \cdots \times E_p \to L(E_j; F)$ ser de classe C^∞ sendo então uma consequência da hipótese de indução e do facto de a composta de aplicações de classe C^∞ ser de classe C^∞. $\square$

I.7.8 **(Regra de Leibnitz generalizada)** Seja $\xi: F_1 \times \cdots \times F_p \to G$ uma aplicação multilinear. Sejam $U \subset E$ um aberto e, para cada $1 \le j \le p$, $f_j: U \to F_j$ uma aplicação diferenciável no ponto $x_0 \in U$ (resp. uma aplicação de classe C^k). Tem-se então que a aplicação $h: U \to G$, definida por

$$h(x) = \xi(f_1(x), \ldots, f_p(x)),$$

é também diferenciável em x_0 e com

[16] Repare-se que a conclusão de I.5.11, em conjunto com a alínea c) de I.6.4 é essencialmente o caso particular $p = 2$ deste resultado, o que poderia levar a crer que a sua apresentação naquele momento poderia ter sido uma perda de tempo. Tal não é o caso visto que na demonstração adiante vamos utilizar o facto de a composta de aplicações de classe C^k ser ainda de classe C^k, resultado que utiliza a versão $p = 2$ na sua demonstração.

$$Dh_{x_0}(u) = \sum_{j=1}^{p} \xi(f_1(x_0), \ldots, f_{j-1}(x_0), Df_{j_{x_0}}(u), f_{j+1}(x_0), \ldots, f_p(x_0))$$

(resp. é uma aplicação de classe C^k).
Dem: Basta atender à regra de derivação da função composta e ao facto de h ser a composta de ξ com a aplicação de U em $F_1 \times \cdots \times F_p$, que a x associa $(f_1(x), \ldots, f_p(x))$. □

Como aplicação da suavidade das aplicações multilineares e do valor da sua derivada em cada ponto, podemos estudar a suavidade da função determinante.

I.7.9 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A aplicação $\det : L(E; E) \to \mathbb{K}$ é então suave, sendo mesmo holomorfa no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Além disso, a sua derivada em $Id_E \in L(E; E)$ é dada por

$$D\det_{Id_E}(\alpha) = \mathrm{Tr}(\alpha).$$

Dem: Fixemos uma base $u_1, \ldots, u_n$ em E e consideremos o correspondente isomorfismo $\Phi : L(E; E) \to E^n$ definido por $\Phi(\xi) = (\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n))$. A aplicação $\det \circ \Phi^{-1} : E^n \to \mathbb{K}$ vai ser multilinear, como consequência do facto bem conhecido de o determinante de uma matriz do tipo $n \times n$ ser linear em cada coluna separadamente. Podemos concluir daqui que $\det \circ \Phi^{-1} : E^n \to \mathbb{K}$ é suave e com

$$D(\det \circ \Phi^{-1})_{(x_1, \ldots, x_n)}(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j=1}^{n} \det \circ \Phi^{-1}(x_1, \ldots, v_j, \ldots, x_n)$$

pelo que, compondo com o isomorfismo Φ, vemos que $\det : L(E; E) \to \mathbb{K}$ é suave e com

$$\begin{aligned} D\det_{\xi}(\alpha) &= D(\det \circ \Phi^{-1})_{(\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n))}(\alpha(u_1), \ldots, \alpha(u_n)) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det \circ \Phi^{-1}(\xi(u_1), \ldots, \alpha(u_j), \ldots, \xi(u_n)), \end{aligned}$$

fórmula que nos mostra, em particular, que $\det : L(E; E) \to \mathbb{K}$ é mesmo holomorfa, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Escrevendo agora $\alpha(u_j) = \sum a_{k,j}\, u_k$, o facto de se ter $\det \circ \Phi^{-1}(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) = \det(Id_E) = 1$ e, para cada $k \neq j$, $\det \circ \Phi^{-1}(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_k, u_{j+1}, \ldots, u_n) = 0$ (determinante de uma matriz com duas colunas iguais) implica que se tem

$$\det \circ \Phi^{-1}(u_1, \ldots, \alpha(u_j), \ldots, u_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \det \circ \Phi^{-1}(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_k, u_{j+1}, \ldots, u_n) =$$
$$= a_{j,j} \det \circ \Phi^{-1}(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) = a_{j,j}$$

pelo que obtemos, em particular,

$$D \det_{Id_E}(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \det \circ \Phi^{-1}(u_1, \ldots, \alpha(u_j), \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = \mathrm{Tr}(\alpha),$$

como queríamos. □

§8. Teoremas da função implícita e da função inversa.

I.8.1 Sejam E e F espaços vectoriais reais (respectivamente complexos) de dimensão finita e notemos $L_{iso}(E;F)$ o subconjunto de $L(E;F)$ formado pelos isomorfismos de E sobre F. Tem-se então que $L_{iso}(E;F)$ é um subconjunto aberto, eventualmente vazio, de $L(E;F)$ e a aplicação

$$\Phi\colon L_{iso}(E;F) \to L(F;E)\ ,\ \Phi(\xi) = \xi^{-1},$$

é de classe C^∞ (respectivamente é holomorfa) e verifica

$$D\Phi_\xi(\eta) = -\xi^{-1} \circ \eta \circ \xi^{-1}.$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:
a) Vamos começar por provar que, se $\xi \in L(E;E)$ verifica $\|\xi - Id_E\| \le \frac{1}{2}$, então ξ é invertível e $\|\xi^{-1}\| \le 2$. Ora, de se ter

$$\|\xi(x) - x\| = \|(\xi - Id_E)(x)\| \le \frac{1}{2}\|x\|,$$

deduzimos que

$$\|x\| \le \|x - \xi(x)\| + \|\xi(x)\| \le \frac{1}{2}\|x\| + \|\xi(x)\|,$$

donde

$$\|\xi(x)\| \ge \frac{1}{2}\|x\|.$$

Resulta daqui que, se $\xi(x) = 0$, então $x = 0$, o que mostra que ξ é injectiva, logo um isomorfismo de E sobre E e, fazendo agora $x = \xi^{-1}(y)$, obtemos $\|y\| \ge \frac{1}{2}\|\xi^{-1}(y)\|$, ou seja, $\|\xi^{-1}(y)\| \le 2\|y\|$, o que mostra que $\|\xi^{-1}\| \le 2$.
b) O que vimos em a) mostra que Id é interior a $L_{iso}(E;E)$ em $L(E;E)$. Reparemos agora que, para cada $\xi \in L_{iso}(E;F)$, tem lugar um isomorfismo

de $L(E;E)$ sobre $L(E;F)$, que a cada λ associa $\xi\circ\lambda$, o isomorfismo inverso aplicando μ em $\xi^{-1}\circ\mu$. Uma vez que este isomorfismo, em particular homeomorfismo, aplica $L_{iso}(E;E)$ sobre $L_{iso}(E;F)$ e Id_E em ξ, concluímos que ξ é interior a $L_{iso}(E;F)$ em $L(E;F)$, o que mostra que $L_{iso}(E;F)$ é aberto em $L(E;F)$.

c) Vamos verificar que, no caso particular em que $E=F$, Φ é diferenciável em Id_E, em particular contínua nesse ponto, e que

$$D\Phi_{Id_E}(\eta)=-\eta.$$

Para isso, escrevemos

$$\Phi(\xi)=\Phi(Id_E)-(\xi-Id_E)+\alpha(\xi)$$

e tentamos mostrar que a aplicação α verifica a condição na definição de diferenciabilidade. Ora, podemos escrever

$$\alpha(\xi)=\xi^{-1}-Id_E+\xi-Id_E=\xi^{-1}\circ(\xi-Id_E)\circ(\xi-Id_E)$$

pelo que, dado $\delta>0$, vem, sempre que $\|\xi-Id_E\|\le\min(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2})$, tendo em conta a conclusão de a),

$$\begin{aligned}\|\alpha(\xi)\|&\le\|\xi^{-1}\|\|\xi-Id_E\|\|\xi-Id_E\|\le\\&\le 2\frac{\delta}{2}\|\xi-Id_E\|=\delta\|\xi-Id_E\|,\end{aligned}$$

como queríamos.

d) Seja agora $\xi\in L_{iso}(E;F)$ arbitrário. Notemos $\Psi\colon L(E;F)\to L(E;E)$ e $\widehat{\Psi}\colon L(E;E)\to L(F;E)$ as aplicações lineares definidas por

$$\Psi(\lambda)=\xi^{-1}\circ\lambda\ ,\ \widehat{\Psi}(\mu)=\mu\circ\xi^{-1},$$

a primeira das quais aplica $L_{iso}(E;F)$ sobre $L_{iso}(E;E)$ e ξ em Id_E. Notando agora Φ_0 a aplicação Φ no caso particular em que $E=F$, o facto de se ter, para cada $\lambda\in L_{iso}(E;F)$,

$$\lambda^{-1}=(\xi^{-1}\circ\lambda)^{-1}\circ\xi^{-1},$$

permite-nos escrever $\Phi=\widehat{\Psi}\circ\Phi_0\circ\Psi_{/L_{iso}(E;F)}$ pelo que o facto de Φ_0 ser diferenciável em Id_E, e com derivada aplicando η em $-\eta$, implica, pelo teorema da derivação da função composta, que a aplicação Φ é diferenciável em ξ, e com

$$D\Phi_\xi(\eta)=\widehat{\Psi}(-\Psi(\eta))=-\xi^{-1}\circ\eta\circ\xi^{-1}.$$

e) Acabamos de ver que Φ é diferenciável, em particular contínua, em todos os pontos do aberto $L_{iso}(E;F)$ de $L(E;F)$ e com

$$D\Phi_\xi(\eta)=-\Phi(\xi)\circ\eta\circ\Phi(\xi).$$

Se repararmos que tem lugar uma aplicação bilinear, em particular de classe C^∞, de $L(F;E) \times L(F;E)$ em $L(L(E;F);L(F;E))$, que a cada (α,β) associa a aplicação linear $\eta \mapsto \alpha \circ \eta \circ \beta$, concluímos por indução, utilizando I.6.12, que Φ é de classe C^k, para todo o k, isto é, de classe C^∞. Além disso, no caso em que os espaços vectoriais são complexos, a fórmula obtida para $D\Phi_\xi$ mostra que se trata de uma aplicação linear complexa, pelo que Φ é uma aplicação holomorfa. $\square$

I.8.2 **(Um lema, caso particular do teorema das funções implícitas)** Sejam E e F espaços vectoriais reais (respectivamente complexos) de dimensão finita, $\Omega \subset E \times F$ um conjunto aberto, $f\colon \Omega \to F$ uma aplicação de classe C^{k+1}, onde $0 \le k \le +\infty$, (respectivamente uma aplicação holomorfa) e $x_0 \in E$ tal que $(x_0,0) \in \Omega$, que $f(x_0,0) = 0$ e que $D_2 f_{(x_0,0)} = Id_F$. Existem então um aberto U de E, com $x_0 \in U$, e um aberto V de F, com $0 \in V$, tais que $U \times V \subset \Omega$ e que se verifiquem as condições seguintes:
a) Para cada $x \in U$, existe um, e um só, $y \in V$ tal que $f(x,y) = 0$;
b) A aplicação $g\colon U \to V$, definida por $f(x,g(x)) = 0$, é de classe C^{k+1} (respectivamente é holomorfa).
Dem: Tendo em conta a continuidade de $D_2 f\colon \Omega \to L(F;F)$ e o facto de $L_{iso}(F;F)$ ser aberto em $L(F;F)$, podemos fixar $R' > 0$ tal que, considerando as bolas abertas de centros x_0 e 0 e raio R', se tenha $B_{R'}(x_0) \times B_{R'}(0) \subset \Omega$ e, para cada $x \in B_{R'}(x_0)$ e $y \in B_{R'}(0)$, $D_2 f_{(x,y)} \in L(F;F)$ seja um isomorfismo, verificando

(1) $$\|D_2 f_{(x,y)} - Id_F\| \le \frac{1}{2}.$$

Fixemos $0 < R < R'$. A continuidade de f implica a existência de $0 < r \le R$ tal que, para cada $x \in B_r(x_0)$,

(2) $$\|f(x,0)\| = \|f(x,0) - f(x_0,0)\| < \frac{R}{2}.$$

Para cada $x \in B_r(x_0)$, seja $h^{(x)}\colon B_{R'}(0) \to F$ a aplicação de classe C^{k+1} definida por

(3) $$h^{(x)}(y) = y - f(x,y).$$

Tem-se $\|Dh^{(x)}_y\| = \|Id_F - D_2 f_{(x,y)}\| \le \frac{1}{2}$ pelo que, pela fórmula da média, vem, para $y, y' \in B_{R'}(0)$,

(4) $$\|h^{(x)}(y) - h^{(x)}(y')\| \le \frac{1}{2}\|y - y'\|.$$

Em particular, para cada y na bola fechada de centro 0 e raio R, $\overline{B}_R(0)$,

(5) $$\|h^{(x)}(y)\| = \|h^{(x)}(y) - h^{(x)}(0) - f(x,0)\| < \frac{1}{2}\|y\| + \frac{R}{2} \le R,$$

o que mostra que $h^{(x)}$ aplica $\overline{B}_R(0)$ em $B_R(0)$. O teorema do ponto fixo para aplicações contractivas implica agora que, para cada $x \in U = B_r(x_0)$, existe um, e um só, $y \in V = B_R(0)$, tal que $h^{(x)}(y) = y$, isto é, tal que $f(x,y) = 0$. Notando $y = g(x)$, resta-nos ver que a aplicação $g: U \to V$ é de classe C^{k+1}. Seja $M > \|D_1 f_{(x_0,0)}\|$. Suponhamos que R' foi escolhido suficientemente pequeno para que, para cada $x \in B_{R'}(x_0)$ e $y \in B_{R'}(0)$, se tenha $\|D_1 f_{(x,y)}\| \le M$; pela fórmula da média, deduzimos então que, se $x, x' \in U$ e $y \in V$, tem-se

$$\|f(x,y) - f(x',y)\| \le M\|x - x'\|. \tag{6}$$

Usando (4), obtemos agora, para $x, x' \in U$,

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(x')\| &= \|h^{(x)}(g(x)) - h^{(x')}(g(x'))\| \le \\ &\le \|h^{(x)}(g(x)) - h^{(x')}(g(x))\| + \|h^{(x')}(g(x)) - h^{(x')}(g(x'))\| \le \\ &\le \|f(x', g(x)) - f(x, g(x))\| + \frac{1}{2}\|g(x) - g(x')\| \le \\ &\le M\|x - x'\| + \frac{1}{2}\|g(x) - g(x')\|,\end{aligned}$$

de onde se deduz que $\frac{1}{2}\|g(x) - g(x')\| \le M\|x - x'\|$, ou seja,

$$\|g(x) - g(x')\| \le 2M\|x - x'\|. \tag{7}$$

Esta última fórmula implica, em particular, a continuidade da aplicação g. Vamos agora ver que, para cada $x_1 \in U$, g é diferenciável em x_1, e com

$$Dg_{x_1} = -(D_2 f_{(x_1, g(x_1))})^{-1} \circ D_1 f_{(x_1, g(x_1))}. \tag{8}$$

Para isso, ponhamos

$$g(x) = g(x_1) - (D_2 f_{(x_1, g(x_1))})^{-1} \circ D_1 f_{(x_1, g(x_1))}(x - x_1) + \alpha(x) \tag{9}$$

e provemos que a aplicação α verifica as condições da definição de diferenciabilidade. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Seja $M' = \|(D_2 f_{(x_1, g(x_1))})^{-1}\|$. Pela diferenciabilidade da aplicação f no ponto $(x_1, g(x_1))$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $\|(x,y) - (x_1, g(x_1))\| \le \varepsilon$, se tenha

$$\begin{aligned}&\|f(x,y) - D_1 f_{(x_1, g(x_1))}(x - x_1) - D_2 f_{(x_1, g(x_1))}(y - g(x_1))\| \le \\ &\le \frac{\delta}{M'(1 + 2M)}\|(x,y) - (x_1, g(x_1))\|.\end{aligned} \tag{10}$$

Se $x \in U$ verifica a condição $\|x - x_1\| \le \min(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2M})$, tem-se, por (7), $\|(x, g(x)) - (x_1, g(x_1))\| \le \varepsilon$ e, pondo $y = g(x)$ em (10), vem

$$\begin{aligned}&\|D_1f_{(x_1,g(x_1))}(x-x_1)+D_2f_{(x_1,g(x_1))}(g(x)-g(x_1))\|\leq\\ (11)\qquad&\leq\frac{\delta}{M'(1+2M)}\|(x,g(x))-(x_1,g(x_1))\|\leq\\ &\leq\frac{\delta}{M'}\|x-x_1\|,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(12)\qquad\|\alpha(x)\|=\|(D_2f_{(x_1,g(x_1))})^{-1}\big(&D_2f_{(x_1,g(x_1))}(g(x)-g(x_1))+\\ &+D_1f_{(x_1,g(x_1))}(x-x_1)\big)\|\leq\delta\|x-x_1\|,\end{aligned}$$

o que mostra a diferenciabilidade pretendida.
A igualdade $Dg_x=-(D_2f_{(x,g(x))})^{-1}\circ D_1f_{(x,g(x))}$ mostra-nos agora, tendo em conta I.8.1 e o facto de a composição ser uma aplicação bilinear de $L(F;F)\times L(E;F)$ em $L(E;F)$, que $Dg\colon U\to L(E;F)$ é uma aplicação contínua. O mesmo raciocínio vai-nos mostrar, por indução, que Dg é de classe C^i, para cada $i\leq k$, o que prova que g é de classe C^{k+1}. No caso em que os espaços vectoriais são complexos e f é holomorfa, esta mesma igualdade mostra que g é holomorfa. □

I.8.3 **(Teorema das funções implícitas)** Sejam E, F e G espaços vectoriais reais (respectivamente complexos) de dimensão finita, $\Omega\subset E\times F$ um conjunto aberto, $f\colon\Omega\to G$ uma aplicação de classe C^{k+1}, onde $0\leq k\leq+\infty$, (respectivamente uma aplicação holomorfa) e $(x_0,y_0)\in\Omega$ e $z_0\in G$, tais que $f(x_0,y_0)=z_0$ e que $D_2f_{(x_0,y_0)}\in L(F;G)$ seja um isomorfismo. Existem então conjuntos abertos U, de E, e V, de F, com $x_0\in U$, $y_0\in V$ e $U\times V\subset\Omega$, verificando as condições seguintes:
a) Para cada $x\in U$, existe um, e um só, $y\in V$ tal que $f(x,y)=z_0$;
b) A aplicação $g\colon U\to V$, definida por $f(x,g(x))=z_0$, é de classe C^{k+1} (respectivamente é holomorfa).
Dem: Seja $\xi\colon G\to F$ a aplicação linear inversa do isomorfismo $D_2f_{(x_0,y_0)}$. Seja $\widehat{\Omega}$ o aberto de $E\times F$ formado pelos (x,y) tais que $(x,y_0+y)\in\Omega$ e seja $\widehat{f}\colon\widehat{\Omega}\to F$ a aplicação de classe C^{k+1} (respectivamente holomorfa) definida por

$$\widehat{f}(x,y)=\xi(f(x,y_0+y)-z_0),$$

a qual verifica $\widehat{f}(x_0,0)=0$ e $D_2\widehat{f}_{(x_0,0)}=\xi\circ D_2f_{(x_0,y_0)}=Id_F$. Aplicando o lema anterior a $\widehat{f}$, concluímos a existência de um aberto U de E, com $x_0\in U$, e de um aberto $\widehat{V}$ de F, com $0\in\widehat{V}$, com a correspondente aplicação de classe C^{k+1} (respectivamente holomorfa) $\widehat{g}\colon U\to\widehat{V}$ e, sendo $V=y_0+\widehat{V}$, U e V vão verificar as condições do enunciado, com $g\colon U\to V$ definido por $g(x)=y_0+\widehat{g}(x)$. □

I.8.4 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ e $V \subset F$ conjuntos abertos e $f: U \to V$ uma bijecção. Diz-se que f é um *difeomorfismo de classe* C^k se tanto f como f^{-1} são aplicações de classe C^k. No caso em que $k = \infty$, dizemos simplesmente que f é um *difeomorfismo*. No caso em que E e F são espaços vectoriais complexos, diz-se que $f: U \to V$ é um *difeomorfismo holomorfo* se for uma bijecção e $f: U \to V$ e $f^{-1}: V \to U$ forem aplicações holomorfas.

I.8.5 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ e $V \subset F$ conjuntos abertos e $f: U \to V$ um difeomorfismo de classe C^k, com $k \geq 1$. Para cada $x \in U$, $Df_x: E \to F$ é um isomorfismo com inverso $D(f^{-1})_{f(x)}$. Em particular, no caso em que E e F são espaços vectoriais complexos, se $f: U \to V$ é um difeomorfismo e é aplicação holomorfa, então $f: U \to V$ é mesmo um difeomorfismo holomorfo.

Dem: Por derivação das identidades $f^{-1} \circ f = Id_U$ e $f \circ f^{-1} = Id_V$, em x e em $f(x)$, respectivamente, obtemos $D(f^{-1})_{f(x)} \circ Df_x = Id_E$ e $Df_x \circ D(f^{-1})_{f(x)} = Id_F$, o que implica que Df_x é um isomorfismo, com inverso $D(f^{-1})_{f(x)}$. No caso em que, além disso, E e F são espaços vectoriais complexos e o difeomorfismo f é uma aplicação holomorfa, o facto de cada Df_x ser uma aplicação linear complexa implica que cada $D(f^{-1})_{f(x)}$ é uma aplicação linear complexa, e portanto que a aplicação de classe C^∞ $f^{-1}: V \to U$ é também holomorfa. □

O teorema da função inversa, que demonstramos em seguida, é um recíproco local da primeira parte do resultado precedente.

I.8.6 **(Teorema da função inversa)** Sejam E e F espaços vectoriais reais (respectivamente complexos) de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto, $f: U \to F$ uma aplicação de classe C^{k+1}, onde $0 \leq k \leq +\infty$, (respectivamente uma aplicação holomorfa) e $x_0 \in U$ tal que $Df_{x_0}: E \to F$ seja um isomorfismo. Existe então um aberto U' de E, com $x_0 \in U' \subset U$, tal que a restrição $f_{/U'}$ seja um difeomorfismo de classe C^{k+1} (respectivamente um difeomorfismo holomorfo) de U' sobre um aberto V de F.

Dem: Seja $g: F \times U \to F$ a aplicação de classe C^{k+1} definida por $g(y, x) = f(x) - y$. Tem-se $g(f(x_0), x_0) = 0$ e $D_2 g_{(f(x_0), x_0)} = Df_{x_0}$ pelo que, pelo teorema das funções implícitas, concluímos a existência de um aberto U'' de E, com $x_0 \in U'' \subset U$, e de um aberto V de F, com $f(x_0) \in V$, tais que, para cada $y \in V$, existe um, e um só, $x \in U''$ tal que $g(y, x) = 0$, isto é, tal que $f(x) = y$, e que, notando $x = h(y)$, a aplicação $h: V \to U''$ é de classe C^{k+1}. Sendo U' o conjunto dos $x \in U''$ tais que $f(x) \in V$, U' vai ser um aberto de E, contendo x_0 e contido em U, e a restrição de f a U' vai ser uma bijecção de U' sobre V, que é de classe C^{k+1}, assim como a sua inversa, que não é mais do que a aplicação h. □

§9. Integral de funções vectoriais de variável real.

Ao contrário do Cálculo Diferencial, que temos estado a rever, que será constantemente utilizado ao longo deste livro, as propriedades elementares do Cálculo Integral, para funções contínuas de variável real e com valores num espaço vectorial de dimensão finita, que vamos abordar nesta e na próxima secção vão ser utilizadas com muito menor frequência. Elas serão utilizadas apenas no estudo das equações diferenciais ordinárias e na construção da reparametrização por comprimento de arco de um caminho. A maior parte das demonstrações será omitida, por se tratar de aplicações directas das propriedades da convergência de sucessões generalizadas ou de adaptações triviais de demonstrações já conhecidas no quadro das funções reais de variável real.

I.9.1 Sejam a e b dois números reais, com $a \leq b$. Chama-se *partição* do intervalo $[a, b]$ a um subconjunto finito P de $[a, b]$, que contenha a e b. Um tal subconjunto pode sempre escrever-se, de uma única maneira, na forma $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$, com $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$, tendo-se evidentemente $N = 0$, se $a = b$, e $N \geq 1$, se $a < b$, caso em que se dá o nome de *diâmetro* da partição ao maior dos números $a_j - a_{j-1}$. A partição P' é *mais fina* que a partição P se se tem $P' \supset P$; o conjunto das partições de $[a, b]$, com esta relação, fica a ser um sistema parcialmente ordenado filtrante, portanto um bom candidato para conjunto de índices de uma sucessão generalizada.

I.9.2 Sejam F um espaço vectorial de dimensão finita e $f\colon [a, b] \to F$ uma aplicação contínua. Para cada partição $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$ de $[a, b]$, com $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$, defina-se um elemento $S_P(f) \in F$, por

$$S_P(f) = \sum_{j=1}^{N} (a_j - a_{j-1}) f(a_j).$$

A família dos $S_P(f)$ é então uma sucessão generalizada de elementos de F, que se verifica facilmente ser de Cauchy, pelo que converge, e ao seu limite dá-se o nome de *integral* da aplicação f no intervalo $[a, b]$, notado $\int_a^b f(t)\, dt$.

I.9.3 Sejam F e G espaços vectoriais de dimensão finita e $\lambda\colon F \to G$ uma aplicação linear. Se $f\colon [a, b] \to F$ é uma aplicação contínua, tem-se

$$\int_a^b \lambda(f(t))\, dt = \lambda\Big(\int_a^b f(t)\, dt\Big).$$

I.9.4 Sejam F um espaço vectorial de dimensão finita, $f, g: [a,b] \to F$ duas aplicações contínuas, $c \in \mathbb{R}$ e $x \in F$. Tem-se então

$$\int_a^b f(t) + g(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt,$$
$$\int_a^b c f(t)\, dt = c \int_a^b f(t)\, dt,$$
$$\int_a^b x\, dt = (b-a)x,$$

a primeira igualdade podendo ser trivialmente generalizada, por indução, a uma soma com um número finito de parcelas e a segunda igualdade sendo válida, mais geralmente, para $c \in \mathbb{C}$, no caso em que F é um espaço vectorial complexo.

I.9.5 Para cada $1 \le j \le p$, seja F_j um espaço vectorial de dimensão finita e seja $f_j: [a,b] \to F_j$ uma aplicação contínua. Sendo $f: [a,b] \to F_1 \times \cdots \times F_p$ a aplicação contínua definida por

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_p(t)),$$

tem-se

$$\int_a^b f(t)\, dt = \big(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f_p(t)\, dt\big).$$

(comparar com o que se disse na demonstração de I.5.8).

I.9.6 Seja F um espaço vectorial de dimensão finita, sobre o qual se considera uma norma. Se $f: [a,b] \to F$ é uma aplicação contínua, tem-se

$$\Big\| \int_a^b f(t)\, dt \Big\| \le \int_a^b \|f(t)\|\, dt.$$

I.9.7 Se $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ são aplicações contínuas tais que $f(t) \le g(t)$, para cada t, então

$$\int_a^b f(t)\, dt \le \int_a^b g(t)\, dt.$$

I.9.8 Sejam $f: [a,b] \to F$ uma aplicação contínua e $c \in [a,b]$. Tem-se então

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

Em particular, tem-se

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

I.9.9 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, F um espaço vectorial de dimensão finita e $f\colon J \to F$ uma aplicação contínua. Já se sabe o que é $\int_a^b f(t)\,dt$ no caso em que $a \leq b$ são dois elementos de J, e generaliza-se esta definição pondo, no caso em que $a > b$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Verifica-se então, após uma discussão fácil, que são válidas, quaisquer que sejam $a, b, c \in J$, as igualdades

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt,$$
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

I.9.10 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, F um espaço vectorial de dimensão finita e $f\colon J \to F$ uma aplicação contínua. Seja $a \in J$ fixado e seja $\widehat{f}\colon J \to F$ a aplicação *integral indefinido*, definida por

$$\widehat{f}(t) = \int_a^t f(s)\,ds.$$

Tem-se então que f é diferenciável em todos os pontos e $\widehat{f}'(t) = f(t)$.

I.9.11 **(Fórmula de Barrow)** Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, F um espaço vectorial de dimensão finita, $f\colon J \to F$ uma aplicação contínua e $\widehat{f}\colon J \to F$ uma aplicação diferenciável em todos os pontos e com $\widehat{f}'(t) = f(t)$, para cada $t \in J$. Tem-se então, para cada $a, b \in J$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \widehat{f}(b) - \widehat{f}(a).$$

§10. Diferenciabilidade do integral paramétrico.

I.10.1 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um conjunto arbitrário e $f\colon J \times A \to F$ uma aplicação contínua. Se $a, b \in J$, tem então lugar uma aplicação contínua $g\colon A \to F$ (o *integral para-*

métrico), definida por

$$g(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt.$$

Dem: Suponhamos já que $a \le b$ e provemos a continuidade de g em $x_0 \in A$. Seja $\delta > 0$ arbitrário e fixemos $\delta' > 0$ tal que $(b-a)\delta' < \delta$. Pela continuidade uniforme (no sentido forte) de f no compacto $[a,b] \times \{x_0\}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $t \in [a,b]$ e $x \in A$ verifica $\|x - x_0\| < \varepsilon$, tem-se $\|f(t,x) - f(t,x_0)\| \le \delta'$. Sempre que $x \in A$ verifica $\|x - x_0\| < \varepsilon$ tem-se então

$$\|g(x) - g(x_0)\| \le \int_a^b \|f(t,x) - f(t,x_0)\| dt \le \delta'(b-a) < \delta. \qquad \square$$

I.10.2 Mais geralmente, nas condições anteriores, tem lugar, para cada $a \in J$, uma aplicação contínua $h: J \times A \to F$ (misto de integral paramétrico e de integral indefinido), definida por

$$h(t,x) = \int_a^t f(s,x)\,ds.$$

Dem: Para provar a continuidade em (t_0, x_0) escrevemos

$$h(t,x) - h(t_0,x_0) = h(t,x) - h(t_0,x) + h(t_0,x) - h(t_0,x_0)$$

e reparamos que $\|h(t_0,x) - h(t_0,x_0)\|$ pode ser controlado pelo resultado precedente, com $b = t_0$, e que podemos escolher $M > 0$ e $\varepsilon' > 0$ tais que, sempre que $|s - t_0| < \varepsilon'$ e $|x - x_0| < \varepsilon'$ se tenha $\|f(s,x)\| \le M$, o que implica que, se $|t - t_0| < \varepsilon'$ e $|x - x_0| < \varepsilon'$,

$$\|h(t,x) - h(t_0,x)\| = \|\int_{t_0}^t f(s,x)\,ds\| \le M|t - t_0|. \qquad \square$$

I.10.3 Sejam os espaços vectoriais de dimensão finita E e F, $U \subset E$ um conjunto aberto, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, Ω um aberto de $\mathbb{R} \times E$, contendo $J \times U$ e $f: \Omega \to F$ uma aplicação de classe C^1. Para cada $a \in J$ e $b \in J$, tem então lugar uma aplicação de classe C^1 $g: U \to F$, definida por

$$g(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt,$$

tendo-se, para cada $x \in U$ e $u \in E$,

$$Dg_x(u) = \int_a^b D_2 f_{(t,x)}(u)\,dt = \int_a^b Df_{(t,x)}(0,u)\,dt.$$

Dem: Podemos já supor que se tem $a \le b$. Dado $x_0 \in U$, a continuidade uniforme, no sentido forte, de $D_2 f$ sobre o compacto $[a,b]\times\{x_0\}$ implica que, dado $\delta>0$, existe $\varepsilon>0$ tal que, sempre que $t\in[a,b]$ e $\|x-x_0\|\le\varepsilon$, se tenha

$$\|D_2 f_{(t,x)} - D_2 f_{(t,x_0)}\| \le \delta.$$

A fórmula da média permite-nos deduzir que

$$\begin{aligned}\|g(x)-g(x_0)-\int_a^b D_2 f_{(t,x_0)}(x-x_0)\,dt\| =\\ = \|\int_a^b f(t,x)-f(t,x_0)-D_2 f_{(t,x_0)}(x-x_0)\,dt\| \le\\ \le \delta(b-a)\|x-x_0\|,\end{aligned}$$

o que mostra que g é diferenciável em x_0 e com a derivada dada na fórmula do enunciado. Tendo em conta a propriedade I.9.3, relativa à aplicação linear de $L(E;F)$ em F, que a α associa $\alpha(u)$, vemos que se pode escrever também

$$Dg_x = \int_a^b D_2 f_{(t,x)}\,dt,$$

pelo que o facto de $Dg\colon U\to L(E;F)$ ser contínua é uma consequência de I.10.1. □

I.10.4 Com as hipóteses anteriores, se a aplicação f for de classe C^k, então a aplicação g é também de classe C^k e

$$D^k g_x(u_1,\ldots,u_k) = \int_a^b D^k f_{(t,x)}((0,u_1),\ldots,(0,u_k))\,dt.$$

Dem: Os casos $k=0$ e $k=1$ são já conhecidos e o caso geral obtém-se então por indução, reparando que, se f é de classe C^{k+1}, Df é de classe C^k e portanto, a fórmula

$$Dg_x(u_{k+1}) = \int_a^b Df_{(t,x)}(0,u_{k+1})\,dt$$

implica, tendo em conta I.6.14, que $Dg\colon U\to L(E;F)$ é de classe C^k, ou seja, g é de classe C^{k+1}, e que

$$\begin{aligned}D^{k+1}g_x(u_1,\ldots,u_{k+1}) = D^k(Dg)_x(u_1,\ldots,u_k)(u_{k+1}) =\\ = D^k(Dg(u_{k+1}))_x(u_1,\ldots,u_k) =\\ = \int_a^b D^k(Df(0,u_{k+1}))_{(t,x)}((0,u_1),\ldots,(0,u_k))\,dt =\\ = \int_a^b D^{k+1}f_{(t,x)}((0,u_1),\ldots,(0,u_{k+1}))\,dt.\end{aligned}$$ □

I.10.5 Mais geralmente, se o intervalo J é aberto e $f\colon J \times U \to F$ é de classe C^k, tem lugar uma aplicação de classe C^k $h\colon J \times U \to F$, definida por

$$h(t,x) = \int_a^t f(s,x)\,ds.$$

Tem-se além disso, no caso em que $k \geq 1$,

$$Dh_{(t,x)}(c,u) = cf(t,x) + \int_a^t D_2 f_{(s,x)}(u)\,ds.$$

Dem: A demonstração faz-se por indução em k, determinando-se as derivadas parciais relativamente às duas variáveis e aplicando I.7.4 e os resultados já demonstrados nesta secção. □

EXERCÍCIOS

Ex I.1 Sejam E e F espaços euclidianos ou hermitianos, $\lambda\colon E \to F$ uma aplicação linear e $\lambda^*\colon F \to E$ a respectiva adjunta.

a) Mostrar que o núcleo ker(λ) de λ é o complementar ortogonal da imagem $\lambda^*(F)$ de λ^*, e que a imagem $\lambda(E)$ de λ é o complementar ortogonal do núcleo ker(λ^*) de λ^*.

b) Deduzir de a) que λ^* é sobrejectiva se, e só se, λ é injectiva e que λ^* é injectiva se, e só se, λ é sobrejectiva.

Ex I.2 Sejam E e F espaços euclidianos ou hermitianos e $\lambda\colon E \to F$ um isomorfismo. Mostrar que a aplicação linear adjunta $\lambda^*\colon F \to E$ é também um isomorfismo e que $(\lambda^*)^{-1} = (\lambda^{-1})^*$.

Ex I.3 Sejam E e F espaços vectoriais complexos, com estruturas complexas J e J', respectivamente.

a) Mostrar que a estrutura complexa $\widehat{J}$ de $L_{\mathbb{R}}(E;F)$, associada à estrutura de espaço vectorial complexo que se considera usualmente neste espaço (cf. I.1.3), está definida por $\widehat{J}(\lambda) = J' \circ \lambda$.

b) Mostrar que se pode definir outra estrutura complexa $\tilde{J}$ em $L_{\mathbb{R}}(E;F)$ por $\tilde{J}(\lambda) = \lambda \circ J$ e que esta estrutura é, em geral, distinta da anterior. O que será o produto de um complexo c por $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;F)$ na estrutura de espaço vectorial complexo associada a $\tilde{J}$?

c) Mostrar que $L_{\mathbb{R}}(E;F)$ é soma directa dos subespaços vectoriais complexos (para qualquer das duas estruturas complexas $\widehat{J}$ e $\tilde{J}$) $L_{\mathbb{C}}(E;F)$ e $L_{\mathbb{C}}(\overline{E};F)$ e que as projecções π_1 e π_2 associadas à soma directa

$$L_{\mathbb{R}}(E;F) = L_{\mathbb{C}}(E;F) \oplus L_{\mathbb{C}}(\overline{E};F)$$

estão definidas por

$$\pi_1(\lambda) = \frac{\lambda - J' \circ \lambda \circ J}{2}, \quad \pi_2(\lambda) = \frac{\lambda + J' \circ \lambda \circ J}{2}.$$

Mostrar ainda que as estruturas complexas induzidas por $\widehat{J}$ e $\tilde{J}$ em $L_{\mathbb{C}}(E;F)$ coincidem e as induzidas em $L_{\mathbb{C}}(\overline{E};F)$ são simétricas uma da outra.

d) Nas condições de c), e supondo que E e F estão munidos de produtos internos complexos e que consideramos em $L_{\mathbb{R}}(E;F)$ o produto interno complexo referido na alínea a) de I.3.5, mostrar que as parcelas directas de $L_{\mathbb{R}}(E;F)$ referidas em c) são mutuamente ortogonais, em particular cada uma é o complementar ortogonal da outra e π_1 e π_2 são as projecções ortogonais sobre cada uma das parcelas.

Ex I.4 Mostrar que, se E é um espaço vectorial complexo, com estrutura complexa J, munido de um produto interno real $\langle\,,\,\rangle_{\mathbb{R}}$, não obrigatoriamente hermitiano, então E admite um produto interno real hermitiano $\langle\,,\,\rangle'_{\mathbb{R}}$, definido por

$$\langle u,v\rangle'_{\mathbb{R}} = \frac{\langle u,v\rangle_{\mathbb{R}} + \langle J(u),J(v)\rangle_{\mathbb{R}}}{2}$$

(a divisão por 2 não é essencial; que interesse poderá ter?).

Ex I.5 Sejam E e F espaços vectoriais complexos, com estruturas complexas J e J', respectivamente, e G um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ (igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Diz-se que uma aplicação bilinear real $\xi\colon E \times F \to G$ é *circular* (respectivamente *anticircular*) se se tem $\xi(J(u),v) = \xi(u,J'(v))$ (respectivamente $\xi(J(u),v) = -\xi(u,J'(v))$), quaisquer que sejam $u \in E$ e $v \in F$.

a) Mostrar que ξ é circular (respectivamente anticircular) se, e só se, quaisquer que sejam $u \in E$ e $v \in F$, se tem $\xi(J(u),J'(v)) = -\xi(u,v)$ (respectivamente $\xi(J(u),J'(v)) = \xi(u,v)$). Mostrar ainda que os produtos internos reais hermíticos são anticirculares e que, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, as aplicações bilineares complexas são circulares e as aplicações sesquilineares são anticirculares.

b) Notemos $L_{\mathbb{R}+}(E,F;G)$ e $L_{\mathbb{R}-}(E,F;G)$ os subespaços vectoriais (sobre $\mathbb{K}$) de $L_{\mathbb{R}}(E,F;G)$ constituídos, respectivamente, pelas aplicações bilineares circulares e pelas anticirculares. Mostrar que tem lugar a soma directa

$$L_{\mathbb{R}}(E,F;G) = L_{\mathbb{R}+}(E,F;G) \oplus L_{\mathbb{R}-}(E,F;G)$$

e que as projecções π_1 e π_2 associadas a esta soma directa estão definidas respectivamente por

$$\pi_1(\xi) = \frac{\xi - \xi \circ (J \times J')}{2}, \quad \pi_2(\xi) = \frac{\xi + \xi \circ (J \times J')}{2}.$$

c) No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Mostrar que tem lugar a soma directa de subespaços vectoriais complexos

$$L_{\mathbb{R}}(E,F;G) = L_{\mathbb{C}}(E,F;G) \oplus L_{\mathbb{C}}(\overline{E},F;G) \oplus L_{\mathbb{C}}(E,\overline{F};G) \oplus L_{\mathbb{C}}(\overline{E},\overline{F};G),$$

determinando as projecções associadas a esta soma directa, e mostrar que se tem

$$L_{\mathbb{R}+}(E,F;G) = L_{\mathbb{C}}(E,F;G) \oplus L_{\mathbb{C}}(\overline{E},\overline{F};G),$$
$$L_{\mathbb{R}-}(E,F;G) = L_{\mathbb{C}}(\overline{E},F;G) \oplus L_{\mathbb{C}}(E,\overline{F};G).$$

Ex I.6 Sejam E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\lambda\colon E \to E$ um isomorfismo ortogonal. Mostrar que $|\det(\lambda)| = 1$. **Sugestão:** Partir da identidade $\lambda^* \circ \lambda = Id_E$ e ter em conta I.2.28.

Ex I.7 Sejam E e F espaços vectoriais reais ou complexos com dimensões m e n, respectivamente, munidos de produtos internos.
a) Mostrar que, se $\lambda\colon E \to F$ é uma aplicação linear injectiva, então $\lambda^* \circ \lambda\colon E \to E$ é uma aplicação linear injectiva, e portanto um isomorfismo.
b) Mostrar que, se $\lambda\colon E \to F$ é uma aplicação linear injectiva então a projecção ortogonal $\pi_{\lambda(E)}$, de F sobre $\lambda(E)$, é dada por

$$\pi_{\lambda(E)} = \lambda \circ (\lambda^* \circ \lambda)^{-1} \circ \lambda^*.$$

Sugestão: Verificar que o segundo membro é uma aplicação linear $F \to F$ autoadjunta, idempotente e com imagem $\lambda(E)$.
c) Se $\lambda\colon E \to F$ é uma aplicação linear ortogonal, mostrar que a projecção ortogonal de F sobre $\lambda(E)$ é $\lambda \circ \lambda^*$.

Ex I.8 Sejam E e F espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita, munidos de produtos internos, e $\lambda\colon E \to F$ uma aplicação linear. Mostrar que são equivalentes as propriedades seguintes:

a) λ é uma aplicação linear conforme;
b) $\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|\lambda(x)\| = \|\lambda(y)\|$;
c) $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle\lambda(x),\lambda(y)\rangle = 0$.

Mostrar ainda que, no caso em que os espaços vectoriais são reais, se $\lambda \neq 0$ é conforme então λ não só conserva a prependicularidade de vectores como conserva mesmo o ângulo de pares de vectores não nulos (lembrar que o ângulo dos vectores não nulos x e y é o valor $\alpha \in [0,\pi]$ definido pela igualdade $\cos(\alpha) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$).
Sugestão: Pode afastar-se o caso trivial em que $E = \{0\}$. Supondo b), tomar para c o valor $\|\lambda(x)\|$, sempre que $\|x\| = 1$. Supondo c), considerar uma base ortonormada $x_1,\ldots,x_n$ de E e, para $j \neq k$, utilizar o facto de $x_j + x_k$ e $x_j - x_k$ serem ortogonais para deduzir que $\lambda(x_j)$ e $\lambda(x_k)$ têm a mesma norma.

Ex I.9 Sejam E e F espaços vectoriais reais ou complexos com dimensões m e n, respectivamente, munidos de produtos internos. Diremos que uma

aplicação linear $\lambda\colon E \to F$ é *coortogonal* se se tem $\lambda \circ \lambda^* = Id_F$ (comparar com I.2.30).
a) Mostrar que uma aplicação linear coortogonal é sempre sobrejectiva.
b) Mostrar que, se $m = n$, uma aplicação linear é coortogonal se, e só se, é ortogonal.
c) Mostrar que $\lambda\colon E \to F$ é coortogonal se, e só se, a restrição de λ a $\ker(\lambda)^\perp$ é um isomorfismo ortogonal de $\ker(\lambda)^\perp$ sobre F.
d) Mostrar que, se $\lambda\colon E \to F$ é uma aplicação linear coortogonal, então a projecção ortogonal de E sobre $\ker(\lambda)$ é $Id_E - \lambda^* \circ \lambda$.
Sugestão: Lembrar que, se $\lambda\colon E \to F$ é uma aplicação linear, então $\lambda^*(F) = \ker(\lambda)^\perp$ e $\ker(\lambda^*) = \lambda(E)^\perp$.

Ex I.10 Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$, munido de produto interno.
a) Mostrar que o espaço vectorial $L(E;E)$ é soma directa dos subespaços vectoriais reais $L_{aa}(E;E)$ e $L_{-aa}(E;E)$ (cf. I.2.25) e verificar que as projecções π_+ e π_- associadas a esta soma directa estão definidas por

$$\pi_+(\lambda) = \frac{\lambda + \lambda^*}{2}, \quad \pi_-(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda^*}{2}.$$

b) Consideremos em $L(E;E)$ o produto interno de Hilbert-Schmidt, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e o produto interno real associado ao produto interno de Hilbert-Schmidt, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mostrar que os subespaços $L_{aa}(E;E)$ e $L_{-aa}(E;E)$ são mutuamente ortogonais e que, consequentemente, cada um é o complementar ortogonal do outro e π_+ e π_- são as projecções ortogonais sobre cada um deles.
c) Mostrar que, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $L_{aa}(E;E)$ tem dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$ e que $L_{-aa}(E;E)$ tem dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$. **Sugestão:** Fixar uma base para E e raciocinar em termos das matrizes nesta base.
d) No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostrar que tem lugar um isomorfismo real de $L_{aa}(E;E)$ sobre $L_{-aa}(E;E)$, que a cada λ associa $i\lambda$, e deduzir daí que a dimensão real de cada um daqueles subespaços é n^2.
e) Obter de modo alternativo a conclusão sobre a dimensão real dos subespaços $L_{aa}(E;E)$ e $L_{-aa}(E;E)$ pelo exame do que se passa com as matrizes dos respectivos elementos numa base ortonormada complexa de E.
f) Suponhamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e que consideramos em $L(E;E)$ o produto interno de Hilbert-Schmidt complexo. Mostrar que, se λ, μ estão ambos em $L_{aa}(E;E)$ ou ambos em $L_{-aa}(E;E)$, então $\langle \lambda, \mu \rangle$ é um número real e que, se $\lambda \in L_{aa}(E;E)$ e $\mu \in L_{-aa}(E;E)$, então $\langle \lambda, \mu \rangle$ é imaginário puro[17].

Ex I.11 Sejam E e F espaços euclidianos ou hermitianos, com dimensões m e n, respectivamente, e notemos $\|\|$ a norma de $L(E;F)$ definida em I.1.8, a partir das normas de E e F associadas aos respectivos produtos internos, e

[17] Esta última afirmação resulta também do que já foi feito na alínea b).

$\| \|_{HS}$ a norma de $L(E;F)$ associada ao produto interno de Hilbert-Schmidt. Mostrar que se tem, para cada $\lambda \in L(E;F)$, $\|\lambda\| \leq \|\lambda\|_{HS} \leq \sqrt{m}\,\|\lambda\|$.

Ex I.12 Generalizar os produtos internos de Hilbert-Schmidt dos espaços de aplicações lineares aos espaços de aplicações multilineares do seguinte modo: Sejam $E_1, \ldots, E_p, F$ espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ (igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), munidos de produto interno. Mostrar que existe um, e um só, produto interno sobre $L(E_1, \ldots, E_p; F)$ tal que, quaisquer que sejam as bases ortonormadas $w_{k,1}, \ldots, w_{k,n_k}$ dos E_k ($1 \leq k \leq p$), se tenha

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq n_1 \\ \cdots \\ 1 \leq j_p \leq n_p}} \langle \lambda(w_{1,j_1}, \ldots, w_{p,j_p}), \mu(w_{1,j_1}, \ldots, w_{p,j_p}) \rangle$$

(o *produto interno de Hilbert-Schmidt*). Reparar que a alínea a) de I.3.5 se generaliza naturalmente a este quadro e adaptar o enunciado da alínea b) do mesmo resultado. **Sugestão:** Fazer a demonstração por indução em p, reparando que tem lugar um isomorfismo natural

$$L(E_1; L(E_2, \ldots, E_p; F)) \to L(E_1, E_2, \ldots, E_p; F),$$

que pode ser usado para transportar um produto interno no primeiro espaço.

Ex I.13 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensões m e n sobre $\mathbb{K}$, munidos de produto interno, e $\lambda, \mu \colon E \to F$ duas aplicações lineares. Mostrar que o produto interno de Hilbert-Schmidt $\langle \lambda, \mu \rangle$ é dado por $\langle \lambda, \mu \rangle = \mathrm{Tr}(\mu^* \circ \lambda)$.

Ex I.14 **(Isomorfismos ortogonais na dimensão 1)** Seja E um espaço euclidiano ou hermitiano de dimensão 1. Mostrar que, para cada $a \in \mathbb{K}$, com $|a| = 1$, tem lugar um isomorfismo ortogonal $\xi_a \colon E \to E$ definido por $\xi_a(x) = ax$ e que todo o isomorfismo ortogonal $\xi \colon E \to E$ é da forma ξ_a, para um único a naquelas condições (em particular, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, existem dois, e só dois isomorfismos ortogonais $E \to E$, nomeadamente Id_E e $-Id_E$, o primeiro conservando e o segundo invertendo as orientações).

Ex I.15 **(Isomorfismos ortogonais na dimensão 2)** Seja E um espaço euclidiano de dimensão 2. Seja J uma das duas estruturas complexas de E compatíveis com o produto interno (cf. I.4.24). Consideremos, como auxiliares, em E a estrutura de espaço vectorial complexo de dimensão 1 definida por J e o produto interno complexo cujo produto interno real associado é o dado.

a) Seja $\xi \colon E \to E$ um isomorfismo ortogonal que conserve (respectivamente inverta) as orientações. Mostrar que ξ é uma aplicação linear complexa (respectivamente é antilinear) e lembrar que, no primeiro caso, ξ é também um isomorfismo ortogonal relativamente ao produto interno complexo correspondente.

b) Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja $\rho_t \colon E \to E$ o isomorfismo ortogonal, conservando as orientações, definido por

$$\rho_t(x) = e^{it}\,x = \cos(t)\,x + \sin(t)\,J(x)$$

(nas notações do exercício precedente, trata-se do isomorfismo ortogonal complexo ξ_a, onde a é o complexo $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, de módulo 1). Mostrar que, se $\xi\colon E \to E$ é um isomorfismo ortogonal (real), que conseva as orientações, então ξ é da forma ξ_t, para algum $t \in \mathbb{R}$ (ξ é a rotação de ângulo t para a orientação determinada por J). Concluir que o conjunto $O_+(E) = SO(E)$ dos isomorfismos ortogonais $\xi\colon E \to E$ que conservam as orientações é um grupo isomorfo ao grupo multiplicativo dos complexos de módulo 1, em particular é comutativo.

c) Para cada subespaço vectorial $F \subset E$, de dimensão 1, mostrar que existe uma única aplicação linear $\xi_F\colon E \to E$ tal que $\xi(x) = x$, para cada $x \in F$, e $\xi(x) = -x$, para cada $x \in F^\perp$ (a *simetria* relativamente a F) e que ξ é um isomorfismo ortogonal invertendo as orientações. Mostrar que, se $\xi\colon E \to E$ é um isomorfismo ortogonal que inverte as orientações, então ξ é da forma ξ_F, para algum subespaço vectorial $F \subset E$, de dimensão 1, em particular $\xi \circ \xi = Id_E$. **Sugestão:** Mostrar que, para cada $x \in E$, $\xi(\xi(x)) = x$, escrevendo $\xi(x) = cx$, com $c \in \mathbb{C}$ e $|c| = 1$, e aplicando a conclusão de a). Partindo de $x \in E \setminus \{0\}$ arbitrário, considerar os subespaços ortogonais gerados por x e por $J(x)$, se $\xi(x) = \pm x$ e, caso contrário, os gerados por $x + \xi(x)$ e por $x - \xi(x)$.

Ex I.16 **(Subespaços vectoriais invariantes por uma aplicação linear)** Se E é um espaço vectorial, real ou complexo, e $\xi\colon E \to E$ é uma aplicação linear, diz-se que um subespaço vectorial $F \subset E$ é ξ-*invariante* se se tem $\xi(F) \subset F$.

a) Mostrar que um vector não nulo $x \in E$ é um vector próprio de ξ se, e só se, o subespaço vectorial gerado por x é ξ-invariante e que, em consequência, ξ admite um valor próprio se, e só se, E admite um subespaço vectorial invariante de dimensão 1.

b) Lembrar que, como consequência do teorema fundamental da Álgebra, toda a matriz do tipo $n \times n$ ($n \geq 1$) com entradas reais ou complexas admite pelo menos um valor próprio complexo. Deduzir que, se E é um espaço vectorial complexo, com dimensão $n \geq 1$, e $\xi\colon E \to E$ é uma aplicação linear complexa, então existe um subespaço vectorial ξ-invariante $F \subset E$ com dimensão 1.

c) Seja E um espaço vectorial real de dimensão $n \geq 1$ e seja $\xi\colon E \to E$ uma aplicação linear real. Mostrar que E admite um subespaço vectorial ξ-invariante com dimensão $n-1$ ou $n-2$ e deduzir, por indução, que ξ admite um subespaço ξ-invariante de dimensão 1 ou 2. **Sugestão:** Reparar que $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ é um espaço vectorial complexo de dimensão n e que tem lugar uma aplicação linear complexa $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}) \to L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$, $\mu \mapsto \mu \circ \xi$. Sendo $\mu_0 \neq 0$ em $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ um vector próprio desta aplicação linear, verificar que $F = \ker(\mu_0)$ verifica a propriedade pedida.

d) Sejam E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\xi\colon E \to E$ uma aplicação linear ortogonal ou autoadjunta ou antiautoadjunta. Mostrar que, se $F \subset E$ é ξ-invariante, então $F^\perp$ é também ξ-invariante.

Ex I.17 **($\boldsymbol{U(E)}$ é conexo)** Seja E um espaço vectorial complexo de dimensão n, munido de um produto interno e seja $U(E)$ o conjunto dos isomorfismos ortogonais[18] $\xi: E \to E$.

a) Utilizar as alíneas b) e d) do exercício precedente para mostrar que, se $\xi \in U(E)$, E é soma directa ortogonal de subespaços vectoriais ξ-invariantes de dimensão 1, e portanto existe uma base ortonormada $x_1, \ldots, x_n$ de E e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, com $|a_j| = 1$ tais que $\xi(x_j) = a_j x_j$.

b) Notemos $S^1 \subset \mathbb{C}$ o conjunto dos complexos de módulo 1, que sabemos ser conexo. Mostrar que, para cada base ortonormada $x_1, \ldots, x_n$ de E, tem lugar uma aplicação contínua (aliás, mesmo suave) $\Psi: (S^1)^n \to U(E)$, definida pela condição de $\Psi(a_1, \ldots, a_n)$ ser o isomorfismo ortogonal que aplica x_j em $a_j x_j$, e que $U(E)$ é a união das imagens destas aplicações.

c) Concluir de b) que $U(E)$ é conexo. Utilizar a mesma alínea para mostrar que, para cada $\xi \in U(E)$, existe uma aplicação contínua (aliás, mesmo suave) $\psi: \mathbb{R} \to U(E)$ tal que $\psi(0) = Id_E$ e $\psi(1) = \xi$. Concluir, a partir daqui, que, dados $\xi, \eta \in U(E)$, existe uma aplicação contínua (aliás, mesmo suave) $\psi: \mathbb{R} \to U(E)$ tal que $\psi(0) = \xi$ e $\psi(1) = \eta$ ($U(E)$ é conexo por arcos). **Sugestão:** Começar por considerar ψ_0 com $\psi_0(0) = Id_E$ e $\psi_0(1) = \xi^{-1} \circ \eta$.

d) Sendo $V_n(E) \subset E^n$ o conjunto das bases ortonormadas de E, concluir de c) que $V_n(E)$ é conexo, aliás é mesmo conexo por arcos.

Ex I.18 **($\boldsymbol{SO(E)}$ é conexo)** Seja E um espaço vectorial real de dimensão n, munido de um produto interno e seja $O(E)$ o conjunto dos isomorfismos ortogonais $\xi: E \to E$, $O_+(E) = SO(E)$ o conjunto dos isomorfismos ortogonais que conservam as orientações e $O_-(E)$ o conjunto dos isomorfismos ortogonais que invertem as orientações.

a) Reparar que, tendo em conta o exercício I.6, $O_+(E)$ é o conjunto dos isomorfismos ortogonais $\xi: E \to E$ com $\det(\xi) = 1$ e $O_-(E)$ é o conjunto dos isomorfismos ortogonais $\xi: E \to E$ com $\det(\xi) = -1$ e concluir, tendo em conta a continuidade da aplicação $\det: L(E; E) \to \mathbb{R}$, que $O_+(E)$ e $O_-(E)$ são abertos em $O(E)$.

b) Seja $\xi \in O(E)$ que não admita nenhum valor próprio. Mostrar que E é soma directa ortogonal de subespaços vectoriais ξ-invariantes de dimensão 2 (em particular n é par) e que $\xi \in O_+(E)$. **Sugestão:** Raciocinar por indução, tendo em conta as alíneas c) e d) do exercício I.16, a alínea c) do exercício I.15 e I.3.11.

c) Seja $\xi \in O_+(E)$. Mostrar que E é soma directa ortogonal de subespaços vectoriais ξ-invariantes $E = E_+ \oplus E_- \oplus E_0$ tais que $\xi_{/E_+} = Id_{E_+}$, $\xi_{/E_-} = -Id_{E_-}$ e $\xi_{/E_0}: E_0 \to E_0$ não admite valor próprio e que então E_- tem

---

[18] Também chamados unitários.

dimensão par.

d) Nas condições de c), mostrar que $E' = E_- \oplus E_0$ é soma directa ortogonal de uma família de subespaços vectoriais ξ-invariantes F_j com dimensão 2 tais que cada $\xi_{/F_j}$ conserve as orientações e concluir que E' admite uma estrutura complexa J, compatível com o produto interno, relativamente à qual $\xi_{/E'}$ é $\mathbb{C}$-linear (e portanto $\xi_{/E'} \in U(E')$). **Sugestão:** Fixar em cada F_j uma das duas estruturas complexas compatíveis e tomar para J a soma directa destas estruturas complexas.

e) Utilizar a alínea c) do exercício precedente para concluir que, para cada $\xi \in SO(E) = O_+(E)$, existe uma aplicação contínua (aliás, mesmo suave) $\psi: \mathbb{R} \to O_+(E)$ tal que $\psi(0) = Id_E$ e $\psi(1) = \xi$. Concluir daqui que, dados $\xi, \eta \in O_+(E)$ (respectivamente $\xi, \eta \in O_-(E)$), existe uma aplicação contínua (aliás, mesmo suave) $\psi: \mathbb{R} \to O_+(E)$ (respectivamente $\psi: \mathbb{R} \to O_-(E)$) tal que $\psi(0) = \xi$ e $\psi(1) = \eta$. Concluir que $O_+(E)$ e $O_-(E)$ são conexos por arcos, em particular conexos e que, portanto, salvo no caso trivial em que $E = \{0\}$, $O_+(E)$ e $O_-(E)$ são as componentes conexas de E.

f) Fixada uma orientação em E, mostrar que o conjunto $V_n(E)$ das bases ortonormadas de E é a união dos subconjuntos $V_{n+}(E)$ e $V_{n-}(E)$, constituídos respectivamente pelas bases ortonormadas directas e pelas bases ortonormadas retrógradas, que são abertos em $V_n(E)$ e ambos conexos por arcos, em particular conexos. Deduzir que, salvo no caso trivial em que $E = \{0\}$, $V_{n+}(E)$ e $V_{n-}(E)$ são as componentes conexas de $V_n(E)$.

Ex I.19 Se E é um espaço vectorial complexo de dimensão n, que relação existirá entre a orientação associada de E e a associada ao espaço vectorial conjugado $\overline{E}$?

Ex I.20 Seja $\xi: E \times E \to F$ uma aplicação bilinear. Seja $f: E \to F$ a aplicação definida por $f(x) = \xi(x, x)$. Mostrar que f é diferenciável em todos os pontos e que

$$Df_x(w) = \xi(x, w) + \xi(w, x).$$

Ex I.21 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, E um espaço vectorial de dimensão finita e $\Phi: J \to L(E; E)$ e $f: J \to E$ duas aplicações diferenciáveis em $t_0 \in J$. Mostrar que é diferenciável em t_0 a aplicação $g: J \to E$ definida por $g(t) = \Phi(t)(f(t))$ e calcular $g'(t_0)$.

Ex I.22 Seja E um espaço vectorial real de dimensão finita, munido de um produto interno. Mostrar que é de classe C^∞ a aplicação $h: E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \|x\|$ (a norma associada ao produto interno) e calcular $Dh_x(w)$.

Ex I.23 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita. Diz-se que uma aplicação $f: E \to F$ é *positivamente n-homogénea* (onde $n \geq 0$ é um inteiro) se, para cada $x \in E$ e $t > 0$, tem-se

$$f(tx) = t^n f(x).$$

a) Mostrar que, se $n \geq 1$ e se $f: E \to F$ é uma aplicação de classe C^1 positivamente n-homogénea, então a aplicação $Df: E \to L(E; F)$ é positivamente $(n-1)$-homogénea.
b) Mostrar que, se $n \geq 1$ e se $f: E \to F$ é uma aplicação de classe C^1 positivamente n-homogénea, então

$$Df_x(x) = nf(x).$$

c) Mostrar que, se $f: E \to F$ é de classe C^0 e positivamente 0-homogénea, então f é constante.
d) Mostrar que, se $f: E \to F$ é de classe C^1 e positivamente 1-homogénea, então f é uma aplicação linear.

Ex I.24 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um aberto, F um espaço vectorial de dimensão finita e $f: J \to F$ uma aplicação de classe C^k.
a) Mostrar que, para cada $0 \leq j \leq k$, a aplicação $f^{(j)}: J \to F$ é de classe C^{k-j} e ${f^{(j)}}^{(k-j)} = f^{(k)}$.
b) Mostrar que, se a aplicação $f^{(k)}$ é de classe C^j, então f é de classe C^{k+j}.

Ex I.25 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação de classe C^{k+1}. Dados $w_2, \ldots, w_{k+1} \in E$, mostrar que a aplicação $g: U \to F$, definida por

$$g(x) = D^k f_x(w_2, \ldots, w_{k+1}),$$

é de classe C^1 e que se tem

$$Dg_x(w_1) = D^{k+1} f_x(w_1, w_2, \ldots, , w_{k+1}).$$

Nota: Este resultado constitui normalmente um dos processos mais simples de calcular derivadas de ordem superior.

Ex I.26 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita e $\xi: E \times F \to G$ uma aplicação bilinear. Calcular $D^2\xi_{(x,y)}$.

Ex I.27 Seja $\xi: E \times F \times G \to H$ uma aplicação trilinear. Calcular $D^3\xi_{(x,y,z)}$.

Ex I.28 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita.
Mostrar que, se $f: E \to F$ é uma aplicação de classe C^2 positivamente 2-homogénea, então existe uma aplicação bilinear $\xi: E \times E \to F$ tal que se tenha $f(x) = \xi(x, x)$ (comparar com as alíneas c) e d) do exercício I.23).
Sugestão: Utilizar as alíneas a), b) e d) do exercício I.23 e definir $\xi(x, y) = \frac{1}{2} Df_x(y)$.

Ex I.29 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita e $f: E \to F$ uma aplicação de classe C^1. Mostrar que é de classe C^1 a aplicação $g: E \to F$ definida por

$$g(x) = \int_0^1 f(tx)\,dt$$

e obter uma fórmula para $Dg_x(w)$.

Ex I.30 Supondo conhecida uma versão de I.8.1 que garantisse a diferenciabilidade da aplicação Φ mas nada dissesse sobre a respectiva derivada, obter esta última por derivação de ambos os membros da identidade $\Phi(\xi) \circ \xi = Id_E$. Obter também uma fórmula para $D^2\Phi_\xi(\eta, \eta')$.

Ex I.31 Seja E um espaço euclidiano e seja $f: E \to E$ a aplicação definida por $f(x) = \langle x, x\rangle x$. Determinar $D^2 f_x(x, x)$. **Atenção:** Este exercício, com o seu aspecto *inocente*, pode conter uma *casca de banana*. Determinar, mais geralmente, $D^2 f_x(u, v)$, substituir no resultado u e v por x e, no caso do resultado obtido não coincidir com a primeira resposta, tentar descobrir qual o erro que foi feito.

Ex I.32 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, $\Omega \subset E \times F$ um aberto e $f: \Omega \to G$ uma aplicação de classe C^{k+1}, onde $k \geq 0$. Sejam U um aberto de E, $z_0 \in G$ e $g: U \to F$ uma aplicação *contínua* tal que, para cada $x \in U$, $(x, g(x)) \in \Omega$, $f(x, g(x)) = z_0$ e $D_2 f_x(x, g(x)) \in L(F; G)$ seja um isomorfismo. Mostrar que g é então uma aplicação de classe C^{k+1}.

Ex I.33 Nas hipóteses do exercício anterior, utilizar a identidade $f(x, g(x)) = z_0$ para obter directamente a seguinte fórmula para a derivada de g:

$$Dg_x = -(D_2 f_{(x,g(x))})^{-1} \circ D_1 f_{(x,g(x))}.$$

Ex I.34 Sejam os espaços vectoriais de dimensão finita E, F e G, os abertos $U \subset E$ e $V \subset F$ e as aplicações de classe C^2 $f: U \to V$ e $g: V \to G$. Mostrar que

$$D^2(g \circ f)_x(u, v) = D^2 g_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v)) + Dg_{f(x)}(D^2 f_x(u, v)).$$

No caso em que f e g são de classe C^3, obter uma fórmula análoga para $D^3(g \circ f)_x(u, v, w)$.

Ex I.35 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to F$ uma aplicação de classe C^2. Mostrar que, quaisquer que sejam $x \in U$ e $u, v \in E$,

$$D^2 f_x(u, v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu + tv) - f(x + tu) - f(x + tv) + f(x)}{t^2}.$$

Ex I.36 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $\Psi: L^2(E; E) \times E \to E$ a aplicação definida por $\Psi(\xi, x) = \xi(x, x)$. Mostrar que Ψ é de classe C^∞ e calcular $D\Psi_{(\xi,x)}(\eta, u)$.

Ex I.37 Se E é um espaço vectorial de dimensão finita, diz-se que uma aplicação bilinear $\xi: E \times E \to \mathbb{R}$ é *definida positiva* se, para cada $x \neq 0$ em E, $\xi(x, x) > 0$. Mostrar que o subconjunto $L^2_+(E; \mathbb{R})$ de $L^2(E; \mathbb{R})$, constituído pelas aplicações bilineares definidas positivas, é aberto em $L^2(E; \mathbb{R})$.
Sugestão: Fixando uma norma em E e considerando o subconjunto compacto de E, $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, tomar, para cada $\xi \in L^2_+(E; \mathbb{R})$, o mínimo estritamente positivo de $\xi(x, x)$ para $x \in S$.

Ex I.38 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^2. Seja $x_0 \in U$ tal que $Df_{x_0} = 0$ e que $D^2 f_{x_0} \in L^2(E; \mathbb{R})$ seja definida positiva. Mostrar que f admite no ponto x_0 um *mínimo local estrito*, isto é, que existe um aberto U', com $x_0 \in U' \subset U$, tal que, para cada $x \in U' \setminus \{x_0\}$, se tenha $f(x) > f(x_0)$. **Sugestão:** Fixar uma norma em E e considerar $r > 0$ tal que, sempre que $\|x - x_0\| < r$, se tenha $x \in U$ e $D^2 f_x$ definida positiva; mostrar que, dado $x \in U$, para o qual $0 < \|x - x_0\| < r$, a aplicação $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$, verifica $g(0) = f(x_0)$, $g(1) = f(x)$, $g'(0) = 0$ e $g''(t) > 0$, para cada t.

Ex I.39 Seja $\mathbb{K}$ um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notemos $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o espaço vectorial de dimensão n^2, constituído pelas matrizes de elementos de $\mathbb{K}$ com n linhas e n colunas, e seja $GL(n, \mathbb{K})$ o subconjunto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituído pelas matrizes invertíveis. Notemos I a matriz identidade de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) Mostrar que $GL(n, \mathbb{K})$ é aberto em $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e que tem lugar uma aplicação de classe C^∞, $\Psi: GL(n, \mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, definida por $\Psi(X) = X^{-1}$. Mostrar ainda que

$$D\Psi_X(A) = -X^{-1} \times A \times X^{-1},$$

em particular, na matriz identidade I, $D\Psi_I(A) = -A$. Reparar que, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, a aplicação Ψ é mesmo holomorfa. **Sugestão:** Trata-se de uma consequência imediata de I.8.1, considerando o isomorfismo canónico de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sobre $L(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$. Alternativamente, considerar a caracterização das matrizes invertíveis a partir do determinante, assim como a fórmula explícita de cada elemento da matriz inversa como quociente de dois determinantes, usando a identidade $\Psi(X) \times X = I$ para calcular a derivada.
b) Mostrar que tem lugar a seguinte fórmula, para a derivada de segunda ordem de Ψ na matriz identidade:

$$D^2\Psi_I(A, B) = B \times A + A \times B.$$

Ex I.40 Nas condições do exercício anterior, notemos, para cada $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(X)$ o determinante da matriz X e $\mathrm{Tr}(X)$ o seu traço (soma dos elementos diagonal principal). Mostrar que a aplicação $\det: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é de classe C^∞, sendo mesmo holomorfa no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mostrar que, na matriz identidade I, a sua derivada é dada por

$$D\det_I(A) = \mathrm{Tr}(A).$$

Sugestão: Considerar a fórmula explícita para o determinante como soma de $n!$ parcelas. Alternativamente, reduzir este resultado, por isomorfismo, ao correspondente resultado sobre $L(E;E)$.

Ex I.41 Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$, igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e lembremos que, como se viu em I.7.9, a aplicação determinante $\det: L(E;E) \to \mathbb{K}$ é suave e verifica $D\det_{Id_E}(\alpha) = \mathrm{Tr}(\alpha)$.

a) Mostrar que, sendo $L_{iso}(E;E)$ o aberto de $L(E;E)$ cujos elementos são os isomorfismos, tem-se, mais geralmente, para cada $\xi \in L_{iso}(E;E)$,

$$D\det_\xi(\alpha) = \mathrm{Tr}(\alpha \circ \xi^{-1})\det(\xi).$$

Sugestão: Fixado ξ, atender a que, para cada $\eta \in L(E;E)$, se tem $\det(\eta) = \det(\eta \circ \xi^{-1})\det(\xi)$, derivando em seguida ambos os membros desta identidade como funções de η, no elemento ξ.

b) Deduzir a seguinte fórmula para a derivada de segunda ordem de det na aplicação linear identidade:

$$D^2\det_{Id_E}(\alpha,\beta) = \mathrm{Tr}(\beta)\,\mathrm{Tr}(\alpha) - \mathrm{Tr}(\beta \circ \alpha).$$

Ex I.42 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, U um aberto de E e $x_0 \in U$ e suponhamos que U é convexo ou, mais geralmente, estrelado relativamente a x_0. Seja $f: U \to F$ uma aplicação de classe C^∞.

a) Verificar que existe uma aplicação de classe C^∞, $\lambda = (\lambda_x)_{x\in U}$, de U em $L(E;F)$ tal que, para cada $x \in U$,

$$f(x) = f(x_0) + \lambda_x(x - x_0)$$

e que se tem então necessariamente $\lambda_{x_0} = Df_{x_0}$.

Sugestão: Definir $\lambda_x = \int_0^1 Df_{x_0+t(x-x_0)}\,dt$, reparando que, para cada $x \in U$, tem-se, para $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$,

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt.$$

b) Deduzir de a) que existe uma aplicação de classe C^∞, $\mu = (\mu_x)_{x\in U}$, de U em $L(E,E;F)$, com cada μ_x simétrica, tal que, para cada $x \in U$,

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + \mu_x(x - x_0, x - x_0)$$

e que se tem então necessariamente $\mu_{x_0} = \frac{1}{2}\,D^2f_{x_0}$.

Sugestão: Partindo de μ'_x não necessariamente simétrica, tomar

$$\mu_x(u,v) = \frac{1}{2}(\mu'_x(u,v) + \mu'_x(v,u)).$$

CAPÍTULO II
Vectores Tangentes e Variedades

§1. Espaço vectorial tangente a um conjunto num ponto.

II.1.1 Sejam E um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto arbitrário e $x_0 \in A$. Utilizando a definição de Bouligand ([3]), vamos chamar *cone tangente* (ou *contingente*) de A em x_0 ao conjunto $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ dos vectores $w \in E$ para os quais existe uma sucessão de elementos $x_n \in A$, com $x_n \to x_0$, e uma sucessão de números reais $t_n > 0$ tais que $t_n(x_n - x_0) \to w$ e *cone tangente alargado* (ou *paratingente*) de A em x_0 ao conjunto $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ dos vectores $w \in E$ para os quais existem sucessões de elementos x_n e y_n de A, ambas convergentes para x_0, e uma sucessão de números reais $t_n > 0$, tais que $t_n(x_n - y_n) \to w$.
Repare-se que se tem sempre $\mathrm{t}_{x_0}(A) \subset \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$, uma vez que se pode tomar para (y_n) a sucessão com todos os termos iguais a x_0.
Vamos notar $T_{x_0}(A)$ o subespaço vectorial de E gerado por $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$, subespaço a que daremos o nome de *espaço vectorial tangente* a A no ponto x_0. Aos elementos de $T_{x_0}(A)$ daremos o nome de *vectores tangentes* a A no ponto x_0.

II.1.2 **(As noções são locais)** Suponhamos que A e B são subconjuntos do espaço vectorial E, de dimensão finita, que $x_0 \in A \cap B$ e que os conjuntos A e B *coincidem na vizinhança* de x_0, no sentido que existe uma vizinhança V de x_0 em E tal que $A \cap V = B \cap V$; verifica-se então trivialmente que $\mathrm{t}_{x_0}(A) = \mathrm{t}_{x_0}(B)$, $\mathrm{t}^+_{x_0}(A) = \mathrm{t}^+_{x_0}(B)$, e portanto também $T_{x_0}(A) = T_{x_0}(B)$.
Como consequência do que acabamos de dizer, vemos que, se $x_0 \in A \subset E$ e se $A' \subset A$ é uma vizinhança de x_0 *em* A, então A e A' coincidem na vizinhança de x_0 (tem-se $A' = A \cap V$, para uma certa vizinhança V de x_0 em E) e portanto $\mathrm{t}_{x_0}(A') = \mathrm{t}_{x_0}(A)$, $\mathrm{t}^+_{x_0}(A') = \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ e $T_{x_0}(A') = T_{x_0}(A)$.

II.1.3 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $x_0 \in A \subset B \subset E$. Verifica-se então trivialmente que $\mathrm{t}_{x_0}(A) \subset \mathrm{t}_{x_0}(B)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A) \subset \mathrm{t}^+_{x_0}(B)$, e portanto também $T_{x_0}(A) \subset T_{x_0}(B)$.

II.1.4 As noções anteriores também não dependem do espaço vectorial ambiente, no sentido seguinte: Suponhamos que E é um espaço vectorial de dimensão finita, que $x_0 \in A \subset E$ e que E' é um subespaço vectorial de E tal que $A \subset E'$. Tem-se então que os conjuntos $\mathrm{t}_{x_0}(A)$, $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ e $T_{x_0}(A)$ são os mesmos, quer se considere A como parte de E ou como parte de E'. Para justificar esta afirmação basta relembrarmos a definição, tendo presente o facto de todo o subespaço vectorial de E ser um subconjunto fechado de E.

II.1.5 Podemos apresentar as seguintes caracterizações equivalentes de $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$, que, nalguns casos, é importante utilizar:
Seja E um espaço vectorial de dimensão finita, sobre o qual se considera uma das suas normas, e seja $x_0 \in A \subset E$. Para cada $w \in E$, tem-se então:
a) $w \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$ se, e só se, quaisquer que sejam $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ e $t > 0$ com $\|x - x_0\| < \delta$ e $\|t(x - x_0) - w\| < \varepsilon$.
b) $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ se, e só se, quaisquer que sejam $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $x, y \in A$ e $t > 0$ com $\|x - x_0\| < \delta$, $\|y - x_0\| < \delta$ e $\|t(x - y) - w\| < \varepsilon$.
Dem: Uma vez que as demonstrações são muito semelhantes, apresentamos apenas a de b). Supondo que $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$, podemos considerar as sucessões de elementos $x_n, y_n \in A$ e $t_n > 0$, nas condições da definição, e então, dados $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, basta tomar $x = x_n$, $y = y_n$ e $t = t_n$, para n suficientemente grande, para se verificar a condição do enunciado. Suponhamos, reciprocamente, verificada a condição do enunciado. Para cada n escolhamos $x_n, y_n \in A$ e $t_n > 0$ tais que $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}$, $\|y_n - x_0\| < \frac{1}{n}$ e $\|t_n(x_n - y_n) - w\| < \frac{1}{n}$; obtemos assim sucessões que vão verificar $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ e $t_n(x_n - y_n) \to w$, o que mostra que $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$. □

II.1.6 Se E é um espaço vectorial, diz-se que um conjunto $B \subset E$ é um *cone* se $0 \in B$ e, quaisquer que sejam $x \in B$ e $t > 0$, tem-se $tx \in B$. Dizemos que ele é um *cone simétrico* se, além disso, se tem $-x \in B$ sempre que $x \in B$.
Para um cone simétrico tem-se assim $tx \in B$, sempre que $x \in B$ e $t \in \mathbb{R}$.

II.1.7 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $x_0 \in A \subset E$. Tem-se então que $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ é um cone fechado e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ é um cone simétrico fechado.
Dem: Vejamos que $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ é um cone fechado. Para vermos que $0 \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$, basta tomarmos para x_n a sucessão com todos os termos iguais a x_0 e para t_n uma sucessão arbitrária de números reais estritamente positivos. Supondo que $w \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$ e que $t > 0$, podemos escolher $x_n \in A$ e $t_n > 0$ tais que $x_n \to x_0$ e $t_n(x_n - x_0) \to w$ e tem-se então $(t\,t_n)(x_n - x_0) \to tw$, com $t\,t_n > 0$, o que mostra que $tw \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$. Acabamos de mostrar que $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ é um cone e vamos agora ver que temos um conjunto fechado, para o que será cómodo utilizar a caracterização de $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ apresentada em II.1.5. Notando, para cada $\delta > 0$, C_δ o conjunto dos elementos da forma $t(x - x_0)$, com $t > 0$, $x \in A$ e $\|x - x_0\| < \delta$, a caracterização referida vai-nos garantir que $w \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$ se, e só se, para cada $\delta > 0$, w é aderente ao conjunto C_δ. Por outras palavras, $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ é a intersecção dos conjuntos fechados aderência dos C_δ, com $\delta > 0$, e é portanto um conjunto fechado. A prova de que $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ é também um cone fechado é análoga e o facto de este último ser simétrico resulta de que, se $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ e $t_n(x_n - y_n) \to w$, então $t_n(y_n - x_n) \to -w$. □

Os dois resultados que apresentamos a seguir exibem casos particulares em que é especialmente simples a determinação do cone tangente ou do cone tangente alargado.

II.1.8 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $B \subset E$ um cone fechado. Tem-se então $\mathrm{t}_0(B) = B$ e, mais geralmente, para cada $x_0 \in E$, $\mathrm{t}_{x_0}(x_0 + B) = B$.[19]

Dem: Dado $w \in B$, podemos considerar a sucessão $x_n = x_0 + \frac{1}{n}w$ de elementos de $x_0 + B$, convergente para x_0, e a sucessão de reais $t_n = n > 0$, tendo-se $t_n(x_n - x_0) = w \to w$, o que mostra que $w \in \mathrm{t}_{x_0}(x_0 + B)$. Suponhamos, reciprocamente, que $w \in \mathrm{t}_{x_0}(x_0 + B)$; existe então uma sucessão de elementos $x_n \in x_0 + B$, convergente para x_0, e uma sucessão de reais $t_n > 0$, tais que $t_n(x_n - x_0) \to w$, pelo que, uma vez que se tem $x_n - x_0 \in B$, donde também $t_n(x_n - x_0) \in B$, o facto de B ser fechado garante que $w \in B$. □

II.1.9 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ um conjunto e $x_0 \in A$ que seja aderente ao interior de A. Tem-se então $\mathrm{t}^+_{x_0}(A) = E$, e portanto também $T_{x_0}(A) = E$.

Dem: Vamos aplicar a caracterização do cone tangente alargado em II.1.5 para o que, dado $w \in E$, consideramos $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Escolhamos então $y \in \mathrm{int}(A)$ tal que $\|y - x_0\| < \frac{\delta}{2}$ e $0 < \delta' \leq \frac{\delta}{2}$ tal que a bola aberta de centro y e raio δ' esteja contida em A. Escolhamos $t > 0$ tal que $\frac{1}{t}\|w\| < \delta'$ e seja $x = y + \frac{1}{t}w$. Tem-se assim também $x \in A$,

$$\|x - x_0\| \leq \|y - x_0\| + \|\frac{1}{t}w\| < \delta$$

e $\|t(x - y) - w\| = 0 < \varepsilon$, o que mostra que $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$. □

II.1.10 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ e $x_0 \in \mathrm{int}(A)$. Tem-se então $\mathrm{t}_{x_0}(A) = \mathrm{t}^+_{x_0}(A) = T_{x_0}(A) = E$.

Dem: Uma vez que A coincide com E na vizinhança de x_0, ficamos reduzidos a mostrar que se tem $\mathrm{t}_{x_0}(E) = E$ e isso é uma consequência de se ter $E = x_0 + E$, com E cone fechado. □

II.1.11 **(Corolário)** Consideremos o espaço vectorial $\mathbb{R}$ e $a < b$ dois números reais. Tem-se então:

a) Se A é um dos conjuntos $[a, b[$, $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$, tem-se $\mathrm{t}_a(A) = [0, +\infty[$ e $\mathrm{t}^+_a(A) = T_a(A) = \mathbb{R}$.

b) Se A é um dos conjuntos $]a, b]$, $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$, tem-se $\mathrm{t}_b(A) =]-\infty, 0]$ e $\mathrm{t}^+_b(A) = T_b(A) = \mathbb{R}$.

Dem: O facto de se ter $\mathrm{t}_a([a, +\infty[) = [0, +\infty[$ vem de que se pode escrever

---

[19] Este resultado, juntamente com o precedente, mostra que os conjuntos que podem ser da forma $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ são precisamente os cones fechados.

$[a,+\infty[\,= a + [0,+\infty[$, onde $[0,+\infty[$ é um cone fechado em $\mathbb{R}$, e o facto de se ter $\mathrm{t}^+_a([a,+\infty[) = T_a([a,+\infty[) = \mathbb{R}$ resulta de a ser aderente ao interior $]a,+\infty[$ de $[a,+\infty[$. Para as restantes conclusões de a), basta atender a que $[a,b[$ e $[a,b]$ coincidem com $[a,+\infty[$ na vizinhança de a, porque todos têm a mesma intersecção com o aberto $]-\infty,b[$ de $\mathbb{R}$, que contém a. As conclusões de b) são análogas, a partir do facto de se poder escrever $]-\infty,b] = b + \,]-\infty,0]$, onde $]-\infty,0]$ é um cone fechado em $\mathbb{R}$ e de b ser aderente ao interior de $]-\infty,b]$. □

II.1.12 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $x_0 \in A \subset E$. Tem-se então

$$\mathrm{t}_{x_0}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{t}^+_{x_0}(A) = \{0\} \Leftrightarrow x_0 \text{ é um ponto isolado de } A.$$

Dem: Se x_0 é um ponto isolado de A, então, quaisquer que seja as sucessões x_n e y_n de elementos de A, com $x_n \to x_0$ e $y_n \to x_0$, tem-se $x_n = x_0 = y_n$ a partir de certa ordem, de onde se deduz trivialmente que 0 é o único vector no cone tangente alargado de A em x_0. Suponhamos agora que x_0 é um elemento não isolado de A. Podemos então considerar uma sucessão de elementos $x_n \in A$, distintos de x_0, convergente para x_0. Sendo $S \subset E$ o conjunto dos vectores de norma 1, que é fechado e limitado, portanto compacto, podemos considerar a sucessão dos elementos $\frac{1}{\|x_n - x_0\|}(x_n - x_0) \in S$. A compacidade de S implica que, se necessário substituindo a sucessão x_n por uma subsucessão, pode-se já supor que $\frac{1}{\|x_n - x_0\|}(x_n - x_0) \to w \in S$, tendo-se então que w é um elemento não nulo de $\mathrm{t}_{x_0}(A)$. □

§2. Funções diferenciáveis em conjuntos não abertos.

Vamos começar por estender a noção de aplicação de classe C^k, que até agora se aplica apenas a aplicações definidas em abertos de espaços vectoriais de dimensão finita, ao quadro das aplicações cujo domínio é um subconjunto não obrigatoriamente aberto.

II.2.1 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um conjunto arbitrário e $f\colon A \to F$ uma aplicação. Um *prolongamento* de f a um aberto U de E, com $A \subset U$, é uma aplicação $\overline{f}\colon U \to F$ tal que f seja a restrição de $\overline{f}$. Um *prolongamento local* de f *no ponto* $x_0 \in A$ é uma aplicação $\overline{f}\colon U \to F$, com U aberto de E contendo x_0, tal que f e $\overline{f}$ tenham a mesma restrição a $A \cap U$. É claro que um prolongamento de f a um aberto U contendo A é, em particular, um prolongamento local de f em todos os pontos de A.

Diz-se que f é *de classe* C^k (onde $0 \leq k \leq \infty$) se, para cada $x_0 \in A$, existe um prolongamento local de classe C^k de f no ponto x_0. Como anteriormente, às aplicações de classe C^∞ também se dá o nome de *aplicações suaves*.[20]

É claro que, em geral, poder-se-ão considerar muitos prolongamentos locais de classe C^k e não haverá nenhum que seja melhor que os outros. Um primeiro cuidado a ter com a definição anterior é evidentemente o seguinte:

II.2.2 No caso em que A é um aberto de E, uma aplicação $f\colon A \to F$ é de classe C^k, no sentido da definição anterior, se, e só se, é de classe C^k, no sentido já conhecido.

Dem: Se f é de classe C^k, no sentido já conhecido, então o próprio f é um prolongamento local de f em todos os pontos de A, pelo que f é de classe C^k, no sentido da definição anterior. Suponhamos, reciprocamente, que f é de classe C^k, no sentido da definição anterior. Para cada $x \in A$, podemos então considerar um aberto U_x de E, com $x \in U_x$, e uma aplicação de classe C^k $f_{(x)}\colon U_x \to F$ tal que f e $f_{(x)}$ tenham a mesma restrição a $A \cap U_x$. Em particular a restrição de f a cada $A \cap U_x$ é de classe C^k, no sentido já conhecido. Uma vez que o aberto A é a união dos abertos $A \cap U_x$, com $x \in A$, podemos ter em conta I.6.8 para concluir que $f\colon A \to F$ é de classe C^k, no sentido já conhecido. □

II.2.3 **(Notas) a)** Na maioria das situações concretas, para mostrar que uma dada aplicação $f\colon A \to F$ é de classe C^k, será extremamente simples explicitar um prolongamento de classe C^k de f a um aberto contendo o domínio, não sendo assim necessário procurar prolongamentos locais nos diferentes pontos. De facto, usando o teorema da partição da unidade, que será estudado mais adiante, pode-se provar que toda a aplicação de classe C^k admite um prolongamento de classe C^k a um aberto contendo o domínio.

b) Se $f\colon A \to F$ é de classe C^k, então é de classe C^j, para cada $0 \le j \le k$.

c) É evidente que toda a aplicação de classe C^0, $f\colon A \to F$, é contínua mas, no caso em que o conjunto A não é aberto, uma aplicação contínua $f\colon A \to F$ pode perfeitamente não ser de classe C^0 (no entanto, quem conheça o teorema de extensão de Tietze-Urysohn[21] verificará sem dificuldade que, no caso em que o conjunto A é *localmente fechado*[22], é

---

[20]Poderíamos evidentemente ter definido a noção de aplicação diferenciável num ponto $x_0 \in A$ de maneira análoga. A razão por que nos limitamos a definir a classe C^k é simplesmente para tentar aligeirar o texto.

[21]Ver, por exemplo, o exercício II.21, no fim do capítulo.

[22]Um conjunto $A \subset E$ diz-se localmente fechado se, para cada $x_0 \in A$, existe um aberto U de E, com $x_0 \in U$, tal que $A \cap U$ seja fechado em U, condição que se pode verificar ser equivalente à existência de um aberto V de E com $A \subset V$ e A fechado em V. Pode-se mostrar facilmente que $A \subset E$ é localmente fechado se, e só se, $A \subset E$ é localmente compacto, para a topologia induzida (ver a prova de II.6.22 adiante).

ainda verdade que uma aplicação $f\colon A \to F$ é de classe C^0 se, e só se, é contínua).

d) É evidente que toda a aplicação de classe C^∞ é também de classe C^k, para todo o k finito. No entanto, no caso em que o domínio A não é aberto, nada nos garante que uma aplicação que seja de classe C^k, para todo o k finito, tenha que ser de classe C^∞.

e) Seria perfeitamente possível definir, na mesma linha que anteriormente, a noção de aplicação holomorfa tendo como domínio uma parte arbitrária de um espaço vectorial complexo de dimensão finita. Não exploraremos, no entanto, aqui essa via, uma vez que o estudo das aplicações holomorfas fora do quadro dos domínios abertos será adiante abordado de um ponto de vista diferente (cf. a secção III.9).

II.2.4 **(Lema)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto arbitrário, $f\colon A \to F$ uma aplicação de classe C^1 e $x_0 \in A$. Consideremos sucessões de números reais $t_n > 0$ e de elementos $x_n, y_n \in A$ tais que $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ e $t_n(x_n - y_n) \to w \in E$. Tem-se então

$$t_n(f(x_n) - f(y_n)) \to D\overline{f}_{x_0}(w),$$

onde $\overline{f}\colon U \to F$ é um prolongamento local arbitrário de classe C^1 de f em x_0.

Dem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Seja $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $x \in E$ verifica $\|x - x_0\| < \varepsilon$, tem-se $x \in U$ e $\|D\overline{f}_x - D\overline{f}_{x_0}\| \le \delta$. Pela terceira versão da fórmula da média (cf. I.5.20), e uma vez que a bola aberta de centro x_0 e raio ε é um conjunto convexo, concluímos que, se $\|x - x_0\| < \varepsilon$ e $\|y - x_0\| < \varepsilon$, tem-se

$$\|\overline{f}(x) - \overline{f}(y) - D\overline{f}_{x_0}(x - y)\| \le \delta\|x - y\|.$$

Escolhendo n_0 tal que, sempre que $n \ge n_0$, $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ e $\|y_n - x_0\| < \varepsilon$, tem-se, para esses valores de n, $x_n, y_n \in A \cap U$, portanto $\overline{f}(x_n) = f(x_n)$ e $\overline{f}(y_n) = f(y_n)$, donde

$$\|f(x_n) - f(y_n) - D\overline{f}_{x_0}(x_n - y_n)\| \le \delta\|x_n - y_n\|,$$

e portanto também, tendo em conta o facto de a aplicação $D\overline{f}_{x_0}$ ser linear,

$$\|t_n(f(x_n) - f(y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(t_n(x_n - y_n))\| \le \delta\|t_n(x_n - y_n)\|.$$

Para $n \ge n_0$ tem-se então

$$\begin{aligned}
&\|t_n(f(x_n) - f(y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(w)\| = \\
&= \|t_n(f(x_n) - f(y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(t_n(x_n - y_n)) + D\overline{f}_{x_0}(t_n(x_n - y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(w)\| \le \\
&\le \|t_n(f(x_n) - f(y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(t_n(x_n - y_n))\| + \|D\overline{f}_{x_0}(t_n(x_n - y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(w)\| \le \\
&\le \delta\|t_n(x_n - y_n)\| + \|D\overline{f}_{x_0}(t_n(x_n - y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(w)\|.
\end{aligned}$$

O facto de se ter $t_n(x_n - y_n) \to w$, e portanto $\|t_n(x_n - y_n)\| \to \|w\|$ e

$D\overline{f}_{x_0}(t_n(x_n - y_n)) \to D\overline{f}_{x_0}(w)$, implica a existência de $n_1 \geq n_0$ tal que, sempre que $n \geq n_1$,

$$\|t_n(x_n - y_n)\| \leq \|w\| + 1,$$
$$\|D\overline{f}_{x_0}(t_n(x_n - y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(w)\| \leq \delta,$$

pelo que concluímos que, para $n \geq n_1$,

$$\|t_n(f(x_n) - f(y_n)) - D\overline{f}_{x_0}(w)\| \leq \delta(\|w\| + 2).$$

Tendo em conta a arbitrariedade de δ, ficou assim provado que se tem efectivamente $t_n(f(x_n) - f(y_n)) \to D\overline{f}_{x_0}(w)$. □

II.2.5 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um conjunto arbitrário e $f\colon A \to F$ uma aplicação de classe C^1. Para cada $x_0 \in A$, fica então bem definida uma aplicação linear $Df_{x_0}\colon T_{x_0}(A) \to F$, o *diferencial* ou *aplicação linear derivada* de f no ponto x_0, pela condição de se ter $Df_{x_0}(w) = D\overline{f}_{x_0}(w)$, onde $\overline{f}\colon U \to F$ é um prolongamento local de classe C^1 arbitrário de f em x_0.
É claro que, no caso em que A é um aberto de E, tem-se $T_{x_0}(A) = E$ e a definição de Df_{x_0} que estamos de apresentar é equivalente à já conhecida.
Dem: Tudo o que é necessário mostrar é que, se $\overline{f}\colon U \to F$ e $\widehat{f}\colon V \to F$ são dois prolongamentos locais de classe C^1 de f em x_0, então as aplicações lineares $D\overline{f}_{x_0}\colon E \to F$ e $D\widehat{f}_{x_0}\colon E \to F$ coincidem no subespaço vectorial $T_{x_0}(A)$ de E. Uma vez que o conjunto dos vectores de E onde duas aplicações lineares coincidem é sempre um subespaço vectorial e que $T_{x_0}(A)$ é o subespaço vectorial gerado por $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$, basta-nos provar que, para cada $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$, tem-se $D\overline{f}_{x_0}(w) = D\widehat{f}_{x_0}(w)$. Ora isso resulta do lema II.2.4, uma vez que existem sucessões de números reais $t_n > 0$ e de elementos $x_n, y_n \in A$ tais que $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ e $t_n(x_n - y_n) \to w$ e então a sucessão $t_n(f(x_n) - f(y_n))$ converge tanto para $D\overline{f}_{x_0}(w)$ como para $D\widehat{f}_{x_0}(w)$. □

II.2.6 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ e $B \subset F$ conjuntos arbitrários, $f\colon A \to B$ uma aplicação de classe C^1 (isto é, uma aplicação de classe C^1 de A em F, tal que $f(A) \subset B$) e $x_0 \in A$. Tem-se então que a aplicação linear $Df_{x_0}\colon T_{x_0}(A) \to F$ aplica $T_{x_0}(A)$ *em* $T_{f(x_0)}(B)$, $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ *em* $\mathrm{t}_{f(x_0)}(B)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ *em* $\mathrm{t}^+_{f(x_0)}(B)$.
Dem: Seja $\overline{f}\colon U \to F$ um prolongamento local de classe C^1 de f em x_0. Suponhamos que $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$. Podemos então escolher sucessões de números reais $t_n > 0$ e de elementos $x_n, y_n \in A$ tais que $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ e $t_n(x_n - y_n) \to w \in E$ e tem-se então, pelo lema II.2.4,

$$t_n(f(x_n) - f(y_n)) \to D\overline{f}_{x_0}(w) = Df_{x_0}(w).$$

Uma vez que $f(x_n), f(y_n) \in B$ e, pela continuidade de f, $f(x_n) \to f(x_0)$ e

$f(y_n) \to f(x_0)$, concluímos que $Df_{x_0}(w) \in \mathrm{t}^+_{f(x_0)}(B)$. No caso em que se tem mesmo $w \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$, sabemos que se pode tomar atrás para (y_n) a sucessão com todos os termos iguais a x_0, pelo que podemos concluir que se tem mesmo $Df_{x_0}(w) \in \mathrm{t}_{f(x_0)}(B)$. Uma vez que o conjunto dos vectores de $T_{x_0}(A)$, cuja imagem pela aplicação linear $Df_{x_0}: T_{x_0}(A) \to F$ está no subespaço vectorial $T_{f(x_0)}(B)$ de F, é um subespaço vectorial de $T_{x_0}(A)$, que, pelo que vimos, contém $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$, podemos agora concluir que ele é precisamente o subespaço vectorial gerado $T_{x_0}(A)$, o que mostra que a aplicação linear $Df_{x_0}: T_{x_0}(A) \to F$ aplica efectivamente $T_{x_0}(A)$ em $T_{f(x_0)}(B)$. □

Como primeira aplicação dos resultados precedentes, podemos obter facilmente uma condição necessária para uma aplicação de classe C^1, com valores reais e definida num subconjunto de um espaço vectorial de dimensão finita, atingir um máximo ou um mínimo num ponto do seu domínio.
O leitor relacionará facilmente o resultado que vamos enunciar com o caso, que decerto já encontrou, em que o domínio é um aberto de $\mathbb{R}^n$, no qual a condição em questão é o anulamento das derivadas parciais.

II.2.7 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto e $f: A \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^1 atingindo um máximo (respectivamente um mínimo) num ponto $x_0 \in A$. Tem-se então:
a) Para cada $u \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$, $Df_{x_0}(u) \leq 0$ (respectivamente $Df_{x_0}(u) \geq 0$).
b) No caso particular em que $\mathrm{t}_{x_0}(A) = T_{x_0}(A)$,[23] tem-se $Df_{x_0}(u) = 0$, para cada $u \in T_{x_0}(A)$.
Dem: Examinemos apenas o caso em que f atinge um máximo em x_0, uma vez que o caso do mínimo é análogo. Como f atinge um máximo em x_0, f aplica A em $]-\infty, f(x_0)]$ e portanto, pelo resultado precedente, para cada $u \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$,

$$Df_{x_0}(u) \in \mathrm{t}_{f(x_0)}(]-\infty, f(x_0)]) =]-\infty, 0],$$

o que prova a). Quanto a b), se $u \in T_{x_0}(A) = \mathrm{t}_{x_0}(A)$, tem-se também $-u \in T_{x_0}(A) = \mathrm{t}_{x_0}(A)$ pelo que, aplicando a conclusão de a) a u e a $-u$, concluímos que $Df_{x_0}(u) \leq 0$ e

$$-Df_{x_0}(u) = Df_{x_0}(-u) \leq 0,$$

e portanto $Df_{x_0}(u) = 0$. □

II.2.8 **(Nota)** Pareceria possível proceder do mesmo modo que para a derivada de primeira ordem, para definir, para cada aplicação $f: A \to B$ de classe C^2, uma derivada de segunda ordem $D^2 f_{x_0}$, que seria uma aplicação bilinear de

[23] É o que acontece no quadro das variedades sem bordo, estudadas adiante (cf. II.4.10).

$T_{x_0}(A) \times T_{x_0}(A)$ em F (ou, melhor ainda, em $T_{f(x_0)}(B)$). Tudo o que haveria a fazer seria tomar um prolongamento local de classe C^2, $\overline{f}\colon U \to F$, de f em x_0 e definir $D^2 f_{x_0}$ como a restrição da aplicação bilinear $D^2\overline{f}_{x_0}\colon E \times E \to F$. Esta definição não é, no entanto, legítima, visto que, em geral, o resultado depende do prolongamento $\overline{f}$ (ver, por exemplo, o exercício II.14 no final do capítulo).

A maioria das propriedades das aplicações de classe C^k em conjuntos abertos estende-se trivialmente ao caso em que o domínio é um conjunto arbitrário. Apresentamos em seguida um exemplo do tipo de demonstração trivial que se pode fazer para obter um resultado para domínios arbitrários a partir do correspondente resultado para domínios abertos.

II.2.9 Sejam os espaços vectoriais de dimensão finita $E, F_1, \dots, F_n$, o conjunto $A \subset E$ e, para cada $1 \leq j \leq n$, $f_j\colon A \to F_j$ uma aplicação e consideremos a correspondente aplicação

$$f\colon A \to F_1 \times \cdots \times F_n, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Tem-se então que f é de classe C^k se, e só se, cada f_j é de classe C^k e então, no caso em que $k \geq 1$, tem-se, para cada $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$,

$$Df_{x_0}(u) = (Df_{1x_0}(u), \dots, Df_{nx_0}(u)).$$

Dem: Suponhamos que f é de classe C^k. Se $x_0 \in A$, podemos considerar um prolongamento local de classe C^k $\overline{f}\colon U \to F_1 \times \cdots \times F_n$ de f em x_0 e então as aplicações $\overline{f}_j\colon U \to F_j$ definidas por $\overline{f}(x) = (\overline{f}_1(x), \dots, \overline{f}_n(x))$ vão ser prolongamentos locais de classe C^k dos f_j, o que mostra que estas aplicações são de classe C^k. Suponhamos, reciprocamente, que cada f_j é de classe C^k e seja, mais uma vez, $x_0 \in A$ arbitrário. Para cada $1 \leq j \leq n$, podemos considerar um prolongamento local de classe C^k $\overline{f}_j\colon U_j \to F_j$ de f_j em x_0. Tem-se então que $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j$ é um aberto de E contendo x_0 e a aplicação de classe C^k $\overline{f}\colon U \to F_1 \times \cdots \times F_n$ definida por $\overline{f}(x) = (\overline{f}_1(x), \dots, \overline{f}_n(x))$ é um prolongamento local de classe C^k de f. Ficou assim provado que f é de classe C^k e podemos agora escrever, para cada $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$,

$$\begin{aligned} Df_{x_0}(u) &= D\overline{f}_{x_0}(u) = \\ &= (D\overline{f}_{1x_0}(u), \dots, D\overline{f}_{nx_0}(u)) = (Df_{1x_0}(u), \dots, Df_{nx_0}(u)). \quad \square \end{aligned}$$

Daqui para a frente aplicaremos frequentemente generalizações do tipo da anterior sem as enunciarmos explicitamente. Pela especial importância que ele vai ter, vamos, no entanto, observar detalhadamente o que se passa com o teorema da derivada da função composta.

II.2.10 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ e $B \subset F$ dois subconjuntos e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to G$ duas aplicações de classe C^k. Tem-se então que $g \circ f\colon A \to G$ é também de classe C^k e, no caso em que $k \geq 1$,

$$D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{f(x_0)} \circ Df_{x_0}.$$

Dem: Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Sejam $\overline{g}\colon V \to G$ um prolongamento local de classe C^k de g em $f(x_0)$ e $\overline{f}\colon U \to F$ um prolongamento local de classe C^k de f em x_0. Tendo em conta a continuidade de $\overline{f}$, vemos que, se necessário substituindo o aberto U pelo aberto $\overline{f}^{-1}(V)$, que ainda contém x_0, e $\overline{f}$ pela sua restrição, pode-se já supor que $\overline{f}(U) \subset V$. Concluímos daqui que $\overline{g} \circ \overline{f}\colon U \to G$ é um prolongamento local de classe C^k de $g \circ f\colon A \to G$ em x_0. Ficou assim provado que $g \circ f$ é de classe C^k. Se $k \geq 1$, tem-se $D(\overline{g} \circ \overline{f})_{x_0} = D\overline{g}_{f(x_0)} \circ D\overline{f}_{x_0}$ pelo que, para cada $w \in T_{x_0}(A)$,

$$\begin{aligned} D(g \circ f)_{x_0}(w) &= D(\overline{g} \circ \overline{f})_{x_0}(w) = D\overline{g}_{f(x_0)}(D\overline{f}_{x_0}(w)) = \\ &= D\overline{g}_{f(x_0)}(Df_{x_0}(w)) = Dg_{f(x_0)}(Df_{x_0}(w)), \end{aligned}$$

o que mostra que $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{f(x_0)} \circ Df_{x_0}$. □

II.2.11 **(A noção de aplicação de classe C^k é local)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto e $f\colon A \to F$ uma aplicação. Tem-se então:

a) Se f é de classe C^k e se $B \subset A$ é outro conjunto, a restrição $f_{/B}\colon B \to F$ é também de classe C^k e, para cada $x_0 \in B$, $D(f_{/B})_{x_0}$ é a restrição de Df_{x_0} a $T_{x_0}(B)$.

b) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família de abertos de A, de união A, tal que cada restrição $f_{/A_j}\colon A_j \to F$ seja de classe C^k (ou, o que é equivalente, se, para cada $x \in A$, existe um aberto V de A, com $x \in V$, tal que $f_{/V}$ seja de classe C^k), então f é de classe C^k.

Dem: A alínea a) resulta simplesmente de que, se $x_0 \in B$ e $\overline{f}\colon U \to F$ é um prolongamento local de classe C^k de f em x_0, então $\overline{f}$ é também um prolongamento local de $f_{/B}$ em x_0. Provemos então b). Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Podemos escolher j tal que $x_0 \in A_j$ e então o facto de $f_{/A_j}\colon A_j \to F$ ser de classe C^k garante a existência de um prolongamento local $\overline{f}\colon U \to F$ de classe C^k de $f_{/A_j}$ em x_0. Apesar de $\overline{f}$ não ter que ser um prolongamento local de f em x_0, uma vez que nada sabemos sobre os valores de $\overline{f}$ nos pontos de $A \cap U$ que não estejam em A_j, o facto de A_j ser aberto em A garante a existência de um aberto U_j de E tal que $A_j = A \cap U_j$, tendo-se evidentemente $x_0 \in U_j$, e então $\overline{f}_{/U_j \cap U}\colon U_j \cap U \to F$ já é um prolongamento local de f em x_0. Ficou assim provado que $f\colon A \to F$ é de classe C^k. □

Outro resultado que será utilizado com frequência, e que já encontrámos no caso dos domínios abertos, tem a ver com o estudo de aplicações com valores num espaço de aplicações lineares.

II.2.12 Sejam E, F e G espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto e $f\colon A \to L(F;G)$ uma aplicação. Tem-se então que f é de classe C^k se, e só se, para cada $v \in F$, for de classe C^k a aplicação $f_{(v)}\colon A \to G$, definida por $f_{(v)}(x) = f(x)(v)$, e então, quando $k \geq 1$, tem-se, para cada $x \in A$ e $u \in T_x(A)$,

$$Df_{(v)_x}(u) = Df_x(u)(v).$$

Mais precisamente, dada uma base $v_1, \ldots, v_n$ de F, para garantir que f é de classe C^k, basta verificar que $f_{(v)}$ é de classe C^k quando v é um dos n vectores daquela base.

Dem: A razão por que referimos esta generalização de I.6.14 está no facto de a sua justificação se fazer de modo mais natural por repetição do caminho seguido na demonstração daquele resultado e não por aplicação deste a prolongamentos locais convenientes. □

II.2.13 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ e $B \subset F$ dois subconjuntos e $f\colon A \to B$ uma bijecção. Tal como no caso dos conjuntos abertos, diz-se que f é um *difeomorfismo de classe* C^k se ambas as aplicações $f\colon A \to B$ e $f^{-1}\colon B \to A$ forem de classe C^k. Como antes, chamamos simplesmente *difeomorfismos* aos difeomorfismos de classe C^∞, isto é, às bijecções que são suaves, assim como as respectivas inversas. Diz-se que A e B são *difeomorfos* se existe um difeomorfismo $f\colon A \to B$.

Repare-se que dizer que a bijecção f é um difeomorfismo de classe C^k quer dizer que tanto f como f^{-1} admitem prolongamentos locais de classe C^k, mas isso não implica de modo nenhum que f admita prolongamentos locais que sejam difeomorfismos de classe C^k entre abertos de E e de F.[24]

II.2.14 Dados $A \subset E$, $B \subset F$ e um difeomorfismo de classe C^1, $f\colon A \to B$, tem-se que, para cada $x_0 \in A$, Df_{x_0} é um isomorfismo de $T_{x_0}(A)$ *sobre* $T_{f(x_0)}(B)$, que aplica $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ *sobre* $\mathrm{t}_{f(x_0)}(B)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ *sobre* $\mathrm{t}^+_{f(x_0)}(B)$, o isomorfismo inverso sendo igual a $D(f^{-1})_{f(x_0)}$.

Dem: Já sabemos que Df_{x_0} é uma aplicação linear de $T_{x_0}(A)$ em $T_{f(x_0)}(B)$, que aplica $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ em $\mathrm{t}_{f(x_0)}(B)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ em $\mathrm{t}^+_{f(x_0)}(B)$. Do mesmo modo, $D(f^{-1})_{f(x_0)}$ é uma aplicação linear de $T_{f(x_0)}(B)$ em $T_{x_0}(A)$, que aplica $\mathrm{t}_{f(x_0)}(B)$ em $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ e $\mathrm{t}^+_{f(x_0)}(B)$ em $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$. Uma vez que $f^{-1} \circ f = Id_A$ e que $f \circ f^{-1} = Id_B$, concluímos do teorema da derivação da função composta que $D(f^{-1})_{f(x_0)} \circ Df_{x_0} = D(f^{-1} \circ f)_{x_0}$ é a identidade de $T_{x_0}(A)$ e que $Df_{x_0} \circ D(f^{-1})_{f(x_0)} = D(f \circ f^{-1})_{f(x_0)}$ é a identidade de $T_{f(x_0)}(B)$, o que

[24]Estes últimos não existem certamente se E e F tiverem dimensões diferentes.

mostra que Df_{x_0} é um isomorfismo de $T_{x_0}(A)$ sobre $T_{f(x_0)}(B)$, tendo $D(f^{-1})_{f(x_0)}$ como isomorfismo inverso. Por fim, o facto de Df_{x_0} aplicar $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ *sobre* $\mathrm{t}_{f(x_0)}(B)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ *sobre* $\mathrm{t}^+_{f(x_0)}(B)$ vem de que, para cada $w' \in \mathrm{t}_{f(x_0)}(B)$ (respectivamente $w' \in \mathrm{t}^+_{f(x_0)}(B)$), tem-se $w' = Df_{x_0}(w)$, onde

$$w = D(f^{-1})_{f(x_0)}(w') \in \mathrm{t}_{x_0}(A)$$

(respectivamente $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$). □

II.2.15 É o resultado anterior que nos permite, em muitos casos, determinar explicitamente, sem recorrer à definição, os cones tangentes, os cones tangentes alargados e os espaços vectoriais tangentes. Bastará, para isso, arranjar um difeomorfismo de classe C^1 entre o conjunto em questão e um outro conjunto, relativamente ao qual aqueles conjuntos sejam conhecidos.
A título de exemplo, suponhamos que E e F são espaços vectoriais de dimensão finita, que $A \subset E$ e que $f\colon A \to F$ é uma aplicação de classe C^1. Consideremos o respectivo *gráfico*, que é o subconjunto B de $E \times F$,

$$B = \{(x, y) \in E \times F \mid x \in A \text{ e } y = f(x)\}.$$

Podemos então considerar um difeomorfismo de classe C^1 $g\colon A \to B$, definido por $g(x) = (x, f(x))$ (reparar que a bijecção inversa de g é mesmo de classe C^∞, por estar definida por $(x, y) \mapsto x$). Concluímos assim que, para cada $x_0 \in A$, a aplicação linear

$$Dg_{x_0}\colon T_{x_0}(A) \to T_{(x_0,f(x_0))}(B),$$

que está definida por $w \mapsto (w, Df_{x_0}(w))$, é um isomorfismo que aplica $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ sobre $\mathrm{t}_{(x_0,f(x_0))}(B)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ sobre $\mathrm{t}^+_{(x_0,f(x_0))}(B)$ (em particular, $T_{(x_0,f(x_0))}(B)$ é o gráfico da aplicação linear Df_{x_0}). Vemos portanto que, no caso em que $T_{x_0}(A)$, $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ são conhecidos (por exemplo, se A for um aberto de E), ficamos a conhecer $T_{(x_0,f(x_0))}(B)$, $\mathrm{t}_{(x_0,f(x_0))}(B)$ e $\mathrm{t}^+_{(x_0,f(x_0))}(B)$.

II.2.16 Para cada $1 \le j \le n$, seja E_j um espaço vectorial de dimensão finita e seja $x_{j0} \in A_j \subset E_j$. Considerando então o subconjunto $A_1 \times \cdots \times A_n$ do espaço vectorial de dimensão finita $E_1 \times \cdots \times E_n$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{t}_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) &\subset \mathrm{t}_{x_{10}}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{t}_{x_{n0}}(A_n),^{25} \\ \mathrm{t}^+_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) &\subset \mathrm{t}^+_{x_{10}}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{t}^+_{x_{n0}}(A_n), \\ T_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) &= T_{x_{10}}(A_1) \times \cdots \times T_{x_{n0}}(A_n)). \end{aligned}$$

Dem: Uma vez que cada projecção canónica $\pi_j\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to E_j$ é uma

[25] O exercício II.8, no fim do capítulo, mostra que nesta e na próxima inclusão a igualdade dos dois membros pode não ser verificada.

aplicação linear, logo de classe C^∞ e com $D\pi_{j(x_{10},\ldots,x_{n0})} = \pi_j$, a qual aplica $A_1 \times \cdots \times A_n$ em A_j, concluímos que π_j aplica

$$\begin{aligned}
&T_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) \text{ em } T_{x_{j0}}(A_j),\\
&\mathsf{t}_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) \text{ em } \mathsf{t}_{x_{j0}}(A_j),\\
&\mathsf{t}^+_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) \text{ em } \mathsf{t}^+_{x_{j0}}(A_j),
\end{aligned}$$

o que mostra que

$$\begin{aligned}
T_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) &\subset T_{x_{10}}(A_1) \times \cdots \times T_{x_{n0}}(A_n),\\
\mathsf{t}_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) &\subset \mathsf{t}_{x_{10}}(A_1) \times \cdots \times \mathsf{t}_{x_{n0}}(A_n),\\
\mathsf{t}^+_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n) &\subset \mathsf{t}^+_{x_{10}}(A_1) \times \cdots \times \mathsf{t}^+_{x_{n0}}(A_n).
\end{aligned}$$

Consideremos, por outro lado, para cada $1 \le j \le n$, a aplicação de classe C^∞ $f_j\colon A_j \to A_1 \times \cdots \times A_n$ definida por

$$f_j(x) = (x_{10}, \ldots, x_{j-1\,0}, x, x_{j+1\,0}, \ldots, x_{n0}),$$

para a qual se tem $Df_{j\,x_{j0}}(w) = (0, \ldots, 0, w, 0, \ldots, 0)$ (com w na posição j). Se, para cada $1 \le j \le n$, $w_j \in T_{x_{j0}}(A_j)$, podemos portanto concluir que $(0, \ldots, 0, w_j, 0, \ldots, 0) \in T_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n)$, pelo que, por este ser um subespaço vectorial, também

$$(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} (0, \ldots, 0, w_j, 0, \ldots, 0) \in T_{(x_{10},\ldots,x_{n0})}(A_1 \times \cdots \times A_n),$$

o que termina a demonstração. □

II.2.17 **(Nota)** Sejam E e F espaços vectoriais, $A \subset E$ um conjunto e $f\colon A \to F$ uma aplicação.

a) Suponhamos que $E' \subset E$ é um subespaço vectorial contendo A. Se repararmos na definição de aplicação de classe C^k, apresentada em II.2.1, vemos que não é *a priori* evidente que dizer que f é de classe C^k, quando se considera A como parte de E, seja equivalente a dizer que f é de classe C^k, quando se considera A como parte de E'. Com efeito, um prolongamento local de f num ponto está, no primeiro caso, definido num aberto de E e, no segundo caso, num aberto de E'.

No entanto, como vamos ver, as duas afirmações são de facto equivalentes e, no caso em que $k \ge 1$, a derivada $Df_{x_0}\colon T_{x_0}(A) \to F$ é a mesma dos dois pontos de vista. Para verificarmos isso, o mais fácil é talvez aplicar o teorema da derivação da função composta, reparando que a identidade de A é um difeomorfismo de classe C^∞ de A, como parte de E', sobre A, como parte de E, cuja derivada em cada $x_0 \in A$ é a identidade de $T_{x_0}(A)$; para confirmarmos que assim é, basta considerar, como prolongamentos da aplicação e da sua inversa, respectivamente, a inclusão $\iota\colon E' \to E$ e a projecção ortogonal $\pi\colon E \to E'$, relativamente a um produto interno de E.

b) Suponhamos, analogamente, que $F' \subset F$ é um subespaço vectorial tal que $f(A) \subset F'$. Mais uma vez, e embora isso não seja *a priori* evidente, vai ser equivalente dizer que f é de classe C^k, quando considerada com valores em F ou que o é, quando considerada com valores em F', o valor Df_{x_0}, no caso em que $k \geq 1$, sendo o mesmo dos dois pontos de vista. Para verificarmos isso, aplicamos mais uma vez o teorema da derivação da função composta, reparando que a identidade de F' é um difeomorfismo de classe C^∞ de F', considerado como parte de F', sobre F', considerado como parte de F, difeomorfismo cuja derivada em cada ponto é a identidade de F (mesma justificação que anteriormente).

§3. Partições da unidade.

O conteúdo desta secção é de carácter técnico e pode ser dispensado numa primeira leitura. Os resultados obtidos são, no entanto, de utilização frequente em Matemática e teremos ocasião de os aplicar mais adiante.

II.3.1 **(Lema)** Para cada inteiro $n \geq 0$, tem-se

$$\lim_{t \to +\infty} t^n e^{-t} = 0.$$

Dem: O resultado é trivial para $n = 0$. O caso geral resulta por indução em n, com o auxílio de regra de Cauchy para determinar o limite quando $t \to +\infty$ de $\frac{t^n}{e^t}$. □

II.3.2 **(Lema)** Existe uma aplicação de classe C^∞, $\varphi: \mathbb{R} \to [0, 1[$, definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{, se } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{, se } t > 0 \end{cases}.$$

Dem: Seja, mais geralmente, para cada inteiro $n \geq 0$, $\varphi_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{, se } t \leq 0 \\ \frac{1}{t^n}\, e^{-1/t} & \text{, se } t > 0 \end{cases},$$

aplicação que é contínua, pelo lema precedente. A aplicação φ do enunciado não é mais do que a aplicação φ_0. Para cada $t \neq 0$, a aplicação φ_n é derivável em t e com

$$\varphi_n'(t) = -n\, \varphi_{n+1}(t) + \varphi_{n+2}(t)$$

e, tendo em conta a continuidade de φ_n e do segundo membro da igualdade anterior, concluímos que a igualdade anterior é ainda válida para $t = 0$. É agora imediato concluir, por indução em k, que todas as funções φ_n são de classe C^k, para todo o k, e portanto de classe C^∞. $\square$

II.3.3 Suponhamos que A é um espaço topológico, que F é um espaço vectorial de dimensão finita e que, para cada $j \in J$, $f_j\colon A \to F$ é uma aplicação. Diz-se que a família de aplicações $(f_j)_{j\in J}$ é *localmente finita* se, para cada $x_0 \in A$, existe um aberto V de A, com $x_0 \in V$, e uma parte finita J' de J, tais que, para cada $x \in V$ e $j \in J \setminus J'$, se tenha $f_j(x) = 0$ (Por outras palavras, com um número finito de excepções possíveis, as aplicações f_j são identicamente nulas no aberto V).

No caso em que temos uma família localmente finita de aplicações $f_j\colon A \to F$, podemos definir a soma $\sum\limits_{j\in J} f_j$ como sendo a aplicação de A em F, que a cada $x \in A$ associa a soma $\sum\limits_{j\in J} f_j(x)$ (para cada x esta soma tem apenas um número finito de parcelas não nulas).

Se tivermos uma família localmente finita de aplicações contínuas $f_j\colon A \to F$, a sua soma $\sum\limits_{j\in J} f_j$ é ainda uma aplicação contínua de A em F. Com efeito, para vermos que uma aplicação definida em A é contínua, basta vermos que, para cada ponto $x_0 \in A$, existe um aberto V de A, com $x_0 \in V$, onde a restrição da aplicação é contínua, e, por definição, podemos escolher esse aberto de modo que a restrição seja uma soma finita de aplicações contínuas.

Com a mesma justificação, no caso em que A é uma parte arbitrária dum espaço vectorial E de dimensão finita e temos uma família localmente finita de aplicações de classe C^k, $f_j\colon A \to F$, a sua soma $\sum\limits_{j\in J} f_j$ é ainda uma aplicação de classe C^k de A em F.

II.3.4 **(Primeira versão do teorema da partição da unidade)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $(U_j)_{j\in J}$ uma família de conjuntos abertos de E e notemos U a união dos abertos U_j. Existe então uma família contável[26] de aplicações suaves, $f_\gamma\colon U \to [0,1]$, onde $\gamma \in \Gamma$, verificando as condições seguintes:

a) A família $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ é localmente finita;

b) Para cada $\gamma \in \Gamma$, existe um índice j e um conjunto compacto $C_\gamma \subset U_j$ tais que se tenha $f_\gamma(x) = 0$, para cada $x \in U \setminus C_\gamma$, por outras palavras, a aplicação f_γ *tem suporte compacto* contido em U_j.

c) Para cada $x \in U$, tem-se $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x) = 1$.[27]

Dem: Fixemos em E um produto interno e consideremos sobre E a norma

[26]Ao dizermos que a família é contável estamos a significar que o conjunto Γ dos índices é finito ou numerável.

[27]É esta igualdade que está na origem do nome partição da unidade.

associada, reparando que se pode então considerar uma aplicação suave $h: E \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.
Para cada natural $n \geq 1$, notemos

$$V_n = \{x \in E \mid \|x\| < n \wedge d(x, E \setminus U) > \frac{1}{n}\},$$
$$K_n = \{x \in E \mid \|x\| \leq n \wedge d(x, E \setminus U) \geq \frac{1}{n}\},$$

onde omitimos as segundas condições no caso particular em que $U = E$ (para evitar falar da distância de x ao conjunto vazio; alternativamente podemos considerar essa distância, por definição, igual a $+\infty$). Reparemos que os conjuntos K_n são fechados e limitados em E, portanto compactos, e estão contidos em U, que os conjuntos V_n são abertos em E, que se tem

$$V_n \subset K_n \subset V_{n+1} \subset K_{n+1}$$

e que a união dos compactos K_n é igual a U (se $x \in U$, podemos escolher n tal que $\|x\| \leq n$ e que, no caso em que $U \neq E$, $\frac{1}{n}$ seja menor ou igual à distância $d(x, E \setminus U) > 0$). Ponhamos, por comodidade, $V_{-1} = V_0 = \emptyset$ e $K_{-1} = K_0 = \emptyset$, o que é compatível com as inclusões atrás referidas.
Para cada $n \geq 1$ consideremos o compacto $K_n \setminus V_{n-1}$. Para cada $y \in K_n \setminus V_{n-1}$, tem-se $y \notin K_{n-2}$ pelo que, escolhendo j tal que $y \in U_j$, podemos fixar um raio $r_{n,y} > 0$ tal que a bola fechada $\overline{B}_{r_{n,y}}(y)$ esteja contida no aberto $U_j \setminus K_{n-2}$. Uma vez que as correspondentes bolas abertas $B_{r_{n,y}}(y)$ constituem uma cobertura aberta do compacto $K_n \setminus V_{n-1}$, podemos escolher uma parte finita I_n de $K_n \setminus V_{n-1}$ tal que a união dos $B_{r_{n,y}}(y)$, com $y \in I_n$, ainda contenha $K_n \setminus V_{n-1}$.
Para cada $n \geq 1$ e $y \in I_n$, seja $\widehat{f}_{n,y}: E \to [0, 1[$ a aplicação suave definida por

$$\widehat{f}_{n,y}(x) = \varphi(r_{n,y}^2 - \|x - y\|^2),$$

onde $\varphi: \mathbb{R} \to [0,1[$ é a aplicação suave do lema II.3.2, aplicação para a qual se tem assim

$$\widehat{f}_{n,y}(x) > 0 \Leftrightarrow x \in B_{r_{n,y}}(y),$$

em particular a aplicação $\widehat{f}_{n,y}$ é nula fora do compacto $\overline{B}_{r_{n,y}}(y)$ contido num dos U_j.
Vamos agora verificar que a família das restrições das aplicações $\widehat{f}_{n,y}$ a U é localmente finita (isto apesar de a família das aplicações $\widehat{f}_{n,y}$ não ter que ser localmente finita). Consideremos para isso $z \in U$ arbitrário. Existe n_0 tal que $z \in K_{n_0}$ e então V_{n_0+1} é um aberto de U, contendo z tal que, para cada $n \geq n_0 + 3$ e $y \in I_n$ (portanto salvo para um número finito de pares (n, y)), $\widehat{f}_{n,y}(x) = 0$ para todo o $x \in V_{n_0+1}$, visto que, se $\widehat{f}_{n,y}(x) > 0$, tinha-se

$$x \in B_{r_{n,y}}(y) \subset U_j \setminus K_{n-2} \subset U_j \setminus K_{n_0+1} \subset U_j \setminus V_{n_0+1}.$$

A família contável das aplicações suaves $\widehat{f}_{n,y/U}\colon U \to [0,1[$ verifica assim as condições a) e b) do enunciado. Quanto a c), tudo o que podemos dizer é que, para cada $x \in U$, tem-se $\sum \widehat{f}_{n,y}(x) > 0$, uma vez que, escolhendo o menor dos n tais que $x \in K_n$, tem-se $x \in K_n \setminus V_{n-1}$, e portanto $x \in B_{r_{n,y}}(y)$, para algum $y \in I_n$, o que implica $\widehat{f}_{n,y}(x) > 0$.
O facto de termos uma família localmente finita de funções suaves, permite-nos definir uma função suave $\widehat{f}\colon U \to]0,+\infty[$ por

$$\widehat{f}(x) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ y\in I_n}} \widehat{f}_{n,y}(x)$$

e, a partir dela, uma família contável de funções suaves $f_{n,y}\colon U \to [0,1]$, onde $n \geq 1$ e $y \in I_n$, definidas por

$$f_{n,y}(x) = \frac{\widehat{f}_{n,y}(x)}{\widehat{f}(x)},$$

as quais vão verificar as condições a), b) e c) do enunciado. □

II.3.5 **(Nota)** No caso em que o espaço vectorial E é um espaço vectorial complexo *não é verdade* que as aplicações suaves $f_{n,y}$, construídas na demonstração precedente, sejam holomorfas, mesmo que se tenha tido o cuidado de utilizar um produto interno complexo (hermítico) em E. A razão por que as coisas não funcionam está em que a função $h(x) = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ não é holomorfa, por o produto interno não ser uma aplicação bilinear complexa, uma vez que é antilinear, e não linear, na segunda variável. Aliás, para quem conheça os rudimentos da teoria das aplicações holomorfas, é óbvia a impossibilidade de existência de partições da unidade holomorfas, tendo em conta o facto de toda a aplicação holomorfa, de domínio conexo, que seja nula numa parte aberta não vazia do seu domínio, ter que ser identicamente nula.

II.3.6 Nas aplicações será muitas vezes mais útil a versão do teorema da partição da unidade, que enunciamos em seguida, em que se perde a garantia da existência de suporte compacto mas, em compensação, se consegue que a partição da unidade tenha o mesmo conjunto de índices que a família de abertos.

II.3.7 **(Segunda versão do teorema da partição da unidade)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $(U_j)_{j\in J}$ uma família de abertos de E, e notemos U a união dos conjuntos U_j. Existe então uma família $(g_j)_{j\in J}$ de funções suaves $g_j\colon U \to [0,1]$ tal que:
a) A família $(g_j)_{j\in J}$ é localmente finita.
b) Para cada $j \in J$, existe um subconjunto C_j de U_j, fechado *em* U, tal que

$g_j(x) = 0$, para cada $x \in U \setminus C_j$ (por outras palavras, g_j tem suporte contido em U_j).
c) Para cada $x \in U$, $\sum_{j \in J} g_j(x) = 1$.

Dem: Seja $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ uma família nas condições de II.3.4 e notemos agora $\widehat{C}_\gamma$ os correspondentes subconjuntos compactos de abertos U_j fora dos quais os f_γ se anulam. Para cada $\gamma \in \Gamma$, escolhamos um índice $j(\gamma) \in J$ tal que $\widehat{C}_\gamma \subset U_{j(\gamma)}$. Para cada $j \in J$, seja Γ_j o conjunto dos $\gamma \in \Gamma$ tais que $j = j(\gamma)$. Os conjuntos Γ_j são evidentemente disjuntos dois a dois e de união Γ (alguns deles podem ser vazios). Para cada $j \in J$, a família $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_j}$ é trivialmente também localmente finita pelo que podemos definir uma aplicação suave $g_j: U \to [0,1]$ por

$$g_j(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_j} f_\gamma(x).$$

Para cada $x \in U$, existe uma vizinhança V de x em U e um conjunto finito $\Gamma' \subset \Gamma$ de modo que, para cada $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$, a restrição de f_γ a V seja identicamente nula; se $J' \subset J$ é o conjunto finito formado pelos $j(\gamma)$, com $\gamma \in \Gamma'$, tem-se então que, para cada $j \in J \setminus J'$, a restrição de g_j a V é identicamente nula, o que mostra que a família das aplicações g_j é localmente finita. É trivial que, para cada $x \in U$, $\sum_{j \in J} g_j(x) = 1$. Resta-nos portanto demonstrar a propriedade b) do enunciado. Seja, para cada $j \in J$, W_j o conjunto dos $x \in U$ tais que $g_j(x) > 0$ e notemos C_j a aderência de W_j *em* U; tudo o que temos que verificar é que se tem $C_j \subset U_j$. Seja portanto $x \in C_j$ arbitrário. Sejam V uma vizinhança aberta de x em U e $\Gamma' \subset \Gamma$ uma parte finita, de modo que, para cada $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$, a restrição de f_γ a V seja nula. Seja V' uma vizinhança arbitrária de x em U. O facto de x pertencer à aderência de W_j implica a existência de $y \in V \cap V' \cap W_j$; tem-se então $g_j(y) > 0$ pelo que existe $\gamma \in \Gamma_j$ tal que $f_\gamma(y) > 0$, o que implica que $y \in \widehat{C}_\gamma$ e $\gamma \in \Gamma'$; isto mostra que x é aderente à união finita dos $\widehat{C}_\gamma$, com $\gamma \in \Gamma' \cap \Gamma_j$, união essa que é fechada, por ser uma união finita de compactos; concluímos assim que x pertence àquela união, pelo que $x \in U_j$, o que termina a demonstração. □

II.3.8 **(Notas)** Nas condições anteriores costuma dizer-se que a família $(g_j)_{j \in J}$ é uma *partição da unidade de U subordinada* à cobertura aberta $(U_j)_{j \in J}$ de U. Mais uma vez, e tal como já referimos atrás, não há esperança de se poder obter uma versão holomorfa do resultado precedente, no caso em que E é um espaço vectorial complexo.

É natural perguntarmo-nos se não seria possível melhorar o resultado anterior, de modo a exigir na condição b) que o conjunto C_j seja compacto ou, pelo menos, que seja fechado em E (e não somente em U). Para vermos que isso não é possível, basta repararmos que, no caso em que consideramos uma família constituída por um único aberto U, diferente de E e do conjunto vazio, a correspondente aplicação $g: U \to [0,1]$ não pode deixar de ser a função identicamente igual a 1, a qual só é nula fora de U (isto é, sobre o conjunto vazio…); o conjunto U é evidentemente fechado em U mas não o é em E e muito menos é compacto. No corolário que se segue veremos como é possível exigir que C_j seja fechado em E, à custa de obter uma conclusão mais fraca em c).

II.3.9 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ um conjunto fechado e $(U_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de E, tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

Existe então uma família $(g_j)_{j \in J}$, de funções suaves $g_j: E \to [0,1]$ tal que:

a) A família$(g_j)_{j \in J}$ é localmente finita.

b) Para cada $j \in J$, existe um subconjunto C_j de U_j, fechado *em* E, tal que $g_j(x) = 0$, para cada $x \in E \setminus C_j$.

c) Para cada $x \in A$, $\sum_{j \in J} g_j(x) = 1$ e, para cada $x \in E$, $\sum_{j \in J} g_j(x) \leq 1$.

Dem: Basta aplicar a segunda versão do teorema da partição da unidade à cobertura aberta de E formada pelos conjuntos abertos U_j e $E \setminus A$, ignorando em seguida a função correspondente a este último aberto. □

II.3.10 **(Prolongamentos globais de aplicações de classe C^k)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um conjunto arbitrário e $f: A \to F$ uma aplicação de classe C^k. Existe então um aberto U de E, com $A \subset U$, e um prolongamento de classe C^k $\overline{f}: U \to F$ de f.

Dem: Para cada $x \in A$, seja $\overline{f}_{(x)}: U_x \to F$ um prolongamento local de classe C^k de f no ponto x. Seja U a união dos abertos U_x de E, com $x \in A$, que é um aberto de E, contendo A. Pela segunda versão do teorema da partição da unidade, podemos considerar uma família localmente finita de funções suaves $g_{(x)}: U \to [0,1]$ tal que cada $g_{(x)}$ seja nula fora de um certo subconjunto C_x de U_x, fechado em U, e que, para cada $y \in U$, se tenha $\sum_{x \in A} g_{(x)}(y) = 1$. Para cada $x \in A$, podemos considerar uma aplicação $\widehat{f}_{(x)}: U \to F$, de classe C^k, definida por

$$\widehat{f}_{(x)}(y) = \begin{cases} 0 & , \text{se } y \notin U_x \\ g_{(x)}(y)\overline{f}_{(x)}(y) & , \text{se } y \in U_x \end{cases}.$$

O facto de esta aplicação ser efectivamente de classe C^k é uma consequência de termos uma noção local, visto que ela vai ter restrição de classe C^k a cada um dos dois abertos U_x e $U \setminus C_x$, de união U, a segunda por ser identicamente nula. Uma vez que a família das aplicações de classe C^k $\widehat{f}_{(x)}: U \to F$, com $x \in A$, é localmente finita, por a família das funções $g_{(x)}$ o ser, podemos considerar uma aplicação $\overline{f}: U \to F$, de classe C^k, definida por

$$\overline{f}(y) = \sum_{x \in A} \widehat{f}_{(x)}(y).$$

Se $y \in A$, tem-se $\widehat{f}_{(x)}(y) = g_{(x)}(y)f(y)$, quer y pertença ou não a U_x, no segundo caso porque ambos os membros são nulos e no primeiro caso porque, sendo $y \in U_x \cap A$, tem-se $\overline{f}_{(x)}(y) = f(y)$. Podemos assim concluir que, se $y \in A$, tem-se

$$\overline{f}(y) = \sum_{x \in A} \widehat{f}_{(x)}(y) = \sum_{x \in A} g_{(x)}(y)f(y) = \big(\sum_{x \in A} g_{(x)}(y)\big)f(y) = f(y),$$

o que mostra que $\overline{f}$ é efectivamente um prolongamento de f. □

II.3.11 **(Teorema da partição da unidade para conjuntos arbitrários)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ um conjunto arbitrário e $(A_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de A de união A. Existe então uma família localmente finita de funções suaves $g_j \colon A \to [0,1]$, onde $j \in J$, tal que cada g_j é nula fora de uma certa parte C_j de A_j, fechada em A, e que, para cada $x \in A$, $\sum_{j \in J} g_j(x) = 1$.

Como anteriormente, dizemos que a família das aplicações g_j é uma *partição da unidade* de A subordinada à cobertura aberta de A constituída pelos conjuntos A_j.

Dem: Para cada $j \in J$, seja U_j um aberto de E tal que $A_j = A \cap U_j$. Sendo U a união dos U_j, que é um aberto contendo A, podemos, por II.3.7, considerar uma família localmente finita de funções suaves $\widehat{g}_j \colon U \to [0,1]$ tal que cada $\widehat{g}_j$ seja nula fora de uma certa parte $\widehat{C}_j$ de U_j, fechada em U, e que, para cada $x \in U$, $\sum_{j \in J} \widehat{g}_j(x) = 1$. Basta-nos agora tomar para $g_j \colon A \to [0,1]$ as restrições das aplicações $\widehat{g}_j$ e para C_j as intersecções $\widehat{C}_j \cap A$. □

II.3.12 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto, B um conjunto fechado **em** A e $f \colon B \to F$ uma aplicação de classe C^k. Existe então uma aplicação de classe C^k, $\overline{f} \colon A \to F$, prolongando a aplicação f.

Dem: Tendo em conta II.3.10, vai existir um aberto U de E, com $B \subset U$, e um prolongamento $\widehat{f} \colon U \to F$, de classe C^k, de f. Vem que $U \cap A$ e $A \setminus B$ são dois abertos em A, de união A, pelo que a versão precedente do teorema da partição da unidade garante a existência de aplicações suaves $\varphi, \psi \colon A \to [0,1]$ tais que φ se anula fora de uma certa parte C de $U \cap A$, fechada em A, ψ se anula fora de uma certa parte C' de $A \setminus B$, fechada em A, e, para cada $x \in A$, $\varphi(x) + \psi(x) = 1$. Em particular, para cada $x \in B$, tem-se $\psi(x) = 0$, donde $\varphi(x) = 1$. Seja agora $\overline{f} \colon A \to F$ a aplicação de classe C^k definida por

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \notin U \\ \varphi(x)\widehat{f}(x) & \text{, se } x \in U \end{cases}.$$

O facto de $\overline{f}$ ser de classe C^k é uma consequência de termos uma noção local, visto que isso vai acontecer às suas restrições aos abertos $U \cap A$ e $A \setminus C$ de A, com união A (a segunda restrição é identicamente nula). Por fim, para cada $x \in B$, o facto de ser $\varphi(x) = 1$ implica que $\overline{f}(x) = \widehat{f}(x) = f(x)$, pelo que temos um prolongamento de f. □

II.3.13 **(Nota)** Sabemos, por definição, que uma aplicação de classe C^k, definida num conjunto não obrigatoriamente aberto, pode ser prolongada numa aplicação de classe C^k definida nalgum aberto contendo o seu domínio, mas, em geral, não temos nenhuma informação sobre o aberto que podemos escolher nessas condições. A vantagem do resultado precedente é a possibilidade de garantirmos a existência de um prolongamento de classe C^k a um conjunto dado *a priori*. Por exemplo, quando A é fechado em E, o resultado precedente garante que toda a aplicação de classe C^k de domínio A é restrição de uma aplicação de classe C^k cujo domínio é o espaço todo E.

Vamos agora referir mais um exemplo de aplicação dos teorema de partição da unidade, a possibilidade de aproximar aplicações contínuas por aplicações suaves.

II.3.14 **(Aproximação de aplicações contínuas por aplicações suaves)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais munido de uma norma, $A \subset E$ um conjunto e $f\colon A \to F$ uma aplicação contínua. Para cada aplicação contínua $\delta\colon A \to]0, +\infty[$, existe então um aberto U de E, com $A \subset U$, e uma aplicação suave $g\colon U \to F$ tal que, para cada $x \in A$,

$$\|g(x) - f(x)\| < \delta(x).$$ [28]

Além disso, se C é um subconjunto convexo de F tal que $f(A) \subset C$, pode-se exigir que se tenha também $g(U) \subset C$.[29]

Dem:[30] Para cada $y \in A$, consideremos o aberto A_y de A, com $y \in A_y$,

$$A_y = \{x \in A \mid \|f(x) - f(y)\| < \delta(x)\},$$

e seja U_y um aberto de E tal que $A_y = A \cap U_y$. Seja U o aberto de E, contendo A, união dos U_y, com $y \in A$. Pelo teorema da partição da unidade,

[28] Repare-se que podemos, em particular, tomar como função δ uma função de valor constante maior que 0, caso em que o resultado garante a existência de uma aproximação uniforme da aplicação contínua f por uma aplicação suave g.
[29] No caso em que A é fechado em E, pode-se tomar $U = E$ (cf. o exercício II.20, no fim do capítulo), desde que se afaste o caso trivial em que $C = \emptyset$ (e portanto $A = \emptyset$).
[30] Esta demonstração baseia-se na demonstração de um resultado análogo em [16].

na versão em II.3.7, podemos considerar uma família localmente finita de aplicações suaves $\varphi_y\colon U \to [0,1]$, onde $y \in A$, tais que cada φ_y é identicamente nula fora de U_y e que, para cada $x \in U$, $\sum\limits_y \varphi_y(x) = 1$. Seja $g\colon U \to F$ a aplicação suave definida por

$$g(x) = \sum_{y \in A} \varphi_y(x)\, f(y)$$

(soma duma família localmente finita de aplicações suaves) e reparemos, desde já, que, se $C \subset F$ é um subconjunto convexo de F contendo $f(A)$, tem-se ainda $g(x) \in C$, para cada $x \in U$ ($g(x)$ é uma combinação convexa de elementos de C). Para cada $x \in A$, podemos considerar o subconjunto finito I_x de A formado pelos y tais que $\varphi_y(x) > 0$ e podemos então escrever

$$\begin{aligned}\|g(x) - f(x)\| &= \Big\|\Big(\sum_{y \in A} \varphi_y(x)\, f(y)\Big) - \Big(\sum_{y \in A} \varphi_y(x)\, f(x)\Big)\Big\| = \\ &= \Big\|\sum_{y \in I_x} \varphi_y(x)\,(f(y) - f(x))\Big\| \le \\ &\le \sum_{y \in I_x} \varphi_y(x)\|f(y) - f(x)\| < \sum_{y \in I_x} \varphi_y(x)\,\delta(x) = \delta(x),\end{aligned}$$

visto que, para cada $y \in I_x$, o facto de ser $\varphi_y(x) > 0$ implica que $x \in A \cap U_y = A_y$, e portanto $\|f(x) - f(y)\| < \delta(x)$. □

No resultado precedente o papel do aberto U, contendo A, só é importante no caso em que quisermos tirar partido da afirmação suplementar de que a aproximação suave toma valores num conjunto convexo C que contenha a imagem da aplicação f; caso contrário, poderíamos ter afirmado apenas a existência de uma aplicação suave $A \to F$ a aproximar f e, se necessitássemos de uma aplicação suave definida num aberto contendo A, prolongávamos a aplicação suave de domínio A (cf. II.3.10).
O resultado que enunciamos em seguida diz-nos que, quando a aplicação contínua f que pretendemos aproximar já é suave num certo subconjunto fechado do domínio, podemos construir uma aproximação suave cuja restrição ao subconjunto referido seja a aplicação de partida. Uma vez que agora já não é possível garantir que a aproximação tome valores em qualquer convexo que contenha o contradomínio de f, é desnecessário referir qualquer aberto a conter o domínio de f. Para uma generalização desse resultado, em que a aplicação f toma valores numa certa subvariedade sem bordo de F e exigimos que o prolongamento tome valores nessa subvariedade, ver o exercício III.24, no fim do capítulo III.

II.3.15 **(Aproximação sem mudar o que já está bem)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais munido de uma norma, $A \subset E$ um conjunto e $f\colon A \to F$ uma aplicação contínua. Seja $B \subset A$, B fechado em A, tal que $f_{/B}\colon B \to F$ seja suave. Para cada aplicação contínua

$\delta: A \to]0, +\infty[$, existe então uma aplicação suave $h: A \to F$ tal que $h_{/B} = f_{/B}$ e que, para cada $x \in A$,

$$\|h(x) - f(x)\| < \delta(x).$$

Dem: Pelo resultado precedente, podemos considerar uma aplicação suave $g: A \to F$ tal que, para cada $x \in A$, $\|g(x) - f(x)\| < \delta(x)$ (restringir a A a aplicação de domínio U nesse resultado). Tendo em conta II.3.12, podemos considerar uma aplicação suave $\overline{f}: A \to F$ tal que $\overline{f}_{/B} = f_{/B}$. Seja U o aberto de A, com $B \subset U$,

$$U = \{x \in A \mid \|\overline{f}(x) - f(x)\| < \delta(x)\}.$$

Pelo teorema da partição da unidade II.3.11, aplicado aos abertos U e $A \setminus B$ de A, com união A, podemos considerar duas aplicações suaves $\varphi, \psi: A \to [0, 1]$ tais que φ seja nula fora de U, ψ seja nula em B e, para cada $x \in A$, $\varphi(x) + \psi(x) = 1$, em particular, para cada $x \in B$, $\varphi(x) = 1$. Seja agora $h: A \to F$ a aplicação suave definida por

$$h(x) = \varphi(x)\overline{f}(x) + \psi(x)g(x).$$

Para cada $x \in B$, tem-se $h(x) = \overline{f}(x) = f(x)$ e, reparando que, sempre que $\varphi(x) \neq 0$, tem-se $x \in U$, e portanto $\|\overline{f}(x) - f(x)\| < \delta(x)$, vemos que, para cada $x \in A$,

$$\begin{aligned}
\|h(x) - f(x)\| &= \|\varphi(x)\overline{f}(x) + \psi(x)g(x) - \varphi(x)f(x) - \psi(x)f(x)\| = \\
&= \|\varphi(x)(\overline{f}(x) - f(x)) + \psi(x)(g(x) - f(x))\| \leq \\
&\leq \varphi(x)\|\overline{f}(x) - f(x)\| + \psi(x)\|g(x) - f(x)\| < \\
&< \varphi(x)\delta(x) + \psi(x)\delta(x) = \delta(x),
\end{aligned}$$

como queríamos. □

§4. Variedades sem bordo.

II.4.1 No que se vai seguir, e no sentido de simplificar os enunciados, vamos muitas vezes limitar o estudo ao caso das aplicações de classe C^∞ e dos difeomorfismos de classe C^∞. O leitor que o desejar verificará muito facilmente como obter enunciados análogos, exigindo apenas que as aplicações sejam de classe C^k, para k suficientemente grande.

II.4.2 Sejam E e F espaços vectoriais reais de dimensão finita, $x_0 \in A \subset E$ e $y_0 \in B \subset F$. Diz-se que o par (A, x_0) é *localmente difeomorfo* ao par (B, y_0) se existe um aberto U de A, com $x_0 \in U$, um aberto V de B, com $y_0 \in V$, e um difeomorfismo $f: U \to V$, verificando $f(x_0) = y_0$. Diz-se então que f é um *difeomorfismo local* de (A, x_0) sobre (B, y_0).

Um caso particular é aquele em que se pode escolher $U = A$ e $V = B$; nesse caso também se diz que (A, x_0) e (B, y_0) são *difeomorfos* e que f é um *difeomorfismo* de (A, x_0) sobre (B, y_0).

II.4.3 A relação "…é localmente difeomorfo a…" é uma relação de equivalência.
Dem: A única parte não completamente trivial é a transitividade. Sejam portanto $x_0 \in A \subset E$, $y_0 \in B \subset F$ e $z_0 \in C \subset G$, tais que (A, x_0) seja localmente difeomorfo a (B, y_0) e (B, y_0) seja localmente difeomorfo a (C, z_0). Podemos então considerar um difeomorfismo local $f: U' \to V'$, de (A, x_0) sobre (B, y_0), e um difeomorfismo local $g: V'' \to W''$, de (B, y_0) sobre (C, z_0). Se os abertos V' e V'' de B coincidissem, tínhamos o problema resolvido, visto que, como é evidente, $g \circ f: U' \to W''$ seria um difeomorfismo local de (A, x_0) sobre (C, z_0). No caso geral, reparamos que, uma vez que f e g são, em particular, homeomorfismos, podemos concluir que $U = f^{-1}(V' \cap V'')$ e $W = g(V' \cap V'')$ são abertos em U' e W'', e portanto também em A e C, respectivamente, com $x_0 \in U$ e $z_0 \in W$, sendo então imediato que

$$g_{/V' \cap V''} \circ f_{/U}: U \to W$$

é um difeomorfismo local de (A, x_0) sobre (C, z_0). □

II.4.4 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $x_0 \in E$ e A e B dois subconjuntos de E, contendo x_0, e coincidindo na vizinhança de x_0. Tem-se então que (A, x_0) e (B, x_0) são localmente difeomorfos; mais precisamente, sendo V vizinhança de x_0 em E, com $A \cap V = B \cap V$, $U = \mathrm{int}(V)$ e $U' = A \cap U = B \cap U$, a aplicação identidade de U' é um difeomorfismo local entre aqueles dois pares.
Como caso particular do que acabamos de dizer, se $x_0 \in A \subset E$ e se A' é uma vizinhança de x_0 *em* A, então A e A' coincidem na vizinhança de x_0 (tem-se $A' = A \cap V$, para uma certa vizinhança V de x_0 em E) e portanto (A, x_0) e (A', x_0) são localmente difeomorfos.

II.4.5 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $x_0 \in A \subset E$, $y_0 \in B \subset F$ e $f: U \to V$ um difeomorfismo local de (A, x_0) sobre (B, y_0). Tem-se então que Df_{x_0} é um isomorfismo de $T_{x_0}(A)$ sobre $T_{y_0}(B)$, que aplica $\mathrm{t}_{x_0}(A)$ sobre $\mathrm{t}_{y_0}(B)$ e $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ sobre $\mathrm{t}^+_{y_0}(B)$.
Dem: É uma consequência imediata de II.2.14 e II.1.2. □

II.4.6 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $x_0 \in M \subset E$. Diz-se que o par (M, x_0) é uma *variedade sem bordo*[31] *com dimensão* n se existirem um espaço vectorial F, de dimensão n, e $y_0 \in F$ tais que (M, x_0) seja localmente difeomorfo a (F, y_0). Diz-se então também que o conjunto M é *no ponto* x_0 uma *variedade sem bordo com dimensão* n. A um

[31] Por vezes utiliza-se o termo *variedade* em vez de *variedade sem bordo*. A razão por que utilizamos este último é a de que encontraremos mais adiante uma noção mais geral, relativamente à qual empregaremos o termo *variedade*.

difeomorfismo local de (M, x_0) sobre (F, y_0) costuma-se dar o nome de *carta local* de M no ponto x_0.

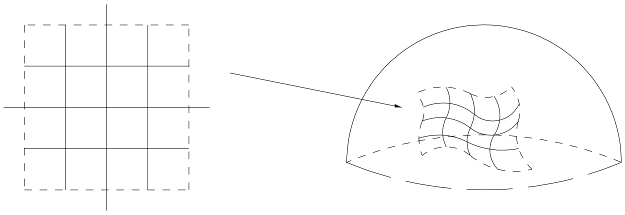

Figura 1

Dizemos que o conjunto M é uma *variedade sem bordo* se, para cada $x \in M$, (M, x) é uma variedade sem bordo (com uma dimensão que pode eventualmente variar de ponto para ponto[32]). No caso em que, para cada $x \in M$, o par (M, x) é uma variedade sem bordo, com a mesma dimensão n, dizemos também que M é uma *variedade sem bordo com dimensão* n.

II.4.7 Intuitivamente, uma variedade sem bordo com dimensão n é portanto um conjunto que, localmente, é parecido com um espaço vectorial de dimensão n. Uma variedade sem bordo com dimensão 1 é o que estamos habituados a chamar de *curva* e as variedades sem bordo com dimensão 2 correspondem à noção usual de *superfície*.
No nosso caso estamos a atribuir à noção intuitiva de *parecido* o significado *difeomorfo*. Se por *parecido* entendêssemos *homeomorfo*, obteríamos uma noção mais fraca, a de *variedade topológica*. Por exemplo, pode-se verificar que a união dos quatro lados dum quadrado é uma variedade topológica sem bordo, embora não seja uma variedade sem bordo, no sentido que utilizamos neste curso.

II.4.8 **(Exemplos) a)** Como primeiro exemplo, trivial, de variedade sem bordo com dimensão n, temos o de um aberto U de um espaço vectorial E de dimensão n: Para cada $x \in U$, (U, x) é, com efeito, localmente difeomorfo a (E, x) (cf. II.4.4).
b) Um segundo exemplo trivial de variedade é o das variedades de dimensão 0: Se $x_0 \in M \subset E$, o par (M, x_0) é uma variedade sem bordo com dimensão 0 se, e só se, x_0 é um ponto isolado de M, isto é, se, e só se, o conjunto unitário $\{x_0\}$ é aberto em M. Para o constatarmos, basta reparar que um espaço vectorial de dimensão 0 é constituído pelo único vector 0 e que uma bijecção entre conjuntos unitários é sempre um difeomorfismo, uma vez que as aplicações constantes são suaves.
c) Como primeiro exemplo não trivial de variedade sem bordo, podemos considerar o duma hipersuperfície esférica. Consideremos em $\mathbb{R}^n$, com

[32] Ver no entanto o que dizemos adiante em II.4.11.

$n \geq 1$, o produto interno canónico e a norma associada e seja $S \subset \mathbb{R}^n$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} =$$
$$= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Consideremos um elemento arbitrário $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in S$. O facto de se ter $x_{01}^2 + \cdots + x_{0n}^2 = 1$ implica que podemos fixar k tal que $x_{0k} \neq 0$. Suponhamos, para começar, que $x_{0k} > 0$. Podemos então considerar o aberto U de S formado pelos $(x_1, \ldots, x_n) \in S$ tais que $x_k > 0$ e o aberto V de $\mathbb{R}^{n-1}$ constituído pelos $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ tais que $t_1^2 + \cdots + t_{n-1}^2 < 1$ e vai ter lugar um difeomorfismo $f: V \to U$ definido por

$$f(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (t_1, \ldots, t_{k-1}, \sqrt{1 - t_1^2 - \cdots - t_{n-1}^2}, t_k, \ldots, t_{n-1}),$$

difeomorfismo cujo inverso é a aplicação $g: U \to V$, definida por

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Uma vez que f aplica o ponto $(x_{01}, \ldots, x_{0k-1}, x_{0k+1}, \ldots, x_{0n})$ em $(x_{01}, \ldots, x_{0k}, \ldots, x_{0n})$, concluímos que S é no ponto x_0 uma variedade sem bordo de dimensão $n-1$. A mesma conclusão se tira no caso em que $x_{0k} < 0$, tomando para U o aberto formado pelos $(x_1, \ldots, x_n) \in S$ tais que $x_k < 0$ e pondo o sinal $-$ atrás do sinal da raiz na definição do difeomorfismo f. Concluímos assim que S é uma variedade sem bordo, com dimensão $n-1$. É claro que, no caso em que $n = 1$, S é o conjunto discreto com dois elementos $\{-1, 1\}$, portanto uma variedade de dimensão 0.
O exemplo anterior será reexaminado adiante, em II.4.33, de forma mais simples e mais geral.

II.4.9 **(Notas) a)** Se F é um espaço vectorial real de dimensão n e se $y_0 \in F$, o par (F, y_0) é localmente difeomorfo ao par $(F, 0)$; para o verificarmos basta notar que a translação $\tau_{-y_0}: F \to F$, que a cada y associa $y - y_0$, é um difeomorfismo (com a translação τ_{y_0} como difeomorfismo inverso), que aplica y_0 em 0. Uma vez que a relação *localmente difeomorfo* é de equivalência, concluímos que, se um par (M, x_0) é uma variedade sem bordo com dimensão n, então ele é mesmo localmente difeomorfo a um par do tipo $(F, 0)$, com F espaço vectorial real de dimensão n.
b) Se F é um espaço vectorial real de dimensão n, então existe um isomorfismo $\lambda: \mathbb{R}^n \to F$. Basta, com efeito, fixar uma base $y_1, \ldots, y_n$ de F e definir λ por

$$\lambda(a_1, \ldots, a_n) = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n.$$

Uma vez que este isomorfismo é evidentemente também um difeomorfismo, que aplica 0 em 0, concluímos que $(F, 0)$ e $(\mathbb{R}^n, 0)$ são localmente difeomorfos pelo que, como anteriormente, vemos que, se (M, x_0) é uma variedade sem bordo com dimensão n, então (M, x_0) é mesmo localmente difeomorfo ao par $(\mathbb{R}^n, 0)$.

II.4.10 Se (M, x_0) é uma variedade sem bordo com dimensão n, então $\mathrm{t}_{x_0}(M) = \mathrm{t}^+_{x_0}(M) = T_{x_0}(M)$ é um espaço vectorial de dimensão n. Em particular, a dimensão de uma variedade sem bordo num dos seus pontos é um número bem definido.

II.4.11 Suponhamos que (M, x_0) é uma variedade sem bordo com dimensão n. Existe então um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, (M, x) é também uma variedade sem bordo com dimensão n. Em consequência, se M é uma variedade sem bordo conexa, então M tem a mesma dimensão em todos os pontos.

Dem: Sejam F um espaço vectorial real de dimensão n e $y_0 \in F$ tais que exista um difeomorfismo local $f: U \to V$ de (M, x_0) sobre (F, y_0). É então imediato que, para cada $x \in U$, f é também um difeomorfismo local de (M, x) sobre $(F, f(x))$, o que mostra que (M, x) é também uma variedade sem bordo com dimensão n. No caso em que M é uma variedade sem bordo conexa, o que acabamos de ver mostra que, para cada inteiro n, o conjunto M_n dos pontos de M onde a dimensão é n é um aberto de M pelo que, uma vez que M é a união destes abertos, que são disjuntos dois a dois, concluímos que não pode haver mais que um deles que seja não vazio, ou seja, a dimensão de M em todos os pontos é a mesma. □

II.4.12 Sejam $x_0 \in M \subset E$ e $y_0 \in \widehat{M} \subset \widehat{E}$, tais que (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ sejam variedades sem bordo, com dimensões m e n respectivamente. Tem-se então que o subconjunto $M \times \widehat{M}$ de $E \times \widehat{E}$ é, no ponto (x_0, y_0), uma variedade sem bordo com dimensão $m + n$.

Dem: Podemos considerar espaços vectoriais F e $\widehat{F}$, com dimensões m e n, respectivamente, e difeomorfismos locais $f: U \to V$, de (M, x_0) sobre $(F, 0)$, e $\widehat{f}: \widehat{U} \to \widehat{V}$, de $(\widehat{M}, y_0)$ sobre $(\widehat{F}, 0)$. $F \times \widehat{F}$ é então um espaço vectorial de dimensão $m + n$ e tem lugar um difeomorfismo local $f \times \widehat{f}: U \times \widehat{U} \to V \times \widehat{V}$, de $(M \times \widehat{M}, (x_0, y_0))$ sobre $(F \times \widehat{F}, (0, 0))$. □

II.4.13 Suponhamos, mais geralmente, que, para cada $1 \le j \le N$, $x_{j0} \in M_j \subset E_j$ são tais que (M_j, x_{j0}) é uma variedade sem bordo com dimensão n_j. Tem-se então que $(M_1 \times \cdots \times M_N, (x_{10}, \ldots, x_{N0}))$ é uma variedade sem bordo com dimensão $n_1 + \cdots + n_N$.

Dem: Trata-se de uma generalização imediata da demonstração precedente, em que apenas as notações são um pouco mais pesadas. □

II.4.14 Sejam $M \subset E$ uma variedade conexa, F um espaço vectorial de dimensão finita e $f: M \to F$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $x \in M$, $Df_x = 0 \in L(T_x(M); F)$. Tem-se então que f é uma aplicação constante.

Dem: Comecemos por mostrar que, se $x_0 \in M$, então existe um aberto U de M tal que a restrição de f a U seja constante. Consideremos então um aberto

V de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in V$, um aberto U de M, com $x_0 \in U$, e um difeomorfismo $\varphi: V \to U$, com $\varphi(0) = x_0$. Se necessário substituindo V por um aberto mais pequeno, por exemplo uma bola aberta de centro 0, podemos já supor que V é conexo. Pelo teorema de derivação da função composta, a aplicação de classe C^1 $f \circ \varphi: V \to F$ tem derivada nula em todos os pontos, pelo que, tendo em conta I.5.19, $f \circ \varphi$ é constante, o que implica que a restrição de f a $U = \varphi(V)$ também é constante. A partir de agora a demonstração é puramente topológica: O que acabamos de mostrar implica que, para cada $b \in F$, o conjunto $\{x \in M \mid f(x) = b\}$ é aberto em M; uma vez que este conjunto é evidentemente também fechado, o facto de a variedade M ser conexa implica que este conjunto ou é igual a $\emptyset$ ou igual a M e daqui podemos concluir que a aplicação f não pode tomar mais que um valor. □

Os resultados precedentes podem ser considerados como a parte trivial da teoria das variedades sem bordo. Os resultados que se vão seguir vão ser mais interessantes e de demonstração menos trivial e têm em comum o facto de utilizarem de modo essencial o teorema da função inversa, estudado no capítulo I.

II.4.15 Sejam E um espaço vectorial real de dimensão n e $x_0 \in M \subset E$. Tem-se então que (M, x_0) é uma variedade sem bordo de dimensão n se, e só se, $x_0 \in \text{int}(M)$. Em particular, um conjunto $M \subset E$ é uma variedade sem bordo com dimensão igual à de E se, e só se, M for um aberto de E.

Dem: Se $x_0 \in \text{int}(M)$, vimos em II.4.4 que (M, x_0) é localmente difeomorfo a (E, x_0), pelo que é uma variedade sem bordo com dimensão n. Suponhamos, reciprocamente, que M é uma variedade sem bordo, com dimensão n, no ponto x_0. Podemos então considerar um espaço vectorial real F, de dimensão n, e um difeomorfismo local $f: U \to V$ de $(F, 0)$ sobre (M, x_0). Tem-se então que $Df_0: F \to T_{x_0}(M)$ é um isomorfismo, o que implica que $T_{x_0}(M)$ é um subespaço vectorial de dimensão n do espaço vectorial E de dimensão n, portanto $T_{x_0}(M) = E$. Concluímos assim que Df_0 é um isomorfismo de F sobre E, pelo que, aplicando o teorema da função inversa, podemos garantir a existência de um aberto U' de F, com $0 \in U' \subset U$, tal que a restrição de f seja um difeomorfismo de U' sobre um aberto V' de E. Uma vez que $x_0 = f(0) \in V'$ e que $V' \subset V \subset M$, deduzimos finalmente que x_0 é um ponto interior a M. □

II.4.16 **(Teorema da função inversa para variedades)** Sejam $x_0 \in M \subset E$ e $y_0 \in \widehat{M} \subset \widehat{E}$ tais que (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ sejam variedades sem bordo e seja $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave, tal que $f(x_0) = y_0$ e que $Df_{x_0}: T_{x_0}(M) \to T_{y_0}(\widehat{M})$ seja um isomorfismo. Existe então um aberto U de M, com $x_0 \in U$, e um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, tais que a restrição de f seja um difeomorfismo de U sobre $\widehat{U}$. Em particular, para cada $x \in U$, $Df_x: T_x(M) \to T_{f(x)}(\widehat{M})$ também é um isomorfismo.

Dem: Sejam F e $\widehat{F}$ espaços vectoriais de dimensão finita, $\psi: \widehat{V}' \to \widehat{U}'$ um difeomorfismo local de $(\widehat{F}, 0)$ sobre $(\widehat{M}, y_0)$ e $\varphi: V' \to U'$ um difeomorfismo local de $(F, 0)$ sobre (M, x_0). Tendo em conta a continuidade de f, vemos que, se necessário substituindo φ por uma restrição, podemos já supor que se tem $f(U') \subset \widehat{U}'$. Podemos então considerar a composta

$$\psi^{-1} \circ f_{/U'} \circ \varphi: V' \to \widehat{V}',$$

que é uma aplicação suave para a qual

$$D(\psi^{-1} \circ f_{/U'} \circ \varphi)_0 = (D\psi_0)^{-1} \circ Df_{x_0} \circ D\varphi_0: F \to \widehat{F}$$

é um isomorfismo. Estamos portanto em condições de aplicar a versão do teorema da função inversa no quadro dos abertos para concluir a existência de um aberto V de F, com $0 \in V \subset V'$, tal que a restrição de $\psi^{-1} \circ f_{/U'} \circ \varphi$ seja um difeomorfismo de V sobre um aberto $\widehat{V}$ de $\widehat{F}$, o qual verifica evidentemente $0 \in \widehat{V} \subset \widehat{V}'$. Podemos agora considerar o aberto $U = \varphi(V)$ de M, que contém x_0, e o aberto $\widehat{U} = \psi(\widehat{V})$ de $\widehat{M}$, que contém y_0, tendo-se então que a restrição de f vai ser um difeomorfismo de U sobre $\widehat{U}$, por ser a composta do difeomorfismo de V sobre $\widehat{V}$, restrição de $\psi^{-1} \circ f_{/U'} \circ \varphi$, com os difeomorfismos $\widehat{V} \to \widehat{U}$ e $U \to V$, restrições de ψ e de φ^{-1}, respectivamente. A última afirmação do enunciado resulta de que a derivada de um difeomorfismo é um isomorfismo. □

A demonstração que acabamos de apresentar pode parecer, à primeira vista, um pouco confusa, mas a ideia que está por detrás dela é muito simples: Para estudarmos, no quadro das variedades, uma propriedade de tipo local que é já conhecida no quadro dos abertos de espaços vectoriais de dimensão finita, usamos cartas, que olhamos intuitivamente como fotografias, e aplicamos o resultado já conhecido, ao nível das fotografias, usando de novo as cartas para obter o resultado pretendido, ao nível das variedades. No nosso caso, os difeomorfismos locais φ e ψ permitem olhar intuitivamente para os abertos V', de F, e $\widehat{V}'$, de $\widehat{F}$, como fotografias dos abertos U', de M, e $\widehat{U}'$, de $\widehat{M}$; deste ponto de vista, a aplicação $\psi^{-1} \circ f_{/U'} \circ \varphi$ pode ser olhada como uma fotografia da aplicação $f_{/U'}$, ou, se quisermos, como uma fotografia local da aplicação f.

Teremos ocasião de encontrar mais adiante outros exemplos de generalizações deste tipo e omitiremos as respectivas demonstrações quando forem do tipo da que acabamos de apresentar. Espera-se naturalmente que o leitor procure fazer sozinho essas demonstrações, pelo menos até se sentir convencido de que elas são completamente evidentes.

Vamos estudar agora duas generalizações do teorema da função inversa, em que, em vez de exigirmos que a derivada da aplicação seja um isomorfismo, exigimos, num caso, que ela seja uma aplicação linear injectiva e, no outro caso, uma aplicação linear sobrejectiva. Em ambos os casos começamos por examinar as versões ao nível dos abertos de espaços vectoriais de dimensão finita e enunciamos em seguida as generalizações às variedades sem bordo, que são consequências simples daquelas versões. Estes dois teoremas vão ter consequências importantes para a teoria das variedades.

II.4.17 **(Teorema da derivada injectiva)** Sejam F e $\widehat{F}$ espaços vectoriais reais (respectivamente complexos), com dimensões m e n, $V' \subset F$ um aberto e $f: V' \to \widehat{F}$ uma aplicação suave (respectivamente holomorfa). Seja $x_0 \in V'$ tal que $Df_{x_0}: F \to \widehat{F}$ seja uma aplicação linear injectiva. Existe então um espaço vectorial real (respectivamente complexo) G, de dimensão $n - m$, um aberto V de F, com $x_0 \in V \subset V'$, um aberto W de G, com $0 \in W$, um aberto $\widehat{V}$ de $\widehat{F}$, com $f(x_0) \in \widehat{V}$, e um difeomorfismo (respectivamente difeomorfismo holomorfo) $g: V \times W \to \widehat{V}$ tal que, para cada $x \in V$, se tenha $f(x) = g(x, 0)$, em particular, $f(V) \subset \widehat{V}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{x \mapsto (x,0)} & V \times W \\ Id \downarrow & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow[f_{/V}]{} & \widehat{V} \end{array}$$

Dem: O facto de Df_{x_0} ser uma aplicação linear injectiva implica que $Df_{x_0}(F)$ é um subespaço vectorial de dimensão m de $\widehat{F}$ pelo que podemos considerar um subespaço vectorial G de $\widehat{F}$, com dimensão $n - m$, tal que tenha lugar a soma directa $\widehat{F} = Df_{x_0}(F) \oplus G$ (por exemplo, o ortogonal de $Df_{x_0}(F)$, relativamente a um produto interno que se considere em $\widehat{F}$). Seja $g': V' \times G \to \widehat{F}$ a aplicação suave definida por

$$g'(x, z) = f(x) + z.$$

Tem-se $g'(x_0, 0) = f(x_0)$ e a aplicação linear $Dg'_{(x_0,0)}: F \times G \to \widehat{F}$ está definida por

$$Dg'_{(x_0,0)}(u, w) = Df_{x_0}(u) + w.$$

O facto de ter lugar a soma directa atrás referida e de a aplicação linear Df_{x_0} ser injectiva implica trivialmente que a aplicação linear $Dg'_{(x_0,0)}$ é também injectiva pelo que, uma vez que $F \times G$ e $\widehat{F}$ têm a mesma dimensão n, esta última aplicação linear vai ser um isomorfismo. Estamos assim em condições de aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de um aberto de $F \times G$, contendo $(x_0, 0)$ e contido em $V' \times G$, que podemos já supor ser da forma $V \times W$, com $x_0 \in V$ aberto de E e $0 \in W$ aberto de G, tais que a restrição g de g' a $V \times W$ seja um difeomorfismo de $V \times W$ sobre um aberto $\widehat{V}$ de $\widehat{F}$, sendo imediato, pela definição de g', que se tem $g(x, 0) = f(x)$. $\square$

As conclusões do resultado precedente podem ser enunciadas de modo equivalente dizendo-se que f aplica V em $\widehat{V}$ e que a composta de $f_{/V}: V \to \widehat{V}$ com o difeomorfismo $g^{-1}: \widehat{V} \to V \times W$ é a aplicação de V em $V \times W$ definida por $x \mapsto (x, 0)$.
De maneira menos precisa, mas mais incisiva: Toda a aplicação suave de derivada injectiva é, localmente e a menos de difeomorfismo, uma aplicação do tipo $x \mapsto (x, 0)$.

II.4.18 Em geral, se E e $\widehat{E}$ são espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ são subconjuntos arbitrários e $f: M \to \widehat{M}$ é uma aplicação, diremos que f é uma *imersão no ponto* x_0 se f for suave e a aplicação linear $Df_{x_0}: T_{x_0}(M) \to T_{f(x_0)}(\widehat{M})$ for injectiva e que f é uma *imersão* se for uma imersão em todos os pontos de M.
Repare-se que, nesta definição, o papel de $\widehat{M}$ é ilusório: Uma aplicação $f: M \to \widehat{M}$ é uma imersão em $x_0 \in M$ se, e só se, o for enquanto aplicação $M \to \widehat{E}$.

II.4.19 **(Teorema da imersão em variedades sem bordo)** Sejam (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ duas variedades sem bordo, com dimensões m e n respectivamente, e seja $f: M \to \widehat{M}$ uma imersão em x_0 tal que $f(x_0) = y_0$. Existe então:
a) Um aberto U de M, com $x_0 \in U$, e um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, tais que $f(U) \subset \widehat{U}$;
b) Espaços vectoriais F e G, com dimensões m e $n - m$, respectivamente, e abertos V de F, com $0 \in V$, e W de G, com $0 \in W$;
c) Difeomorfismos $\varphi: V \to U$, com $\varphi(0) = x_0$, e $\psi: V \times W \to \widehat{U}$, com $\psi(0, 0) = y_0$;
De modo que a composta $\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi: V \to V \times W$ esteja definida por $x' \mapsto (x', 0)$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{x' \mapsto (x', 0)} & V \times W \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U & \xrightarrow[f_{/U}]{} & \widehat{U} \end{array}$$

Dem: Usando difeomorfismos locais, reduzimos facilmente este resultado à versão já estabelecida do teorema da derivada injectiva. □

II.4.20 **(Teorema da derivada sobrejectiva)** Sejam F e $\widehat{F}$ espaços vectoriais reais (respectivamente complexos) de dimensões m e n, $V' \subset F$ um aberto, $f: V' \to \widehat{F}$ uma aplicação suave (respectivamente holomorfa) e $x_0 \in V'$ tal que a aplicação linear $Df_{x_0}: F \to \widehat{F}$ seja sobrejectiva. Existe então um espaço vectorial real (respectivamente complexo) G, de dimensão $m - n$, um aberto V de F, com $x_0 \in V \subset V'$, um aberto $\widehat{V}$ de $\widehat{F}$, com $f(x_0) \in \widehat{V}$, um aberto W de G, com $0 \in W$, e um difeomorfismo (respectivamente difeomorfismo holomorfo) $g: \widehat{V} \times W \to V$, verificando as condições $g(f(x_0), 0) = x_0$ e, para cada $(y, z) \in \widehat{V} \times W$, $f(g(y, z)) = y$, em particular, $f(V) = \widehat{V}$.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{V} \times W & \xrightarrow{(y,z)\mapsto y} & \widehat{V} \\ g \downarrow & & \downarrow Id \\ V & \xrightarrow[f_{/V}]{} & \widehat{V} \end{array}$$

Dem: Seja $G \subset F$ o subespaço vectorial núcleo de Df_{x_0}:

$$G = \ker(Df_{x_0}) = \{u \in F \mid Df_{x_0}(u) = 0\}.$$

O facto de a aplicação linear Df_{x_0} ser sobrejectiva implica que a dimensão de G é $m - n$. Consideremos uma aplicação linear $\pi: F \to G$, tal que $\pi(u) = u$, para cada $u \in G$ (por exemplo, a projecção ortogonal sobre G, relativamente a um produto interno que se fixe em F). Seja agora $\widehat{f}: V' \to \widehat{F} \times G$ a aplicação suave definida por

$$\widehat{f}(x) = (f(x), \pi(x - x_0)).$$

Tem-se $\widehat{f}(x_0) = (f(x_0), 0)$ e a aplicação linear $D\widehat{f}_{x_0}: F \to \widehat{F} \times G$ está definida por

$$D\widehat{f}_{x_0}(u) = (Df_{x_0}(u), \pi(u)).$$

Se fosse $D\widehat{f}_{x_0}(u) = 0$, olhando para a primeira componente da fórmula anterior, concluíamos que $Df_{x_0}(u) = 0$, ou seja, $u \in G$, e portanto, olhando para a segunda componente, $u = \pi(u) = 0$. Verificámos portanto que a aplicação linear $D\widehat{f}_{x_0}: F \to \widehat{F} \times G$ é injectiva, pelo que o facto de F e $\widehat{F} \times G$ terem a mesma dimensão m implica que é mesmo um isomorfismo. Estamos portanto em condições de aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de um aberto V de F, com $x_0 \in V \subset V'$, tal que a restrição de $\widehat{f}$ a V seja um difeomorfismo de V sobre um aberto de $\widehat{F} \times G$, que, se necessário substituindo V por um aberto mais pequeno, pode-se já supor ser da forma $\widehat{V} \times W$, com $\widehat{V}$ aberto de $\widehat{F}$, contendo $f(x_0)$, e W aberto de G, contendo 0. Seja $g: \widehat{V} \times W \to V$ o difeomorfismo inverso desta restrição de $\widehat{f}$. É claro que $g(f(x_0), 0) = x_0$. Por fim, dado $(y, z) \in \widehat{V} \times W$, tem-se evidentemente $\widehat{f}(g(y, z)) = (y, z)$ pelo que, tendo em conta a definição de $\widehat{f}$, $y = f(g(y, z))$. □

Como anteriormente, podemos dizer, de modo menos preciso, mas mais incisivo, que toda a aplicação suave com derivada sobrejectiva é, localmente e a menos de difeomorfismo, uma aplicação do tipo $(y, z) \mapsto y$.

II.4.21 Em geral, se E e $\widehat{E}$ são espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ são subconjuntos arbitrários e $f: M \to \widehat{M}$ é uma aplicação, diremos que f é uma *submersão no ponto* $x_0 \in M$ se f for suave e a aplicação linear $Df_{x_0}: T_{x_0}(M) \to T_{f(x_0)}(\widehat{M})$ for sobrejectiva e que f é uma *submersão* se for uma submersão em todos os pontos de M.

Repare-se que, ao contrário do que acontecia com as imersões, o papel de $\widehat{M}$ nesta definição já é essencial.

II.4.22 **(Teorema da submersão em variedades sem bordo)** Sejam (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ variedades sem bordo, com dimensões m e n, respectivamente, e $f: M \to \widehat{M}$ uma submersão no ponto x_0 tal que $f(x_0) = y_0$. Existe então:

a) Um aberto U de M, com $x_0 \in U$, e um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, tais que $f(U) = \widehat{U}$;

b) Espaços vectoriais de dimensões n e $m - n$, respectivamente, $\widehat{F}$ e G e abertos $\widehat{V}$ de $\widehat{F}$, com $0 \in \widehat{V}$, e W de G, com $0 \in W$;

c) Difeomorfismos $\varphi: \widehat{V} \times W \to U$, com $\varphi(0,0) = x_0$, e $\psi: \widehat{V} \to \widehat{U}$, com $\psi(0) = y_0$;

De modo que a composta $\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi: \widehat{V} \times W \to \widehat{V}$ esteja definida por $(y', z) \mapsto y'$.

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{V} \times W & \xrightarrow{(y',z)\mapsto y'} & \widehat{V} \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
U & \xrightarrow[f_{/U}]{} & \widehat{U}
\end{array}$$

Além disso, nas condições anteriores, f é ainda uma submersão em cada ponto $x \in U$.

Dem: Usando difeomorfismos locais, reduzimos facilmente este resultado, sem a última afirmação, à versão já estabelecida do teorema da derivada sobrejectiva. A última afirmação resulta de que, para cada $(y', z) \in \widehat{V} \times W$ e $(v', w) \in \widehat{F} \times G$, sai, por derivação da igualdade $\psi(y') = f(\varphi(y', z))$,

$$D\psi_{y'}(v') = Df_{\varphi(y',z)}(D\varphi_{(y',z)}(v', w)),$$

pelo que o facto de $D\psi_{y'}$ ser um isomorfismo implica trivialmente que a aplicação linear $Df_{\varphi(y',z)}$ é sobrejectiva. □

Vamos estudar agora alguns resultados importantes que são consequência do teorema da imersão.

II.4.23 Sejam (M, x_0) uma variedade sem bordo, B uma parte arbitrária dum espaço vectorial $\widehat{E}$ de dimensão finita e $f: M \to B$ uma imersão no ponto x_0. Existe então um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que a restrição $f_{/U}$ seja um difeomorfismo de U sobre $f(U)$ (ao contrário do que se passa no teorema da função inversa, não afirmamos que $f(U)$ seja aberto em $\widehat{M}$). Em particular, para cada $x \in U$, f é ainda uma imersão no ponto x.

Dem: Comecemos por reparar que o papel de B é ilusório, visto que se pode também olhar para f como aplicação suave de M no espaço ambiente $\widehat{E}$ de B, o que não altera em nada o facto de Df_{x_0} ser uma aplicação linear injectiva (agora de $T_{x_0}(M)$ em $\widehat{E}$). Sendo $y_0 = f(x_0)$, podemos aplicar o teorema da imersão para variedades sem bordo (cf. II.4.19) e garantir a existência de abertos U de M, com $x_0 \in U$, e $\widehat{U}$ de $\widehat{E}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, de espaços vectoriais de dimensão finita F e G, de abertos V de F, com $0 \in V$, e W de G, com $0 \in W$, e de difeomorfismos $\varphi: V \to U$ e $\psi: V \times W \to \widehat{U}$, com $\varphi(0) = x_0$ e $\psi(0,0) = y_0$, de modo que se tenha $f(U) \subset \widehat{U}$ e que a composta

$$\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi: V \to V \times W$$

esteja definida por $x' \mapsto (x', 0)$. Esta composta é um difeomorfismo de V sobre a sua imagem, igual a $V \times \{0\}$, a aplicação inversa sendo a restrição da projecção $(x', z) \mapsto x'$. Concluímos agora que

$$f(U) = f(\varphi(V)) = \psi(\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi(V)) = \psi(V \times \{0\}),$$

pelo que a aplicação $f_{/U}: U \to f(U)$ vai ser a composta dos difeomorfismos $\varphi^{-1}: U \to V$, $\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi: V \to V \times \{0\}$ e $\psi_{/V \times \{0\}}: V \times \{0\} \to f(U)$, sendo portanto um difeomorfismo de U sobre $f(U)$. Em particular, para cada $x \in U$, Df_x é um isomorfismo de $T_x(M)$ sobre $T_{f(x)}(f(U))$, e portanto uma aplicação linear injectiva. □

II.4.24 O resultado precedente poderia levar-nos a acreditar que uma imersão fosse obrigatoriamente um difeomorfismo sobre a sua imagem. Tal não é o caso, como decorre das duas observações seguintes:

a) Uma imersão, embora seja sempre localmente injectiva, pode não ser uma aplicação injectiva. Para nos convencermos disso, basta pensar, por exemplo, na aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, que é uma imersão periódica, com período 2π.

b) Uma imersão, mesmo que seja injectiva, pode não ser um difeomorfismo sobre a sua imagem. Um exemplo clássico desta situação é o da aplicação do intervalo $]0, 2\pi[$ para $\mathbb{R}^2$, que a t associa $(\sin(t), \sin(2t))$, que é uma imersão suave e injectiva, cuja imagem é a figura oito (este exemplo será examinado com mais cuidado na alínea d) de VI.5.13). Esta imersão injectiva não é um difeomorfismo sobre a sua imagem, nem sequer um homeomorfismo, como se reconhece, por exemplo, se repararmos que a imagem é compacta, sem que o domínio o seja. Veremos adiante, em II.4.26, que uma imersão injectiva que seja um homeomorfismo é automaticamente também um difeomorfismo.

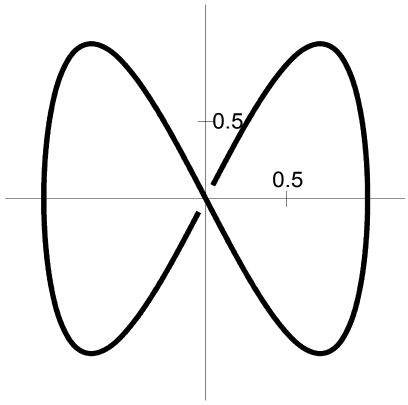

Figura 2

II.4.25 Sejam $M \subset E$ variedade sem bordo e $f\colon M \to \widehat{E}$ uma imersão. Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita, $C \subset G$ um subconjunto arbitrário e $g\colon C \to M$ uma aplicação *contínua*, tal que a composta $f \circ g\colon C \to \widehat{E}$ seja de classe C^p. Tem-se então que a aplicação $g\colon C \to M$ é de classe C^p.
Dem: Seja $z_0 \in C$ arbitrário. Por II.4.23, podemos considerar um aberto U de M, com $g(z_0) \in U$, tal que a restrição $f_{/U}$ seja um difeomorfismo de U sobre $f(U)$. Pela continuidade de g, podemos considerar um aberto W de C, com $z_0 \in W$, tal que $g(W) \subset U$. Tem-se então que a restrição de g a W é de classe C^p, por ser a composta da restrição da aplicação de classe C^p $f \circ g$ a W, com o difeomorfismo de $f(U)$ sobre U, inverso da restrição de f a U. O facto de a noção de aplicação C^p ser local implica finalmente que $g\colon C \to M$ é uma aplicação de classe C^p. □

II.4.26 **(Corolário)** Sejam $M \subset E$ variedade sem bordo e $f\colon M \to \widehat{E}$ uma imersão que seja um homeomorfismo de M sobre $f(M)$. Tem-se então que f é um difeomorfismo de M sobre $f(M)$, em particular, $f(M)$ é também uma variedade sem bordo.
Dem: Tendo em conta o resultado precedente, a aplicação contínua de $f(M)$ sobre M, inversa de f, é também suave, por isso acontecer à sua composta com f, igual à inclusão de $f(M)$ em $\widehat{E}$. □

II.4.27 **(Fotografia duma subvariedade)** Seja $(\widehat{M}, x_0)$ uma variedade sem bordo, com dimensão n, e seja $M \subset \widehat{M}$ tal que $x_0 \in M$ e que (M, x_0) seja uma variedade sem bordo, com dimensão m. Existem então espaços vectoriais F e G, com dimensões m e $n - m$, respectivamente, conjuntos abertos $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $x_0 \in \widehat{U}$, V de F, com $0 \in V$, e W de G, com $0 \in W$, e um difeomorfismo $\psi\colon V \times W \to \widehat{U}$, tal que $\psi(0,0) = x_0$ e que

$$\psi^{-1}(\widehat{U} \cap M) = \{(y,z) \in V \times W \mid z = 0\}.$$

Dem: Aplicando o teorema da imersão em variedades sem bordo à inclusão $\iota: M \to \widehat{M}$, podemos considerar espaços vectoriais F e G, com dimensões m e $n-m$, abertos $\widehat{U}'$ de $\widehat{M}$ e U' de M, com $x_0 \in U' \subset \widehat{U}'$, abertos V' de F, com $0 \in V'$, e W' de G, com $0 \in W'$, e difeomorfismos $\varphi: V' \to U'$ e $\psi': V' \times W' \to \widehat{U}'$, tais que $\varphi(0) = x_0$, $\psi'(0,0) = x_0$, e $\psi'^{-1} \circ \varphi: V' \to V' \times W'$ esteja definida por $y \mapsto (y,0)$. A ideia é mostrar agora que ψ' verifica *quase* a propriedade do enunciado (as plicas são por causa do *quase*) e verificar em seguida que com uma restrição conveniente de ψ' temos o problema resolvido. Em primeiro lugar, se $(y,z) \in V' \times W'$ é tal que $z = 0$, vem $\psi'(y,z) = \psi'(\psi'^{-1} \circ \varphi(y)) = \varphi(y) \in U' \subset M$ pelo que tudo o que seria necessário mostrar era que, se $(y,z) \in V' \times W'$ é tal que $\psi'(y,z) \in M$, então $z = 0$. Isto, infelizmente, pode ser falso, pelo que vamos tentar reduzir os abertos de modo a *deitar fora os pontos pirata* (cf. figura 3).

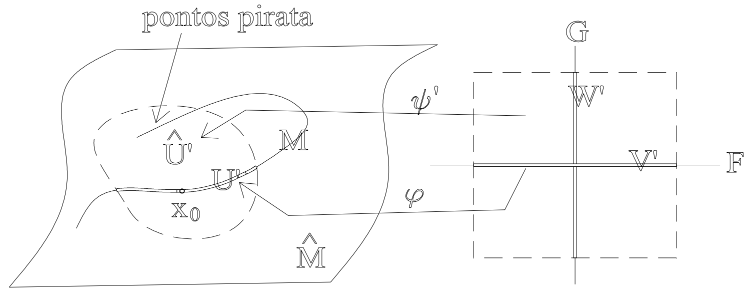

Figura 3

O facto de U' ser aberto em M implica a existência de um aberto $\tilde{U}$ de $\widehat{M}$, tal que $U' = M \cap \tilde{U}$. A continuidade de ψ' no ponto $(0,0)$ implica a existência de abertos V de F, com $0 \in V \subset V'$, e W de G, com $0 \in W \subset W'$, tais que $\psi'(V \times W) \subset \tilde{U}$. Seja $\widehat{U} = \psi'(V \times W)$, que é um aberto de $\widehat{M}$ contendo x_0 e contido em $\tilde{U} \cap \widehat{U}'$ e seja $\psi: V \times W \to \widehat{U}$ o difeomorfismo restrição de ψ'. É claro que, por ψ ser restrição de ψ', se $(y,z) \in V \times W$ é tal que $z = 0$, então $\psi(y,z) \in M$. Reciprocamente, se $(y,z) \in V \times W$ é tal que $\psi(y,z) \in M$, vem $\psi(y,z) \in M \cap \tilde{U} = U'$, donde a existência de $y' \in V'$ tal que $\psi(y,z) = \varphi(y')$; podemos então escrever

$$\psi'(y,z) = \psi(y,z) = \varphi(y') = \psi'(y',0),$$

pelo que a injectividade de ψ' implica que $(y,z) = (y',0)$, em particular $z = 0$, o que termina a demonstração. □

Intuitivamente, e por definição, uma variedade sem bordo é uma coisa torta que admite localmente fotografias direitas (abertos de espaços

vectoriais). O ponto fundamental na proposição anterior é que, quando temos uma variedade sem bordo contida noutra, podemos tomar uma fotografia direita da variedade grande de modo que a parte da variedade pequena que está nessa fotografia é ainda direita. A fotografia não serve só para estudar a variedade pequena; ela descreve também o modo como esta está metida na variedade maior.
Passamos agora a estabelecer algumas consequências importantes do teorema da submersão.

II.4.28 Sejam (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ duas variedades sem bordo e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave, tal que $f(x_0) = y_0$. São então equivalentes as duas propriedades seguintes:
a) A aplicação f é uma submersão em x_0;
b) Existe um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, e uma aplicação suave $g\colon \widehat{U} \to M$, tal que $g(y_0) = x_0$ e que, para cada $y \in \widehat{U}$, $f(g(y)) = y$.[33]
Além disso, quando estas propriedades se verificarem, para cada vizinhança A de x_0 em M, $f(A)$ é uma vizinhança de y_0 em $\widehat{M}$.
Dem: Supondo verificada a condição b), obtemos por derivação de ambos os membros da identidade $f(g(y)) = y$,

$$Df_{x_0} \circ Dg_{y_0} = Id_{T_{y_0}(\widehat{M})},$$

o que implica trivialmente que a aplicação linear Df_{x_0} é sobrejectiva. Suponhamos, reciprocamente, que Df_{x_0} é uma aplicação linear sobrejectiva. Pelo teorema da submersão para variedades sem bordo, vão existir abertos U de M, com $x_0 \in U$ e $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, espaços vectoriais de dimensão finita $\widehat{F}$ e G, abertos $\widehat{V}$ de $\widehat{F}$, com $0 \in \widehat{V}$, e W de G, com $0 \in W$, e difeomorfismos $\varphi\colon \widehat{V} \times W \to U$ e $\psi\colon \widehat{V} \to \widehat{U}$, verificando as condições $\varphi(0,0) = x_0$ e $\psi(0) = y_0$, de modo que $f(U) = \widehat{U}$ e que a composição $\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi\colon \widehat{V} \times W \to \widehat{V}$ esteja definida por $(y', z) \mapsto y'$. Podemos então considerar a aplicação suave $g\colon \widehat{U} \to M$, definida por

$$g(y) = \varphi(\psi^{-1}(y), 0),$$

a qual verifica $g(y_0) = x_0$ e

$$f(g(y)) = \psi(\psi^{-1}(f(\varphi(\psi^{-1}(y), 0)))) = \psi(\psi^{-1}(y)) = y.$$

Para provarmos a última afirmação do enunciado basta vermos que $f(M)$ é uma vizinhança de y_0 em $\widehat{M}$, visto que, se A for uma vizinhança de x_0 em M, podemos aplicar a referida conclusão à restrição de f a A, que ainda verifica evidentemente a propriedade a) do enunciado. Ora o facto de $f(M)$

[33]Costuma-se traduzir esta última condição dizendo que g é uma *secção suave* de f sobre o aberto $\widehat{U}$.

ser uma vizinhança de y_0 em $\widehat{M}$ é uma consequência de y_0 pertencer ao aberto $\widehat{U} = f(U)$, que está contido em $f(M)$. □

II.4.29 A última afirmação do resultado precedente pode ser reenunciada dizendo que f é uma aplicação aberta no ponto x_0.
Em geral, diz-se que uma aplicação $f: M \to \widehat{M}$, entre dois espaços topológicos, é *aberta no ponto* $x_0 \in M$ se, para cada vizinhança A de x_0, $f(A)$ é uma vizinhança de $f(x_0)$, ou, o que é equivalente, se, para cada aberto U de M, com $x_0 \in U$, $f(U)$ é uma vizinhança de $f(x_0)$. Em particular, as *aplicações abertas* $f: M \to \widehat{M}$, isto é, as aplicações f com a propriedade de $f(U)$ ser aberto em $\widehat{M}$, para cada aberto U de M, são precisamente as aplicações que são abertas em todos os pontos de M.

II.4.30 **(Corolário)** Se M e $\widehat{M}$ são variedades sem bordo e se $f: M \to \widehat{M}$ é uma submersão, então f é uma aplicação aberta.

II.4.31 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ variedades sem bordo e $f: M \to \widehat{M}$ uma submersão sobrejectiva. Se H é um espaço vectorial de dimensão finita, $C \subset H$ um subconjunto e $h: \widehat{M} \to C$ é uma aplicação tal que a composta $h \circ f: M \to C$ seja de classe C^p, então $h: \widehat{M} \to C$ é de classe C^p.
Dem: Seja $y_0 \in \widehat{M}$ arbitrário. O facto de f ser sobrejectiva implica a existência de $x_0 \in M$, tal que $f(x_0) = y_0$. Deduzimos então, de II.4.28, a existência de um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, e de uma aplicação suave $g: \widehat{U} \to M$, tal que $g(y_0) = x_0$ e que, para cada $y \in \widehat{U}$, $f(g(y)) = y$. Concluímos daqui que a restrição de h a $\widehat{U}$ é C^p, por ser a composta das aplicações C^p $h \circ f: M \to C$ e $g: \widehat{U} \to M$. O facto de a noção de aplicação de classe C^p ser local garante finalmente que $h: \widehat{M} \to C$ é de classe C^p. □

II.4.32 **(Construção de variedades como imagens recíprocas)** Sejam (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ variedades sem bordo, com dimensões m e n, respectivamente, e $f: M \to \widehat{M}$ uma submersão no ponto x_0 tal que $f(x_0) = y_0$. Seja $y_0 \in \widehat{M}' \subset \widehat{M}$, tal que $(\widehat{M}', y_0)$ seja uma variedade sem bordo, com dimensão n'. Sendo então

$$M' = f^{-1}(\widehat{M}') = \{x \in M \mid f(x) \in \widehat{M}'\},$$

tem-se que (M', x_0) é uma variedade sem bordo, com dimensão $m - (n - n')$ e $T_{x_0}(M')$ é o conjunto dos $u \in T_{x_0}(M)$ tais que $Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')$.
Dem: Tendo em conta o teorema da submersão em variedades sem bordo, podemos considerar abertos U de M, com $x_0 \in U$, e $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, espaços vectoriais de dimensões n e $m - n$, $\widehat{F}$ e G, abertos $\widehat{V}$ de $\widehat{F}$, com $0 \in \widehat{V}$, e W de G, com $0 \in W$, e difeomorfismos $\varphi: \widehat{V} \times W \to U$ e $\psi: \widehat{V} \to \widehat{U}$, verificando $\varphi(0,0) = x_0$ e $\psi(0) = y_0$, de modo que $f(U) = \widehat{U}$ e que a aplicação composta $\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi: \widehat{V} \times W \to \widehat{V}$ esteja definida por

$(y', z) \mapsto y'$.

$$\begin{tikzcd} \widehat{V} \times W \arrow[r, "(y',z)\mapsto y'"] \arrow[d, "\varphi"'] & \widehat{V} \arrow[d, "\psi"] \\ U \arrow[r, "f_{/U}"'] & \widehat{U} \end{tikzcd}$$

Para cada $x \in U$, vem $x = \varphi(y', z)$, com $(y', z) \in \widehat{V} \times W$, tendo-se, por definição, $x \in M'$ se, e só se, $f(x) \in \widehat{M}'$, ou, por outras palavras se, e só se,

$$y' = \psi^{-1}(f(\varphi(y', z))) \in \psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U}).$$

O facto de ψ ser um difeomorfismo e de $\widehat{M}' \cap \widehat{U}$ ser um aberto de $\widehat{M}'$, contendo y_0, implica que $\psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U})$ é no ponto 0 uma variedade sem bordo com dimensão n'. O que vimos atrás mostra-nos que

$$\varphi^{-1}(M' \cap U) = \psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U}) \times W,$$

pelo que $\varphi^{-1}(M' \cap U)$ é no ponto $(0, 0)$ uma variedade sem bordo com dimensão $n' + (m - n)$. O facto de φ ser um difeomorfismo implica agora que $M' \cap U$, e portanto também M', é no ponto x_0 uma variedade sem bordo com dimensão $n' + (m - n) = m - (n - n')$. Provemos por fim a afirmação relativa aos vectores tangentes. O facto de se ter $M' \subset M$ implica trivialmente que $T_{x_0}(M') \subset T_{x_0}(M)$. Dado $u \in T_{x_0}(M)$, o facto de $D\varphi_{(0,0)}$ ser um isomorfismo de $\widehat{F} \times G$ sobre $T_{x_0}(M)$, que aplica o espaço vectorial $T_{(0,0)}(\psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U}) \times W)$ sobre $T_{x_0}(M')$, implica que se pode escrever $u = D\varphi_{(0,0)}(v, w)$, com $(v, w) \in \widehat{F} \times G$, e que se tem então $u \in T_{x_0}(M')$ se, e só se

$$(v, w) \in T_{(0,0)}(\psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U}) \times W) = T_0(\psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U})) \times G,$$

isto é, se, e só se, $v \in T_0(\psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U}))$, o que é ainda equivalente, tendo em conta o facto de ψ ser um difeomorfismo, à condição de se ter $D\psi_0(v) \in T_{y_0}(\widehat{M}')$. Mas, o facto de $\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi$ ser a aplicação definida por $(y', z) \mapsto y'$ implica que

$$\begin{aligned} v &= D(\psi^{-1} \circ f_{/U} \circ \varphi)_{(0,0)}(v, w) = \\ &= (D\psi_0)^{-1}(Df_{x_0}(D\varphi_{(0,0)}(v, w))) = \\ &= (D\psi_0)^{-1}(Df_{x_0}(u)) \end{aligned}$$

pelo que o que dissemos atrás mostra que se tem $u \in T_{x_0}(M')$ se, e só se, $Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')$. □

Veremos adiante que, no quadro da proposição precedente, a hipótese de f ser uma submersão em x_0 pode, em certos casos, ser substituída por uma hipótese mais fraca (a condição de transversalidade).
Uma maneira mais simples de nos lembrarmos da fórmula para a dimensão da imagem recíproca é utilizar o conceito de codimensão. Chama-se *codimensão* de uma subvariedade a diferença entre a dimensão da variedade ambiente e a da variedade em questão. Vemos portanto que, nas condições da proposição anterior, a codimensão de M' na variedade M é igual à codimensão de $\widehat{M}'$ na variedade $\widehat{M}$.
Reparemos também que, no quadro da proposição precedente, é simples recordar a caracterização dos vectores tangentes a M' em x_0: O facto de se ter $M' \subset M$ implica trivialmente que todo o vector tangente a M' em x_0 é também tangente a M em x_0 e o facto de a restrição de f aplicar M' em $\widehat{M}'$ implica que Df_{x_0} aplica $T_{x_0}(M')$ em $T_{y_0}(\widehat{M}')$. Tudo o que temos que lembrar é que o teorema afirma que estas condições necessárias para um vector pertencer a $T_{x_0}(M)$ são também suficientes.
Como exemplo de aplicação do resultado precedente, apresentamos a seguir uma prova simples de que as hipersuperfícies esféricas são variedades, assim como uma caracterização dos respectivos espaços vectoriais tangentes.

II.4.33 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$, $x_0 \in E$ e $r > 0$ e consideremos a hipersuperfície esférica $S_r(x_0) \subset E$, de centro x_0 e raio r,

$$S_r(x_0) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| = r\}.$$

Tem-se então que $S_r(x_0)$ é uma variedade sem bordo com dimensão $n-1$ e, para cada $x \in S_r(x_0)$,

$$T_x(S_r(x_0)) = \{u \in E \mid \langle x - x_0, u\rangle = 0\}.$$[34]

Dem: Seja $f\colon E \to \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por $f(x) = \langle x - x_0, x - x_0\rangle$, para a qual se tem $Df_x(u) = 2\langle x - x_0, u\rangle$. Vemos portanto que, para cada $x \neq x_0$, $Df_x\colon E \to \mathbb{R}$ é uma aplicação linear sobrejectiva ($Df_x(x - x_0) = \|x - x_0\|^2 \neq 0$ e uma aplicação linear com valores em $\mathbb{R}$, que não seja identicamente nula é sobrejectiva), em particular, isso acontece para cada $x \in S_r(x_0)$. Uma vez que E e $\mathbb{R}$, sendo espaços vectoriais, são trivialmente variedades sem bordo com dimensões n e 1, respectivamente, e que o conjunto unitário $\{r^2\}$ é evidentemente uma variedade de dimensão 0, o resultado precedente garante-nos que $S_r(x_0)$ é em todos os pontos uma variedade sem bordo com dimensão $n-1$ e que, para cada $x \in S_r(x_0)$, $T_x(S_r(x_0))$ é o conjunto dos vectores $u \in E$ tais que $\langle x - x_0, u\rangle = 0$. □

II.4.34 Um caso particular de II.4.32, que se encontra frequentemente na prática é aquele em que $\widehat{M} = \mathbb{R}^n$, $y_0 = (b_1, \ldots, b_n)$ e $\widehat{M}'$ é o conjunto unitário $\{y_0\}$,

[34]Os vectores tangentes são portanto, neste caso, aqueles que são perpendiculares ao raio.

portanto uma variedade sem bordo com dimensão 0. Nesse caso, a aplicação suave $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ vai ter n componentes, que são as aplicações suaves $f_1, \ldots, f_n\colon M \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

e o conjunto M' vai ser o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que se tenha $f_1(x) = b_1,\ f_2(x) = b_2, \ldots, f_n(x) = b_n$, ou seja, vai ser o conjunto das soluções de um *sistema de equações*. Concluímos portanto que, se (M, x_0) é uma variedade sem bordo com dimensão m, o conjunto das soluções de um sistema de n equações (verificadas pelo elemento x_0) vai ser em x_0 uma variedade sem bordo com dimensão $m - n$,[35] isto se se verificar a hipótese fundamental de a derivada Df_{x_0} ser uma aplicação linear sobrejectiva de $T_{x_0}(M)$ sobre $\mathbb{R}^n$.[36]
Esta hipótese fundamental pode ser enunciada, de modo equivalente, em termos das derivadas em x_0 das aplicações componentes $f_j\colon M \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, com a exigência de que as aplicações lineares

$$Df_1(x_0), Df_2(x_0), \ldots, Df_n(x_0)\colon T_{x_0}(M) \to \mathbb{R}$$

sejam elementos linearmente independentes de $L(T_{x_0}(M); \mathbb{R})$, o que traduz, ao menos intuitivamente, a ideia que as diferentes equações devem ser independentes *junto de* x_0. O facto de estes dois enunciados da hipótese fundamental serem realmente equivalentes é uma consequência imediata do lema de Álgebra Linear que enunciamos em seguida.

II.4.35 **(Lema de Álgebra Linear)** Sejam E um espaço vectorial real de dimensão m, $\lambda\colon E \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n\colon E \to \mathbb{R}$ as aplicações lineares componentes, definidas por

$$\lambda(u) = (\lambda_1(u), \ldots, , \lambda_n(u)).$$

Tem-se então que λ é uma aplicação linear sobrejectiva se, e só se, as aplicações lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ forem elementos linearmente independentes de $L(E; \mathbb{R})$.
Dem: Consideremos em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual. As aplicações lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são linearmente dependentes se, e só se, existirem números reais $a_1, \ldots, a_n$, não todos nulos, tais que, para cada $u \in E$,

$$a_1\lambda_1(u) + \cdots + a_n\lambda_n(u) = 0,$$

isto é, tal que $(a_1, \ldots, a_n)$ seja um vector de $\mathbb{R}^n$ ortogonal ao subespaço vectorial $\lambda(E)$ de $\mathbb{R}^n$. Por outras palavras, aquelas aplicações lineares são linearmente dependentes se, e só se, o complementar ortogonal do subespaço

[35] Portanto a codimensão é igual ao número de equações.
[36] É evidente que teria que haver alguma hipótese restritiva, sem o que nada nos impedia de escrever duas vezes a mesma equação, o que não alterava em nada o conjunto das soluções.

vectorial $\lambda(E)$ de $\mathbb{R}^n$ for não nulo, o que é equivalente a dizer que $\lambda(E) \neq \mathbb{R}^n$. $\square$

Vamos agora estabelecer uma generalização do resultado sobre a construção de variedades como imagens recíprocas, onde a hipótese de a derivada de f em x_0 ser sobrejectiva é substituída por uma hipótese em geral mais fraca. Começamos para isso por estabelecer um lema.

II.4.36 **(Lema)** Seja $(\widehat{M}, y_0)$ uma variedade sem bordo com dimensão n e seja $y_0 \in \widehat{M}' \subset \widehat{M}$ tal que $(\widehat{M}', y_0)$ seja uma variedade sem bordo com dimensão n'. Existe então um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, e $g\colon \widehat{U} \to \mathbb{R}^{n-n'}$, submersão no ponto x_0 tal que $g(y_0) = 0$, de modo que se tenha

$$\widehat{M}' \cap \widehat{U} = \{y \in \widehat{U} \mid g(y) = 0\}.$$

Por outras palavras, toda a subvariedade pode ser definida localmente por um sistema de equações, verificando a hipótese de independência referida em II.4.34.

Dem: Este lema vai ser uma consequência do resultado sobre fotografia duma subvariedade referido em II.4.27. Esse resultado permite-nos considerar espaços vectoriais F e G, com dimensões n' e $n - n'$, conjuntos abertos $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, V de F, com $0 \in V$, e W de G, com $0 \in W$, e um difeomorfismo $\psi\colon V \times W \to \widehat{U}$ tal que $\psi(0,0) = y_0$ e que $\psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U})$ seja o conjunto dos $(y', z) \in V \times W$ tais que $z = 0$. Podemos então considerar a aplicação suave $\widehat{g}\colon \widehat{U} \to G$, composta do difeomorfismo $\psi^{-1}\colon \widehat{U} \to V \times W$ com a segunda projecção $\pi_2\colon V \times W \to W \subset G$. Tem-se $\widehat{g}(y_0) = 0$, a aplicação linear $D\widehat{g}_{y_0}$ é sobrejectiva, como composta da aplicação linear sobrejectiva $\pi_2\colon F \times G \to G$ com o isomorfismo

$$D(\psi^{-1})_{y_0}\colon T_{y_0}(\widehat{M}) \to F \times G,$$

e $\widehat{M}' \cap \widehat{U}$ vai ser o conjunto dos $y \in \widehat{U}$ tais que $\widehat{g}(y) = 0$. Por fim, para substituir G por $\mathbb{R}^{n-n'}$, basta tomar para g a composta de $\widehat{g}$ com um isomorfismo $\mu\colon G \to \mathbb{R}^{n-n'}$. $\square$

II.4.37 **(Versão mais geral do resultado sobre construção de variedades como imagens recíprocas)** Sejam (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ variedades sem bordo, com dimensões m e n, respectivamente e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave tal que $f(x_0) = y_0$. Seja $y_0 \in \widehat{M}' \subset \widehat{M}$ tal que $(\widehat{M}', y_0)$ seja uma variedade sem bordo, com dimensão n' e suponhamos verificada a seguinte *condição de transversalidade*:

$$Df_{x_0}(T_{x_0}(M)) + T_{y_0}(\widehat{M}') = T_{y_0}(\widehat{M})$$

(trata-se da simples soma de subespaços vectoriais, não obrigatoriamente uma soma directa).[37] Sendo então

$$M' = f^{-1}(\widehat{M}') = \{x \in M \mid f(x) \in \widehat{M}'\},$$

tem-se que (M', x_0) é uma variedade sem bordo, com dimensão $m - (n - n')$ e

$$T_{x_0}(M') = \{u \in T_{x_0}(M) \mid Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')\}.$$

Dem: Pelo lema anterior, podemos considerar um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, e uma aplicação suave $g\colon \widehat{U} \to \mathbb{R}^{n-n'}$, tal que $g(y_0) = 0$ e que $Dg_{y_0}\colon T_{y_0}(\widehat{M}) \to \mathbb{R}^{n-n'}$ seja sobrejectiva, de modo que, para cada $y \in \widehat{U}$, se tenha $y \in \widehat{M}'$ se, e só se, $g(y) = 0$, resultando então de II.4.32 que

$$T_{y_0}(\widehat{M}') = \{v \in T_{y_0}(\widehat{M}) \mid Dg_{y_0}(v) = 0\}.$$

Pela continuidade de f, podemos considerar um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que $f(U) \subset \widehat{U}$. Seja $\widehat{f} = g \circ f_{/U}$, que é uma aplicação suave de U em $\mathbb{R}^{n-n'}$, verificando $\widehat{f}(x_0) = 0$, e reparemos que, para cada $x \in U$, tem-se $x \in M'$ se, e só se, $\widehat{f}(x) = 0$, por outras palavras,

$$M' \cap U = \widehat{f}^{-1}(\{0\}) = \{x \in U \mid \widehat{f}(x) = 0\}.$$

Vamos agora verificar que a condição de transversalidade implica que a aplicação linear $D\widehat{f}_{x_0}\colon T_{x_0}(M) \to \mathbb{R}^{n-n'}$ é sobrejectiva. Ora, dado $w \in \mathbb{R}^{n-n'}$ arbitrário, podemos escolher $v' \in T_{y_0}(\widehat{M})$ tal que $Dg_{y_0}(v') = w$ e a condição de transversalidade implica a existência de $u \in T_{x_0}(M)$ e de $v'' \in T_{y_0}(\widehat{M}')$ tais que $v' = Df_{x_0}(u) + v''$; tem-se então $Dg_{y_0}(v'') = 0$, pelo que

$$w = Dg_{y_0}(v') = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(u) + Dg_{y_0}(v'') = D\widehat{f}_{x_0}(u).$$

Podemos agora aplicar II.4.32 para garantir que $M' \cap U$, e portanto M', é, no ponto x_0, uma variedade sem bordo, com dimensão $m - (n - n')$, e que $T_{x_0}(M')$ é o conjunto dos $u \in T_{x_0}(M)$ tais que

$$Dg_{y_0}(Df_{x_0}(u)) = D\widehat{f}_{x_0}(u) = 0,$$

isto é, tais que se tenha $Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')$. □

II.4.38 **(Corolário)** Sejam $(\widehat{M}, y_0)$ uma variedade sem bordo, com dimensão n e M e M' dois subconjuntos de $\widehat{M}$, contendo y_0, e tais que (M, y_0) e (M', y_0) sejam variedades sem bordo, com dimensões m e m', respectivamente.

[37] É claro que esta condição se encontra automaticamente verificada no caso em que a aplicação linear $Df_{x_0}\colon T_{x_0}(M) \to T_{y_0}(\widehat{M})$ é sobrejectiva, as duas condições sendo equivalentes no caso em que $\widehat{M}'$ é o conjunto unitário $\{y_0\}$.

Supondo verificada a *condição de transversalidade*

$$T_{y_0}(M) + T_{y_0}(M') = T_{y_0}(\widehat{M}),$$

tem-se então que a intersecção $M \cap M'$ é, no ponto y_0, uma variedade sem bordo, com dimensão $m + m' - n$, e

$$T_{y_0}(M \cap M') = T_{y_0}(M) \cap T_{y_0}(M').$$

Dem: Basta aplicarmos o resultado precedente à inclusão $\iota: M' \to \widehat{M}$, reparando que $M \cap M'$ é a imagem recíproca de M por meio desta inclusão. □

Examinamos agora outro resultado que se revela frequentemente útil para provar que certos conjuntos são variedades sem bordo

II.4.39 **(Segundo teorema da submersão)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $x_0 \in M \subset E$, tal que (M, x_0) seja uma variedade sem bordo, $y_0 \in A \subset F$ e $f: M \to A$ uma submersão no ponto x_0 tal que $f(x_0) = y_0$. Tem-se então que (A, y_0) é uma variedade sem bordo.
Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:
a) Fixemos produtos internos em E e F e seja $G = T_{y_0}(A)^\perp$. Vamos provar nesta alínea a existência de um aberto U de M, com $x_0 \in U$, e de um aberto V de G, com $0 \in V$, tais que, para cada $(x, z) \in U \times V$ se tenha

$$f(x) + z \in A \Leftrightarrow z = 0.$$

Suponhamos, com efeito, que isso não acontecia. Considerando para U e V bolas abertas de M e G com centros x_0 e 0 e raio $\frac{1}{n}$, concluíamos a existência de sucessões de elementos $x_n \in M$, com $x_n \to x_0$, e $z_n \in G$, com $z_n \to 0$, tais que $z_n \neq 0$ e $f(x_n) + z_n \in A$. Uma vez que o conjunto dos vectores de G com norma 1 é fechado e limitado, e portanto compacto, podíamos já supor, se necessário tomando subsucessões, que existia $z \in G$, com $\|z\| = 1$, tal que $\frac{z_n}{\|z_n\|} \to z$. Podíamos então considerar as sucessões de elementos $f(x_n) + z_n$ e $f(x_n)$ de A, ambas convergentes para $f(x_0) = y_0$, e de reais estritamente positivos $\frac{1}{\|z_n\|}$, para as quais se tinha

$$\frac{1}{\|z_n\|}((f(x_n) + z_n) - f(x_n)) \to z,$$

o que implicava que $z \in \mathrm{t}^+_{y_0}(A) \subset T_{y_0}(A)$, uma contradição, tendo em conta o facto de se ter $T_{y_0}(A) \cap G = \{0\}$.
b) Seja $g: U \times V \to F$ a aplicação suave definida por

$$g(x, z) = f(x) + z.$$

Vamos verificar que a derivada $Dg_{(x_0,0)}: T_{x_0}(M) \times G \to F$ é sobrejectiva. Com efeito, dado $c \in F$, podemos escrever $c = a + b$, com $a \in T_{y_0}(A)$ e

$b \in G$ e existe então $u \in T_{x_0}(M)$ tal que $Df_{x_0}(u) = a$, vindo então

$$Dg_{(x_0,0)}(u,b) = Df_{x_0}(u) + b = c.$$

c) Tendo em conta II.4.28, podemos concluir que existe um aberto W de F, com $y_0 \in W$ e uma aplicação suave $h\colon W \to U \times V$ tal que $h(y_0) = (x_0, 0)$ e que, para cada $y \in W$, $g(h(y)) = y$. Por outras palavras, sendo $h_1\colon W \to U$ e $h_2\colon W \to V$ as aplicações suaves componentes de h, definidas por $h(y) = (h_1(y), h_2(y))$, tem-se $h_1(y_0) = x_0$, $h_2(y_0) = 0$ e, para cada $y \in W$, $f(h_1(y)) + h_2(y) = y$.
d) Vamos mostrar que a derivada $Dh_{2y_0}\colon F \to G$ é sobrejectiva.
Ora, por derivação da identidade $f(h_1(y)) + h_2(y) = y$, obtemos, para cada $w \in F$,

$$w = Df_{x_0}(Dh_{1y_0}(w)) + Dh_{2y_0}(w),$$

com $Df_{x_0}(Dh_{1y_0}(w)) \in T_{y_0}(A)$ e $Dh_{2y_0}(w) \in G = T_{y_0}(A)^{\perp}$, o que mostra que $Dh_{2y_0}(w)$ é a projecção ortogonal de w sobre G, em particular, se $w \in G$, $w = Dh_{2y_0}(w)$.
e) Para cada $y \in W$, o facto de se ter $y = f(h_1(y)) + h_2(y)$, com $h_1(y) \in U$ e $h_2(y) \in V$, implica, pelo que vimos em a), que $y \in A$ se, e só se, $h_2(y) = 0$. O teorema de construção de variedades como imagens recíprocas garante agora que $W \cap A$, e portanto A, é no ponto y_0 uma variedade sem bordo. □

Apresentamos em seguida um primeiro exemplo de aplicação do resultado precedente. Outros exemplos aparecerão na próxima secção.

II.4.40 **(Teorema da aplicação idempotente)** Sejam $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $f\colon M \to M$ uma aplicação suave idempotente, isto é, tal que $f \circ f = f$. Tem-se então que

$$f(M) = \{x \in M \mid f(x) = x\}$$

é uma variedade sem bordo e, para cada $x \in f(M)$,

$$T_x(f(M)) = Df_x(T_x(M)) = \{u \in T_x(M) \mid Df_x(u) = u\}.$$

Dem: Comecemos por notar que $\{x \in M \mid f(x) = x\}$ está evidentemente contido em $f(M)$ e que a inclusão oposta resulta de que, se $y \in f(M)$, tem-se $y = f(x)$, para um certo $x \in M$, donde $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Por derivação da identidade $f \circ f = f$, deduzimos que, para cada $x \in f(M)$, $Df_x \circ Df_x = Df_x$ e portanto, como anteriormente,

$$Df_x(T_x(M)) = \{u \in T_x(M) \mid Df_x(u) = u\}.$$

O facto de, para cada $x \in f(M)$ se ter $f(x) = x$ implica, por derivação, que, para cada $u \in T_x(f(M)) \subset T_x(M)$, tem-se $Df_x(u) = u$, em particular u

pertence à imagem de $Df_x: T_x(M) \to T_x(f(M))$. Podemos agora aplicar o segundo teorema da submersão para garantir que $f(M)$ é uma variedade em x e que $T_x(f(M)) = Df_x(T_x(M))$. □

Vamos terminar esta secção com o estudo de outra consequência do teorema da função inversa, do mesmo tipo que os teoremas da imersão e da submersão. Este resultado, embora importante, não será utilizado no resto deste trabalho.

II.4.41 **(Teorema da característica constante)** Seja $x_0 \in M \subset E$ tal que (M, x_0) seja uma variedade sem bordo, com dimensão m. Sejam $\widehat{E}$ um espaço vectorial de dimensão n e $f: M \to \widehat{E}$ uma aplicação suave tal que todos os subespaços vectoriais $Df_x(T_x(M))$ de $\widehat{E}$ tenham a mesma dimensão n'.[38] Existe então um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que $f(U)$ seja uma variedade sem bordo com dimensão n'.

Dem: Compondo f com um difeomorfismo local conveniente, ficamos reduzidos a provar o resultado no caso em que M é um aberto dum espaço vectorial F de dimensão m, $x_0 = 0$ e, para cada $x \in M$, $Df_x(F)$ é um subespaço vectorial de dimensão n' de $\widehat{E}$.

Seja $G \subset F$ o subespaço vectorial de dimensão $m - n'$

$$G = \{u \in F \mid Df_0(u) = 0\}$$

e seja $\pi: F \to G$ uma aplicação linear tal que, para cada $u \in G$, $\pi(u) = u$ (por exemplo, a projecção ortogonal de F sobre G, relativamente a um produto interno que se considere em F). Do mesmo modo, seja $\widehat{\pi}: \widehat{E} \to Df_0(F)$ uma aplicação linear tal que, para cada $v \in Df_0(F)$, $\widehat{\pi}(v) = v$. Sendo então

$$H = \{v \in \widehat{E} \mid \widehat{\pi}(v) = 0\},$$

que é um subespaço vectorial de dimensão $n - n'$ de $\widehat{E}$, vai ter lugar a soma directa

$$\widehat{E} = Df_0(F) \oplus H,$$

em que a projecção associada de $\widehat{E}$ sobre $Df_0(F)$ é precisamente $\widehat{\pi}$ ($v = \widehat{\pi}(v) + (v - \widehat{\pi}(v))$, onde se tem $\widehat{\pi}(v - \widehat{\pi}(v)) = 0$). Consideremos agora a aplicação suave $\overline{\varphi}: M \to Df_0(F) \times G$ definida por

$$\overline{\varphi}(x) = (\widehat{\pi}(f(x)), \pi(x)).$$

Vem $\overline{\varphi}(0) = (y_0, 0)$, com $y_0 = \widehat{\pi}(f(0))$, e a derivada $D\overline{\varphi}_0: F \to Df_0(F) \times$ G está definida por

[38] Por outras palavras, Df_x tem característica constante n'.

$$D\overline{\varphi}_0(u) = (\widehat{\pi}(Df_0(u)), \pi(u)) = (Df_0(u), \pi(u)).$$

Se $u \in F$ é tal que $D\overline{\varphi}_0(u) = 0$, tem-se, olhando a primeira componente, $Df_0(u) = 0$, logo $u \in G$, e então, olhando a segunda componente, $0 = \pi(u) = u$. Ficou portanto provado que $D\overline{\varphi}_0$ é uma aplicação linear injectiva, logo um isomorfismo, visto que F e $Df_0(F) \times G$ têm a mesma dimensão m. Podemos agora aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de um aberto U de M, com $0 \in U$, tal que a restrição φ de $\overline{\varphi}$ seja um difeomorfismo de U sobre um aberto de $Df_0(F) \times G$, que podemos já supor da forma $V \times W$, com V e W bolas abertas de centros y_0 e 0, respectivamente.

Se $(y, z) \in V \times W$, tem-se $(y, z) = \varphi(x)$, com $x = \varphi^{-1}(y, z)$, e portanto $y = \widehat{\pi}(f(x))$. Podemos portanto escrever, tendo em conta a soma directa $\widehat{E} = Df_0(F) \oplus H$,

$$f \circ \varphi^{-1}(y, z) = f(x) = y + h(y, z),$$

com $h\colon V \times W \to H$ aplicação suave. Para cada $(y, z) \in V \times W$, o facto de $D(\varphi^{-1})_{(y,z)}\colon Df_0(F) \times G \to F$ ser um isomorfismo implica, pela hipótese da característica constante, que

$$D(f \circ \varphi^{-1})_{(y,z)}(Df_0(F) \times G) = Df_{\varphi^{-1}(y,z)}(F)$$

é um subespaço vectorial de dimensão n' de $\widehat{E}$. O facto de se ter

$$D(f \circ \varphi^{-1})_{(y,z)}(v, w) = v + Dh_{(y,z)}(v, w)$$

implica que este subespaço contém, em particular, os vectores da forma $v + Dh_{(y,z)}(v, 0)$, com $v \in Df_0(F)$, sendo portanto igual ao conjunto destes vectores, por este constituir também um subespaço vectorial de dimensão n' (tem lugar a aplicação linear injectiva, que a v associa $v + Dh_{(y,z)}(v, 0)$, por ter lugar a soma directa $\widehat{E} = Df_0(F) \oplus H$). Resulta daqui que, para cada $w \in G$,

$$Dh_{(y,z)}(0, w) = D(f \circ \varphi^{-1})_{(y,z)}(0, w),$$

que está naquele subespaço, tem que ser da forma $v + Dh_{(y,z)}(v, 0)$, pelo que, mais uma vez por ter lugar a soma directa referida, tem que ser $v = 0$, e portanto

$$Dh_{(y,z)}(0, w) = Dh_{(y,z)}(v, 0) = Dh_{(y,z)}(0, 0) = 0.$$

Em consequência, para cada $y \in V$, a aplicação da bola aberta W em H, que a z associa $h(y, z)$, tem derivada identicamente nula, pelo que ela é constante. Podemos portanto escrever

$$f \circ \varphi^{-1}(y, z) = y + h(y, z) = y + h(y, 0) = f \circ \varphi^{-1}(y, 0),$$

pelo que

$$f(U) = f \circ \varphi^{-1}(V \times W) = f \circ \varphi^{-1}(V \times \{0\}).$$

O facto de a restrição de $f \circ \varphi^{-1}$ a $V \times \{0\}$, que está definida por $(y, 0) \mapsto y + h(y, 0)$, ser um difeomorfismo sobre a sua imagem (que é bijectiva resulta da soma directa referida e, pela mesma razão, a inversa está definida por $y' \mapsto (\widehat{\pi}(y'), 0)$) implica agora que $f(U)$, tal como $V \times \{0\}$, é uma variedade sem bordo, com dimensão n'. □

§5. Alguns exemplos importantes de variedade

Vamos estudar nesta secção alguns exemplos de variedade sem bordo que aparecem com frequência nas aplicações. O primeiro exemplo é algo trivial, na medida em que se está em presença de um aberto de um espaço vectorial de dimensão finita, e é aqui apresentado apenas como referência.

II.5.1 Sejam E e F espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão n. Tem-se então que o conjunto $L_{iso}(E; F)$ dos isomorfismos $\xi: E \to F$ é um aberto de $L(E; F)$ e, consequentemente, uma variedade sem bordo, com dimensão n^2 no caso real e dimensão $2n^2$ no caso complexo.
Dem: O facto de termos um aberto de $L(E; F)$ já foi estabelecido em I.8.1, pelo que basta repararmos que $L(E; F)$ é um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n^2, sendo, no segundo caso, um espaço vectorial real de dimensão $2n^2$. □

II.5.2 O caso particular do resultado anterior em que $E = F$ é especialmente importante, usando-se a notação $GL(E)$ para designar o aberto $L_{iso}(E; E)$ de $L(E; E)$ e escrevendo, com maior precisão, $GL_{\mathbb{R}}(E)$ ou $GL_{\mathbb{C}}(E)$ quando for importante tornar claro qual o corpo dos escalares que está em jogo. A razão da importância especial deste caso está em que $GL(E)$, além de ser uma variedade, tem uma estrutura de grupo, definida pela operação de composição, em que o elemento neutro é Id_E e o elemento inverso de um isomorfismo $\xi: E \to E$ é o isomorfismo inverso ξ^{-1}. A $GL(E)$ dá-se também o nome de *grupo linear geral*.

II.5.3 Em geral, chama-se *grupo de Lie* a uma variedade sem bordo G, munida de uma estrutura de grupo, relativamente à qual são suaves a aplicação $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ e a aplicação $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.

II.5.4 A variedade $GL(E)$, com a sua estrutura de grupo, é um grupo de Lie.
Dem: A suavidade da operação de composição $GL(E) \times GL(E) \to GL(E)$ é uma consequência de se tratar da restrição de uma aplicação bilinear

$L(E;E) \times L(E;E) \to L(E;E)$. A suavidade da aplicação, $\xi \mapsto \xi^{-1}$, $GL(E) \to GL(E)$, foi estabelecida em I.8.1. $\square$

II.5.5 No caso em que o corpo dos escalares é $\mathbb{R}$, $GL(E)$ é união de dois subconjuntos abertos disjuntos, $GL_+(E)$ e $GL_-(E)$, constituídos respectivamente pelos isomorfismos $\xi: E \to E$ que verificam det$(\xi) > 0$ (ou seja, que conservam as orientações) e por aqueles que verificam det$(\xi) < 0$ (ou seja, que invertem as orientações). Aqueles subconjuntos são, em particular, variedades sem bordo, com a mesma dimensão que $GL(E)$, e o primeiro é também um subgrupo e portanto, trivialmente, um grupo de Lie.

II.5.6 Sejam E e F espaços vectoriais, reais ou complexos, com dimensões m e n, respectivamente, munidos de produto interno. O subconjunto $O(E;F)$ de $L(E;F)$, constituído pelas aplicações lineares ortogonais, é então uma variedade compacta sem bordo com dimensão $mn - \frac{m(m+1)}{2}$, no caso real, e $2mn - m^2$, no caso complexo. Além disso, o espaço vectorial tangente em $\lambda \in O(E;F)$ é

$$T_\lambda(O(E;F)) = \{\alpha \in L(E;F) \mid \alpha^* \circ \lambda + \lambda^* \circ \alpha = 0\}.$$

No caso complexo é mais frequente utilizar a notação $U(E;F)$ em vez de $O(E;F)$, mas continuaremos a usar esta última quando for cómodo tratar simultaneamente os casos real e complexo.

Dem: Para cada $\lambda \in L(E;F)$, tem-se $(\lambda^* \circ \lambda)^* = \lambda^* \circ \lambda^{**} = \lambda^* \circ \lambda$, pelo que, sendo $L_{aa}(E;E)$ o subespaço vectorial real de $L(E;E)$ constituído pelas aplicações lineares autoadjuntas, podemos considerar uma aplicação suave $\Phi: L(E;F) \to L_{aa}(E;E)$ definida por $\Phi(\lambda) = \lambda^* \circ \lambda$. Uma vez que, tendo em conta I.2.30, $O(E;F)$ é o conjunto dos $\lambda \in L(E;F)$ tais que $\Phi(\lambda) = Id_E$, vemos que $O(E;F)$ é fechado em $L(E;F)$ e o facto de $O(E;F)$ ser efectivamente uma variedade resultará do teorema de construção de subvariedades como imagens recíprocas se mostrarmos que, para cada $\lambda \in O(E;F)$, a derivada $D\Phi_\lambda: L(E;F) \to L_{aa}(E;E)$, que está definida por $D\Phi_\lambda(\alpha) = \alpha^* \circ \lambda + \lambda^* \circ \alpha$, é uma aplicação linear sobrejectiva. Ora, dado $\beta \in L_{aa}(E;E)$, podemos considerar o elemento $\alpha = \frac{1}{2}\lambda \circ \beta \in L(E;F)$, para o qual se tem

$$\begin{aligned} D\Phi_\lambda(\alpha) &= (\frac{1}{2}\lambda \circ \beta)^* \circ \lambda + \lambda^* \circ (\frac{1}{2}\lambda \circ \beta) = \\ &= \frac{1}{2}\beta^* \circ \lambda^* \circ \lambda + \frac{1}{2}\lambda^* \circ \lambda \circ \beta = \beta, \end{aligned}$$

o que prova a sobrejectividade. O mesmo teorema garante-nos que $T_\lambda(O(E;F))$ é o espaço referido no enunciado e que a dimensão de $O(E;F)$ é a diferença entre a dimensão de $L(E;F)$ (igual a mn, no caso real, e $2mn$, no caso complexo) e a dimensão de $L_{aa}(E;E)$. Para provar que a dimensão de $O(E;F)$ é a referida no enunciado, resta-nos mostrar que a dimensão de $L_{aa}(E;E)$ é $\frac{m(m+1)}{2}$, no caso real, e m^2, no caso complexo. Fixemos, para isso, uma base ortonormada em E e consideremos o isomorfismo de $L(E;E)$ sobre o espaço vectorial $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ das matrizes com m linhas e m colunas e coeficientes em $\mathbb{K}$, que a cada aplicação linear associa a respectiva matriz na base considerada. Tendo em conta I.2.27, a imagem de $L_{aa}(E;E)$ por este isomorfismo é o espaço das matrizes que coincidem com as respectivas transconjugadas pelo que ficamos reduzidos a determinar a dimensão do espaço de tais matrizes. No caso real uma tal matriz fica determinada se dermos, de modo arbitrário, os seus elementos $a_{j,k}$ com $j \leq k$ pelo que, I o conjunto destes pares (j,k), que tem $\frac{m(m+1)}{2}$ elementos, o espaço daquelas matrizes é isomorfo a $\mathbb{R}^I$ e tem assim dimensão $\frac{m(m+1)}{2}$. No caso complexo uma tal matriz fica determinada se dermos, de modo arbitrário em $\mathbb{C}$, os seus elementos $a_{j,k}$ com $j < k$ e, de modo arbitrário em $\mathbb{R}$, os seus elementos $a_{j,j}$, pelo que, notando I' o conjunto dos pares (j,k) com $j < k$, que tem $\frac{m(m-1)}{2}$ elementos, e I_0 o conjunto dos pares (j,j), que tem m elementos, o espaço daquelas matrizes é isomorfo a $\mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{R}^{I_0}$ e tem portanto dimensão real 2 $\frac{m(m-1)}{2} + m = m^2$. Por fim, para mostrar que $O(E;F)$ é um subconjunto compacto de $L(E;F)$, basta escolher uma das normas deste espaço e mostrar que $O(E;F)$ é então um conjunto limitado. Ora, considerando a norma usual das aplicações lineares entre espaços vectoriais normados, para cada $\lambda \in O(E;F)$, tem-se, para todo o $x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\lambda(x)\|}{\|x\|} = 1$ donde, afastando já o caso trivial em que $E = \{0\}$, $\|\lambda\| = 1$. □

II.5.7 Como caso particular, vemos que, se E é um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, munido de produto interno, então o subconjunto $O(E)$ de $L(E;E)$, cujos elementos são os isomorfismos ortogonais $\xi: E \to E$ é uma variedade compacta sem bordo com dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$, no caso real, e n^2, no caso complexo, o espaço tangente em Id_E sendo

$$T_{Id_E}(O(E)) = L_{-aa}(E;E).$$

É claro que um isomorfismo $\xi: E \to E$ é ortogonal se, e só se, $\xi^{-1} = \xi^*$, em particular, para um tal isomorfismo, tem-se, não só $\xi^* \circ \xi = Id_E$, como $\xi \circ \xi^* = Id_E$.
Como anteriormente, no caso complexo é mais frequente utilizar a notação $U(E)$, em vez de $O(E)$. A $O(E)$ e $U(E)$ dá-se respectivamente os nomes de *grupo ortogonal* e *grupo unitário* de E, designações que estão de acordo com o facto de se tratar de subgrupos de $GL(E)$. É claro que $O(E)$ e $U(E)$ são ainda grupos de Lie, uma vez que as respectivas operações de multiplicação e de inversão são suaves, por serem restrições das correspondentes operações em $GL(E)$.

II.5.8 Tal como acontecia com $GL(E)$, no caso em que o corpo dos escalares é $\mathbb{R}$, $O(E)$ vai ser a união de dois subconjuntos disjuntos, abertos em $O(E)$, $O_+(E)$ e $O_-(E)$, constituídos respectivamente pelos isomorfismos ortogonais $\xi: E \to E$ que verificam $\det(\xi) > 0$ (ou seja, que conservam as

orientações) e por aqueles que verificam det$(\xi) < 0$ (ou seja, que invertem as orientações). Aqueles subconjuntos são, em particular, variedades sem bordo, com a mesma dimensão que $O(E)$, e o primeiro é também um subgrupo e portanto, trivialmente, um grupo de Lie. Uma vez que cada um dos conjuntos $O_+(E)$ e $O_-(E)$ é o complementar do outro, estes conjuntos são também fechados em $O(E)$, e portanto compactos.
O grupo $O_+(E)$ é também notado $SO(E)$ e conhecido como o *grupo ortogonal especial*.[39]

II.5.9 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão $n \geq 1$. Tem-se então que o subconjunto $SL(E)$ de $L(E;E)$, cujos elementos são as aplicações lineares ξ com det$(\xi) = 1$, é uma variedade sem bordo com dimensão $n^2 - 1$, no caso real, e dimensão $2n^2 - 2$, no caso complexo. Tem-se além disso, para o espaço vectorial tangente em $Id_E \in SL(E)$,

$$T_{Id}(SL(E)) = \{\alpha \in L(E;E) \mid \mathrm{Tr}(\alpha) = 0\}.$$

$SL(E)$ é um subgrupo de $GL(E)$ e portanto. também um grupo de Lie.
Dem: O facto de $SL(E)$ ser um subgrupo de $GL(E)$ é uma consequência das propriedades do determinante em I.1.22. Tendo em conta I.7.9, det: $L(E;E) \to \mathbb{K}$ é uma aplicação suave e a sua derivada em Id_E é a aplicação linear complexa $\alpha \mapsto \mathrm{Tr}(\alpha)$, a qual é sobrejectiva, uma vez que cada $a \in \mathbb{K}$ é igual a $\mathrm{Tr}(\frac{a}{n} Id_E)$. O teorema de construção de subvariedades como imagens recíprocas garante agora que $SL(E)$ é uma variedade em Id_E, com a dimensão e o espaço tangente indicados no enunciado. Para vermos que $SL(E)$ é ainda uma variedade com a mesma dimensão em cada $\xi \in SL(E)$, basta repararmos que tem lugar um difeomorfismo $L_\xi : SL(E) \to SL(E)$, definido por $L_\xi(\eta) = \xi \circ \eta$ (com $L_{\xi^{-1}}$ como difeomorfismo inverso), o qual aplica Id_E em ξ. □

Os próximos exemplos de variedade sem bordo serão construídos com o auxílio do segundo teorema da submersão.

II.5.10 Seja E um espaço vectorial real de dimensão par $n = 2p$ e seja $\mathcal{F}'(E) \subset L(E;E)$ o conjunto das estruturas complexas $J: E \to E$. Então $\mathcal{F}'(E)$ é uma variedade sem bordo com dimensão $2p^2$ e, para cada $J \in \mathcal{F}'(E)$, $T_J(\mathcal{F}'(E))$ é o conjunto das aplicações lineares $\alpha \in L(E;E)$ tais que $\alpha \circ J = -J \circ \alpha$ (ou seja, o conjunto das aplicações antilineares para a estrutura de espaço vectorial complexo definida por J).
Dem: Seja $J_0 \in \mathcal{F}'(E)$ fixado. Uma vez que, $J \circ J = -Id_E$, para cada $J \in \mathcal{F}'(E)$, concluímos, por derivação, que, para cada $\alpha \in T_{J_0}(\mathcal{F}'(E))$,

[39] A palavra "especial" e o símbolo "S" são normalmente associados à condição de o determinante ser 1 (cf. II.5.9). O seu uso aqui respeita esse hábito, uma vez que, como se viu no exercício I.6, para um isomorfismo ortogonal ξ, a condição det$(\xi) > 0$ é equivalente à condição det$(\xi) = 1$.

$\alpha \circ J_0 + J_0 \circ \alpha = 0$. Reparemos agora que, para cada ξ no aberto $GL(E) = L_{iso}(E;E)$ de $L(E;E)$, tem-se ainda $\xi \circ J_0 \circ \xi^{-1} \in \mathcal{F}'(E)$, pelo que podemos considerar a aplicação suave $\Phi: GL(E) \to \mathcal{F}'(E)$ definida por $\Phi(\xi) = \xi \circ J_0 \circ \xi^{-1}$, cuja derivada em Id_E é

$$D\Phi_{Id_E}: L(E;E) \to T_{J_0}(\mathcal{F}'(E)), \quad D\Phi_{Id_E}(\beta) = \beta \circ J_0 - J_0 \circ \beta$$

(cf. I.8.1). Dado $\alpha \in L(E;E)$ tal que $\alpha \circ J_0 = -J_0 \circ \alpha$, em particular dado $\alpha \in T_{J_0}(\mathcal{F}'(E))$, podemos considerar $\beta \in L(E;E)$ definido por

$$\beta = \frac{1}{2} J_0 \circ \alpha = -\frac{1}{2} \alpha \circ J_0,$$

para o qual se tem

$$D\Phi_{Id_E}(\beta) = -\frac{1}{2}\alpha \circ J_0 \circ J_0 - \frac{1}{2} J_0 \circ J_0 \circ \alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha,$$

o que mostra que $D\Phi_{Id_E}: L(E;E) \to T_{J_0}(\mathcal{F}'(E))$ é uma aplicação linear sobrejectiva. Ficou assim provado que $T_{J_0}(\mathcal{F}'(E))$ é o conjunto dos $\alpha \in L(E;E)$ tais que $\alpha \circ J_0 = -J_0 \circ \alpha$ e, tendo em conta II.4.39, que $\mathcal{F}'(E)$ é uma variedade em J_0. Quanto à dimensão da variedade, basta repararmos que, como vimos, o espaço vectorial tangente é o conjunto das aplicações antilineares, ou seja, o espaço das aplicações lineares complexas $\overline{E} \to E$, o qual é um espaço vectorial complexo de dimensão p^2, e portanto um espaço vectorial real de dimensão $2p^2$. □

II.5.11 Seja E um espaço euclidiano de dimensão par $n = 2p$ e seja $\mathcal{F}(E) \subset L(E;E)$ o conjunto das estruturas complexas compatíveis $J: E \to E$ (cf. I.2.7). Então $\mathcal{F}(E)$ é uma variedade compacta sem bordo com dimensão $p^2 - p$ e, para cada $J \in \mathcal{F}(E)$, $T_J(\mathcal{F}(E))$ é o conjunto das aplicações lineares $\alpha \in L(E;E)$ tais que $\alpha^* = -\alpha$ e $\alpha \circ J = -J \circ \alpha$ (ou seja, o conjunto das aplicações antiautoadjuntas que são antilineares para a estrutura de espaço vectorial complexo definida por J).

Dem: Comecemos por reparar que, tendo em conta I.2.31, tem-se

$$\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}'(E) \cap O(E) = \mathcal{F}'(E) \cap L_{-aa}(E;E).$$

Uma vez que $\mathcal{F}'(E)$ é fechado em $L(E;E)$ e $O(E)$ é compacto, a primeira igualdade implica já que $\mathcal{F}(E)$ é compacto. Seja $J_0 \in \mathcal{F}(E)$ fixado. Para cada $\alpha \in T_{J_0}(\mathcal{F}(E))$, tem-se $\alpha \in T_{J_0}(\mathcal{F}'(E))$ e $\alpha \in L_{-aa}(E;E)$, ou seja, $\alpha \circ J_0 = -J_0 \circ \alpha$ e $\alpha^* = -\alpha$. Reparemos agora que, para cada ξ no grupo ortogonal $O(E) \subset L(E;E)$, tem-se ainda $\xi \circ J_0 \circ \xi^* \in \mathcal{F}(E)$, uma vez que

$$(\xi \circ J_0 \circ \xi^*) \circ (\xi \circ J_0 \circ \xi^*) = \xi \circ J_0 \circ J_0 \circ \xi^* = -\xi \circ \xi^* = -Id_E,$$
$$(\xi \circ J_0 \circ \xi^*)^* = \xi \circ J_0^* \circ \xi^* = -\xi \circ J_0 \circ \xi.$$

Podemos assim considerar uma aplicação suave $\Phi: O(E) \to \mathcal{F}(E)$ definida por $\Phi(\xi) = \xi \circ J_0 \circ \xi^*$. Lembrando que $T_{Id_E}(O(E)) = L_{-aa}(E;E)$, vemos que a derivada de Φ em Id_E é a aplicação linear

$$L_{-aa}(E;E) \to T_{J_0}(\mathcal{F}(E)), \quad D\Phi_{Id_E}(\beta) = \beta \circ J_0 + J_0 \circ \beta^*.$$

Dado $\alpha \in L(E;E)$ tal que $\alpha^* = -\alpha$ e $\alpha \circ J_0 = -J_0 \circ \alpha$, em particular dado $\alpha \in T_{J_0}(\mathcal{F}(E))$, podemos considerar $\beta \in L(E;E)$ definido por

$$\beta = \frac{1}{2} J_0 \circ \alpha = -\frac{1}{2} \alpha \circ J_0,$$

para o qual se tem

$$\beta^* = \frac{1}{2} \alpha^* \circ J_0^* = \frac{1}{2} \alpha \circ J_0 = -\beta,$$

isto é, $\beta \in L_{-aa}(E;E)$, vindo então

$$D\Phi_{Id_E}(\beta) = -\frac{1}{2} \alpha \circ J_0 \circ J_0 - \frac{1}{2} J_0 \circ J_0 \circ \alpha = \alpha,$$

o que mostra que $D\Phi_{Id_E}: L_{-aa}(E;E) \to T_{J_0}(\mathcal{F}(E))$ é uma aplicação linear sobrejectiva. Ficou assim provado que $T_{J_0}(\mathcal{F}(E))$ é o conjunto dos $\alpha \in L(E;E)$ tais que $\alpha^* = -\alpha$ e $\alpha \circ J_0 = -J_0 \circ \alpha$ e, tendo em conta o segundo teorema da submersão, que $\mathcal{F}(E)$ é uma variedade em J_0. Examinemos enfim a dimensão de $\mathcal{F}(E)$, igual à dimensão do espaço vectorial tangente $T_{J_0}(\mathcal{F}(E))$. Para isso, começamos por lembrar que, tendo em conta a dimensão de $O(E)$, $L_{-aa}(E;E) = T_{Id_E}(O(E))$ tem dimensão $\frac{2p(2p-1)}{2} = p(2p-1)$ e reparamos em seguida que $L_{-aa}(E;E)$ é soma directa de $T_{J_0}(\mathcal{F}(E))$ com o espaço vectorial dos $\alpha \in L_{-aa}(E;E)$ que verificam $\alpha \circ J_0 = J_0 \circ \alpha$, uma vez que a intersecção dos dois é evidentemente $\{0\}$ e que cada $\gamma \in L_{-aa}(E;E)$ se pode escrever na forma

$$\gamma = \frac{\gamma + J_0 \circ \gamma \circ J_0}{2} + \frac{\gamma - J_0 \circ \gamma \circ J_0}{2},$$

com a primeira parcela no primeiro espaço e a segunda parcela no segundo. Este segundo espaço não é mais do que o espaço das aplicações lineares complexas antiautoadjuntas $E \to E$ (relativamente à estrutura de espaço vectorial complexo definida por J_0 e ao produto interno complexo associado ao produto interno real) e, mais uma vez, tendo em conta a dimensão de $O(E)$, ele tem dimensão real p^2. Podemos assim concluir que $p(2p-1) - p^2 = p^2 - p$ é a dimensão de $T_{J_0}(\mathcal{F}(E))$. □

II.5.12 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n. Vamos notar $\mathbb{G}(E)$ o conjunto dos subespaços vectoriais de E e, para cada $0 \le k \le n$, $\mathbb{G}_k(E)$ o subconjunto daqueles cuja dimensão é k.

No caso em que E está munido de um produto interno, notamos, analogamente, $G(E)$ o subconjunto de $L(E;E)$ cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E e, para cada $0 \le k \le n$, $G_k(E)$ o subconjunto de $G(E)$ cujos elementos são as

projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de dimensão k.
Relembremos que, como foi observado em I.2.35, existe uma bijecção natural de $\mathbb{G}(E)$ sobre $G(E)$, aplicando $\mathbb{G}_k(E)$ sobre $G_k(E)$, que associa a cada subespaço vectorial $F \subset E$ a projecção ortogonal π_F de E sobre F e que se tem

$$G(E) = \{\lambda \in L_{aa}(E;E) \mid \lambda \circ \lambda = \lambda\}.$$ [40]

II.5.13 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, munido de produto interno. Tem-se então que $G(E)$ é uma variedade compacta sem bordo, tendo os $G_k(E)$ como subvariedades simultaneamente abertas e fechadas (as *variedades de Grassmann*), e, para cada $\lambda_0 = \pi_F \in G_k(E)$, a dimensão de $G(E)$ em λ_0 é $k(n-k)$ ou $2k(n-k)$, conforme $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e o espaço vectorial tangente $T_{\lambda_0}(G(E))$ admite as seguintes caracterizações:

$$\begin{aligned} T_{\lambda_0}(G(E)) &= \{\alpha \in L_{aa}(E;E) \mid \alpha \circ \lambda_0 + \lambda_0 \circ \alpha = \alpha\} \\ &= \{\alpha \in L_{aa}(E;E) \mid \alpha(F) \subset F^\perp \wedge \alpha(F^\perp) \subset F\}. \end{aligned}$$

Em termos de matrizes de aplicações lineares relativas à decomposição em soma directa ortogonal $E = F \oplus F^\perp$ (cf. I.3.6), $T_{\lambda_0}(G(E))$ é o conjunto dos $\alpha \in L(E;E)$ cuja matriz é do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{2,1}^* \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix},$$

com $\alpha_{2,1} \in L(F;F^\perp)$ arbitrária.
Dem: Seja $\lambda_0 = \pi_F \in G_k(E)$ fixado. O facto de se ter $G(E) \subset L_{aa}(E;E)$ implica que $T_{\lambda_0}(G(E)) \subset L_{aa}(E;E)$ e, por derivação da identidade $\lambda \circ \lambda = \lambda$, vemos que, para cada $\alpha \in T_{\lambda_0}(G(E))$, tem-se $\alpha \circ \lambda_0 + \lambda_0 \circ \alpha = \alpha$. Reparamos agora que, se $\xi: E \to E$ é um isomorfismo ortogonal, então, para cada $x = x' + x'' \in E$, com $x' \in F$ e $x'' \in F^\perp$, tem-se $\xi(x) = \xi(x') + \xi(x'')$, com $\xi(x') \in \xi(F)$ e $\xi(x'') \in \xi(F)^\perp$, pelo que $\xi(\lambda_0(x)) = \xi(x')$ é a projecção ortogonal de $\xi(x)$ sobre o subespaço vectorial $\xi(F)$ de dimensão k de E, por outras palavras, a projecção ortogonal de E sobre $\xi(F)$ é a aplicação linear $\xi \circ \lambda_0 \circ \xi^{-1} = \xi \circ \lambda_0 \circ \xi^*$. Podemos assim considerar a aplicação suave $\Phi: O(E) \to G_k(E) \subset G(E)$ definida por $\Phi(\xi) = \xi \circ \lambda_0 \circ \xi^*$, que aplica Id_E em λ_0 e cuja derivada em Id_E é a aplicação linear

$$L_{-aa}(E;E) \to T_{\lambda_0}(G(E)), \quad D\Phi_{Id_E}(\beta) = \beta \circ \lambda_0 + \lambda_0 \circ \beta^*.$$

Dado $\alpha \in L_{aa}(E;E)$ tal que $\alpha \circ \lambda_0 + \lambda_0 \circ \alpha = \alpha$, em particular, dado $\alpha \in T_{\lambda_0}(G(E))$, tem-se

$$\alpha \circ \lambda_0 + \lambda_0 \circ \alpha \circ \lambda_0 = \alpha \circ \lambda_0 \circ \lambda_0 + \lambda_0 \circ \alpha \circ \lambda_0 = \alpha \circ \lambda_0,$$

[40] Por esse motivo, é útil pensar em $G(E)$ como sendo “moralmente” o conjunto dos subespaços vectoriais de E.

donde $\lambda_0\circ\alpha\circ\lambda_0=0$ e vemos então que, sendo $\beta=\alpha\circ\lambda_0-\lambda_0\circ\alpha$, tem-se $\beta^*=\lambda_0\circ\alpha-\alpha\circ\lambda_0=-\beta$, isto é, $\beta\in L_{-aa}(E;E)$, e

$$\begin{aligned}D\Phi_{Id_E}(\beta)&=(\alpha\circ\lambda_0-\lambda_0\circ\alpha)\circ\lambda_0-\lambda_0\circ(\alpha\circ\lambda_0-\lambda_0\circ\alpha)\\&=\alpha\circ\lambda_0+\lambda_0\circ\alpha=\alpha,\end{aligned}$$

o que mostra que $D\Phi_{Id_E}\colon T_{Id_E}(O(E))\to T_{\lambda_0}(G(E))$ é uma aplicação linear sobrejectiva. Ficou assim provado que $T_{\lambda_0}(G(E))$ é o conjunto dos $\alpha\in L_{aa}(E;E)$ tais que $\alpha\circ\lambda_0+\lambda_0\circ\alpha=\alpha$ e, tendo em conta o segundo teorema da submersão, que $G(E)$ é uma variedade em λ_0. Por II.4.28, podemos garantir que $\Phi(O(E))$ é uma vizinhança de λ_0 em $G(E)$ e portanto, por $\Phi(O(E))$ estar contido em $G_k(E)$, $G_k(E)$ é também uma vizinhança de λ_0 em $G(E)$, o que mostra que cada $G_k(E)$ é aberto em $G(E)$. Vemos agora que, se F' é um subespaço arbitrário de dimensão k, então, considerando bases ortonormadas arbitrárias para F e para F' e prolongando-as em bases ortonormadas de E, podemos considerar o isomorfismo ortogonal $\xi\in O(E)$ definido pela condição de aplicar a primeira base ortonormada de E na segunda, isomorfismo esse que vai aplicar F sobre F'; fica assim provado que se tem mesmo $\Phi(O(E))=G_k(E)$ pelo que, por $O(E)$ ser compacto, $G_k(E)$ é também compacto, em particular fechado em $G(E)$. O facto de $G(E)$ ser a união finita dos compactos $G_k(E)$ implica que $G(E)$ é também uma variedade compacta. Vejamos agora que $T_{\lambda_0}(G(E))$ também admite as caracterizações alternativas no enunciado. Se $\alpha\in L(E;E)$ verifica $\alpha\circ\lambda_0+\lambda_0\circ\alpha=\alpha$ então, se $x\in F$, tem-se $\lambda_0(x)=x$, donde

$$\alpha(x)=\alpha(\lambda_0(x))+\lambda_0(\alpha(x))=\alpha(x)+\lambda_0(\alpha(x)),$$

portanto $\lambda_0(\alpha(x))=0$, ou seja, $\alpha(x)\in F^\perp$, e, se $x\in F^\perp$, tem-se $\lambda_0(x)=0$, donde

$$\alpha(x)=\alpha(\lambda_0(x))+\lambda_0(\alpha(x))=\lambda_0(\alpha(x)),$$

portanto $\alpha(x)\in F$. Reciprocamente, se $\alpha(F)\subset F^\perp$ e $\alpha(F^\perp)\subset F$, então, para cada $x\in F$, $\alpha(\lambda_0(x))+\lambda_0(\alpha(x))=\alpha(x)+0=\alpha(x)$ e, para cada $x\in F^\perp$, $\alpha(\lambda_0(x))+\lambda_0(\alpha(x))=\alpha(0)+\alpha(x)=\alpha(x)$ e portanto, uma vez que $E=F\oplus F^\perp$, $\alpha(\lambda_0(x))+\lambda_0(\alpha(x))=\alpha(x)$, para todo o $x\in E$. A caracterização de $T_{\lambda_0}(G(E))$ como o conjunto dos $\alpha\in L_{aa}(E;E)$ tais que $\alpha(F)\subset F^\perp$ e $\alpha(F^\perp)\subset F$ é trivialmente equivalente à caracterização matricial referida no enunciado e esta última mostra que $T_{\lambda_0}(G(E))$ é isomorfo a $L(F;F^\perp)$ e tem portanto a dimensão no enunciado. □

§6. Variedades com bordo.

II.6.1 Dissemos atrás que uma variedade sem bordo, com dimensão n, pode ser olhada intuitivamente como um conjunto que é localmente parecido com um espaço vectorial de dimensão n e sugerimos graficamente meia superfície esférica como exemplo da variedade sem bordo, com dimensão 2. Se olharmos com atenção para esse exemplo, veremos que, para que ele funcione devidamente, temos que supor que consideramos a meia superfície esférica *aberta*,[41] isto é, sem incluir os pontos do *bordo* (o local onde a faca cortou a laranja). Se considerarmos a meia superfície esférica fechada já vai haver pontos que não vão ter vizinhanças abertas difeomorfas a abertos dum plano, a saber, os pontos do bordo. Estes vão ter, no entanto, vizinhanças abertas difeomorfas a abertos de um semi-plano. Na mesma ordem de ideias, se considerarmos um igloo de esquimó (ou, equivalentemente, meia casca de laranja com uma dentada de um rato[42]), vão existir dois pontos que não têm vizinhanças abertas difeomorfas a abertos dum plano nem dum semi-plano, mas têm vizinhanças abertas difeomorfas a um aberto dum quadrante. Torna-se assim natural generalizar a noção de variedade sem bordo, de modo a abarcar exemplos como os precedentes. Essa generalização obtém-se permitindo que os *modelos*, para além de espaços vectoriais de dimensão finita, possam ser, mais geralmente, abertos de certos subconjuntos destes espaços, a que daremos o nome de sectores.

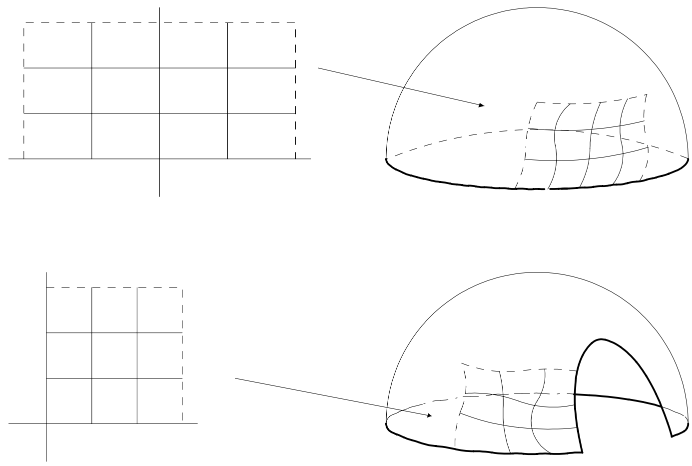

Figura 4

II.6.2 Sejam F um espaço vectorial real de dimensão n e $0 \leq p \leq n$. Diz-se que um subconjunto A de F é um *sector de índice* p se existir uma base $w_1, \dots, w_n$ de F tal que A seja o conjunto dos vectores cujas últimas p componentes nessa base sejam maiores ou iguais a 0:

[41]O termo *aberto* não tem aqui um significado topológico. A superfície em questão não é evidentemente um conjunto aberto no espaço vectorial ambiente.

[42]Supomos naturalmente que o rato tem uma dentadura de classe C^∞.

$$A = \{x = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n \in F \mid \underset{j>n-p}{\forall} a_j \geq 0\}.$$

Em particular, F é o único sector de índice 0 de F.
Repare-se que, para um dado sector A, poderá haver, em geral, várias bases adaptadas, isto é, várias bases verificando a condição da definição.

Uma questão que se põe naturalmente é a de saber se um mesmo conjunto $A \subset F$ poderá ser, ao mesmo tempo, um sector com dois índices distintos, isto é, se poderíamos encontrar duas bases adaptadas em que o valor de p não fosse o mesmo. A resposta, que é negativa, é uma consequência da seguinte caracterização intrínseca do índice dum sector:

II.6.3 Se F é um espaço vectorial real de dimensão n e se $A \subset F$ é um sector de índice p, então F é o subespaço vectorial gerado por A e $G = A \cap (-A)$ é um subespaço vectorial de F, com dimensão $n - p$.
Dem: Seja $w_1, \ldots, w_n$ uma base de F tal que A seja o conjunto dos vectores de F cujas últimas p componentes sejam maiores ou iguais a 0. Então $w_j \in A$ e $-A$ é o conjunto dos vectores cujas últimas p componentes são menores ou iguais a 0, pelo que $G = A \cap (-A)$ sendo o conjunto dos vectores cujas últimas p componentes são nulas, é o subespaço vectorial gerado por $w_1, \ldots, w_{n-p}$. □

II.6.4 Em particular, se F é um espaço vectorial de dimensão n e $A \subset F$ é um sector de índice 1, $G = A \cap (-A)$ é um hiperplano de F e os semi-espaços abertos associados (cf. I.4.8) são $F \setminus A$ e $A \setminus G$. Define-se então a *orientação transversa* de G *associada ao sector* A como sendo aquela cujo semi-espaço aberto positivo é $F \setminus A$.
Dem: Seja $w_1, \ldots, w_n$ uma base de F tal que A seja o conjunto dos vectores de F cuja última componente seja maior ou igual a 0. Tem-se então que $G = A \cap (-A)$ é o subespaço vectorial constituído pelos vectores com última coordenada igual a 0, ou seja, o gerado por $w_1, \ldots, w_{n-1}$, e daqui concluímos a existência de um isomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\frac{F}{G}$, que a t associa $[tw_n]_G$. Resulta daqui que as semi-rectas abertas de $\frac{F}{G}$ são as constituídas respectivamente pelos $[tw_n]_G$ com $t > 0$ e por aqueles com $t < 0$ pelo que tido o que nos resta é reparar que, se $w = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n \in F$, tem-se $[w]_G = [t_n w_n]_G$. □

II.6.5 **(Exemplos) a)** Num plano, isto é, num espaço vectorial de dimensão 2, um sector de índice 1 é um semiplano e um sector de índice 2 é um ângulo.
b) Num espaço vectorial de dimensão 3, um sector de índice 1 é um *semiespaço* (parte do espaço que está dum dos lados dum plano), um sector de índice 2 é um *diedro* (parte do espaço limitada por dois semiplanos) e um sector de índice 3 é um *triedro* (parte do espaço limitada por três ângulos

planos).

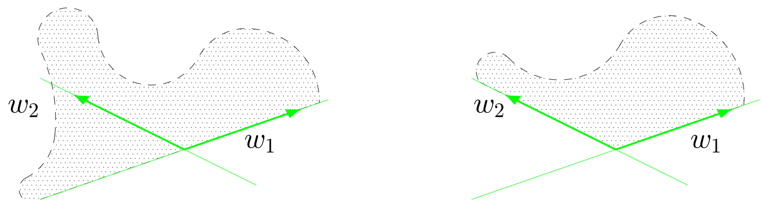

Figura 5

II.6.6 Sejam F e $\widehat{F}$ dois espaços vectoriais de dimensão n e $A \subset F$ e $\widehat{A} \subset \widehat{F}$ dois sectores de índice p. Existe então um isomorfismo $\xi: F \to \widehat{F}$, tal que $\xi(A) = \widehat{A}$.

Dem: Sejam $w_1, \ldots, w_n$ uma base de F e $\widehat{w}_1, \ldots, \widehat{w}_n$ uma base de $\widehat{F}$, tais que A seja o conjunto dos vectores de F cujas últimas p coordenadas sejam maiores ou iguais a 0 e que $\widehat{A}$ seja o conjunto dos vectores de $\widehat{F}$ cujas últimas p coordenadas sejam maiores ou iguais a 0. Sendo $\xi: F \to \widehat{F}$ o isomorfismo que aplica cada w_j em $\widehat{w}_j$, é imediato que se tem $\xi(A) = \widehat{A}$. □

II.6.7 Sejam F e $\widehat{F}$ dois espaços vectoriais de dimensão n e $\xi: F \to \widehat{F}$ um isomorfismo. Se $A \subset F$ é um sector de índice p, tem-se então que $\widehat{A} = \xi(A)$ é um sector de índice p de $\widehat{F}$.

Dem: Seja $w_1, \ldots, w_n$ uma base de F tal que A seja o conjunto dos vectores de F cujas últimas coordenadas são maiores ou iguais a 0. Sendo $\widehat{w}_j = \xi(w_j)$, tem-se então que $\widehat{w}_1, \ldots, \widehat{w}_n$ é uma base de $\widehat{F}$ tal que $\xi(A)$ é o conjunto dos vectores que nesta base têm as últimas p coordenadas maiores ou iguais a 0. □

II.6.8 Sejam F e $\widehat{F}$ espaços vectoriais com dimensões n e $\widehat{n}$, respectivamente, e $A \subset F$ e $\widehat{A} \subset \widehat{F}$ sectores de índices p e $\widehat{p}$, respectivamente. Tem-se então que $A \times \widehat{A}$ é um sector de índice $p + \widehat{p}$ do espaço vectorial $F \times \widehat{F}$, com dimensão $n + \widehat{n}$.

Mais geralmente, suponhamos que, para cada $1 \le j \le N$, F_j é um espaço vectorial de dimensão n_j e $A_j \subset F_j$ é um sector de índice p_j. Tem-se então que $A_1 \times \cdots \times A_N$ é um sector de índice $p_1 + \cdots + p_N$ do espaço vectorial $F_1 \times \cdots \times F_N$, com dimensão $n_1 + \cdots + n_N$.

Dem: Vamos demonstrar apenas a primeira afirmação, visto que a segunda é de demonstração análoga, embora com notação mais pesada (ou, alternativamente, pode ser demonstrada por indução a partir da primeira). Seja $w_1, \ldots, w_n$ uma base de F, tal que A seja o conjunto dos vectores cujas últimas p coordenadas sejam maiores ou iguais a 0, e seja $\widehat{w}_1, \ldots, \widehat{w}_{\widehat{n}}$ uma base de $\widehat{F}$, tal que $\widehat{A}$ seja constituído pelos vectores cujas últimas $\widehat{p}$ coordenadas sejam maiores ou iguais a 0. Tem-se então que $F \times \widehat{F}$ admite uma base constituída pelos vectores

$$(w_1,0),\dots,(w_n,0),(0,\widehat{w}_1),\dots,(0,\widehat{w}_{\widehat{n}})$$

e, se $x\in F$ e $y\in\widehat{F}$ verificam

$$\begin{aligned}x&=a_1w_1+\cdots+a_nw_n,\\ y&=b_1\widehat{w}_1+\cdots+b_{\widehat{n}}\widehat{w}_{\widehat{n}},\end{aligned}$$

tem-se

$$(x,y)=a_1(w_1,0)+\cdots+a_n(w_n,0)+b_1(0,\widehat{w}_1)+\cdots+b_{\widehat{n}}(0,\widehat{w}_{\widehat{n}}),$$

o que mostra que, depois de reordenarmos convenientemente os elementos da base obtida para $F\times\widehat{F}$, $A\times\widehat{A}$ é constituído pelos pares (x,y) cujas últimas $p+\widehat{p}$ componentes são maiores ou iguais a 0. □

II.6.9 Os resultados II.6.6 e II.6.7 mostram que, *a menos de isomorfismo*, existe apenas um sector de índice p num espaço vectorial de dimensão n. Um exemplo de um tal sector é o conjunto $\mathbb{R}^n_p\subset\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n_p=\mathbb{R}^{n-p}\times\mathbb{R}^p_+=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid \underset{j>n-p}{\forall}\ x_j\ge 0\},$$

a que damos o nome de *sector canónico de índice* p de $\mathbb{R}^n$.
Repare-se que notamos $\mathbb{R}_+$ o intervalo $[0,+\infty[$, que é portanto o sector canónico de índice 1 de $\mathbb{R}$.

II.6.10 Sejam F um espaço vectorial de dimensão n e $A\subset F$ um sector de índice p. Tem-se então $\mathrm{t}_0(A)=A$ e $\mathrm{t}^+_0(A)=T_0(A)=F$.
Dem: Podemos considerar um isomorfismo $\xi\colon\mathbb{R}^n\to F$ tal que $\xi(\mathbb{R}^n_p)=A$ e então, uma vez que a restrição de ξ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n_p$ sobre A, concluímos que uma restrição de ξ vai ser um isomorfismo de $T_0(\mathbb{R}^n_p)$ sobre $T_0(A)$ que aplica $\mathrm{t}_0(\mathbb{R}^n_p)$ sobre $\mathrm{t}_0(A)$ e $\mathrm{t}^+_0(\mathbb{R}^n_p)$ sobre $\mathrm{t}^+_0(A)$. O resultado ficará assim demonstrado se verificarmos as igualdades $\mathrm{t}_0(\mathbb{R}^n_p)=\mathbb{R}^n_p$ e $\mathrm{t}^+_0(\mathbb{R}^n_p)=T_0(\mathbb{R}^n_p)=\mathbb{R}^n$. Ora, a primeira igualdade resulta de $\mathbb{R}^n_p$ ser um cone fechado e a segunda é uma consequência de 0 ser aderente ao interior de $\mathbb{R}^n_p$, igual a $\mathbb{R}^{n-p}\times]0,+\infty[^p$. □

II.6.11 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $x_0\in M\subset E$. Diz-se que o par (M,x_0) é uma *variedade com dimensão* n *e índice* p se existir um espaço vectorial F de dimensão n e um sector $A\subset F$ de índice p, tal que (M,x_0) seja localmente difeomorfo a $(A,0)$. Diz-se então também que M é, *no ponto* x_0, uma *variedade com dimensão* n *e índice* p. Dizemos que o conjunto M é uma *variedade*[43] se, para cada $x\in M$, o par (M,x) é uma

[43]Os autores que dão o nome de *variedade* ao que nós chamámos de *variedade sem bordo* usam o termo *variedade com bordo* para designar o que aqui estamos a chamar de *variedade*.

variedade com dimensão n_x e índice p_x (a dimensão e o índice podem, em geral, variar de ponto para ponto — ver no entanto o que dizemos adiante em II.6.17). No caso em que a variedade M tem a mesma dimensão n em todos os pontos, também dizemos que M é uma *variedade de dimensão* n.

II.6.12 **(Notas) a)** Tendo em conta o que dissemos na nota a) em II.4.9, vemos que um par (M, x_0) é uma variedade sem bordo com dimensão n, no sentido da definição II.4.6, se, e só se, ele é uma variedade com dimensão n e índice 0, no sentido da definição que acabamos de apresentar. Note-se também que, ao contrário do que sucedia no quadro das variedades sem bordo, o facto de, no caso em que A é um sector de índice p, um par do tipo (A, y_0) não ser, em geral, localmente difeomorfo ao par $(A, 0)$ não nos permite definir as variedades de dimensão n e índice p como sendo os pares localmente difeomorfos a algum (A, y_0), com A sector de índice p num espaço vectorial de dimensão n.
b) Como dissemos em II.6.6 e II.6.9, se A é um sector de índice p dum espaço vectorial F de dimensão n, então existe um isomorfismo $\xi\colon \mathbb{R}^n \to F$, que aplica o sector canónico de índice p $\mathbb{R}^n_p$ sobre A. Em particular, e uma vez que um isomorfismo é evidentemente um difeomorfismo, vemos que $(A, 0)$ é localmente difeomorfo (aliás, mesmo difeomorfo) a $(\mathbb{R}^n_p, 0)$. Concluímos daqui que, se (M, x_0) é uma variedade com dimensão n e índice p, então (M, x_0) é localmente difeomorfo a $(\mathbb{R}^n_p, 0)$.

II.6.13 Sejam $x_0 \in M \subset E$ tais que (M, x_0) seja uma variedade com dimensão n e índice p. Tem-se então que $\mathrm{t}^+_{x_0}(M) = T_{x_0}(M)$ é um espaço vectorial de dimensão n e $\mathrm{t}_{x_0}(M)$ é um sector de índice p de $T_{x_0}(M)$. Em particular, a dimensão e o índice de uma variedade (M, x_0) são números bem definidos.
Dem: Tendo em conta II.4.5 e II.6.10, vai existir um espaço vectorial F, de dimensão n, um sector $A \subset F$ de índice p e um isomorfismo ξ de $F = T_0(A)$ sobre $T_{x_0}(M)$, que aplica $A = \mathrm{t}_0(A)$ sobre $\mathrm{t}_{x_0}(M)$ e $F = \mathrm{t}^+_0(A)$ sobre $\mathrm{t}^+_{x_0}(M)$. O resultado é agora uma consequência de II.6.3. □

II.6.14 Sejam $x_0 \in M \subset E$ e $y_0 \in \widehat{M} \subset \widehat{E}$, tais que (M, x_0) seja uma variedade com dimensão n e índice p e $(\widehat{M}, y_0)$ seja uma variedade com dimensão $\widehat{n}$ e índice $\widehat{p}$. Tem-se então que $M \times \widehat{M}$ é, no ponto (x_0, y_0), uma variedade com dimensão $n + \widehat{n}$ e índice $p + \widehat{p}$ e

$$T_{(x_0,y_0)}(M \times \widehat{M}) = T_{x_0}(M) \times T_{y_0}(\widehat{M}),$$
$$\mathrm{t}_{(x_0,y_0)}(M \times \widehat{M}) = \mathrm{t}_{x_0}(M) \times \mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}).$$

Dem: Sejam F e $\widehat{F}$ espaços vectoriais de dimensões n e $\widehat{n}$, $A \subset F$ e $\widehat{A} \subset \widehat{F}$ sectores de índices p e $\widehat{p}$, $\varphi\colon U \to V$ um difeomorfismo local de $(A, 0)$ sobre (M, x_0) e $\psi\colon \widehat{U} \to \widehat{V}$ um difeomorfismo local de $(\widehat{A}, 0)$ sobre $(\widehat{M}, y_0)$. Tem-se então que a aplicação $\varphi \times \psi\colon U \times \widehat{U} \to V \times \widehat{V}$, definida por

$$\varphi \times \psi(x,y) = (\varphi(x), \psi(y)),$$

é um difeomorfismo local de $(A \times \widehat{A}, (0,0))$ sobre $(M \times \widehat{M}, (x_0, y_0))$, para o qual se tem

$$D(\varphi \times \psi)_{(0,0)} = D\varphi_0 \times D\psi_0.$$

Tendo em conta o facto de $A \times \widehat{A}$ ser um sector de índice $p + \widehat{p}$ do espaço vectorial $F \times \widehat{F}$ de dimensão $n + \widehat{n}$, concluímos que $(M \times \widehat{M}, (x_0, y_0))$ é uma variedade de dimensão $n + \widehat{n}$ e índice $p + \widehat{p}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{t}_{(x_0,y_0)}(M \times \widehat{M}) &= D(\varphi \times \psi)_{(0,0)}(\mathrm{t}_{(0,0)}(A \times \widehat{A})) = \\
&= D(\varphi \times \psi)_{(0,0)}(A \times \widehat{A}) = \\
&= (D\varphi_0 \times D\psi_0)(\mathrm{t}_0(A) \times \mathrm{t}_0(\widehat{A})) = \\
&= D\varphi_0(\mathrm{t}_0(A)) \times D\psi_0(\mathrm{t}_0(\widehat{A})) = \\
&= \mathrm{t}_0(M) \times \mathrm{t}_0(\widehat{M})
\end{aligned}$$

e a igualdade envolvendo os espaços vectoriais tangentes é válida mesmo para conjuntos arbitrários. □

II.6.15 Mais geralmente, seja, para cada $1 \le j \le N$, $x_{j0} \in M_j \subset E_j$, tal que (M_j, x_{j0}) seja uma variedade com dimensão n_j e índice p_j. Tem-se então que $M_1 \times \cdots \times M_N$ é, no ponto $(x_{10}, \ldots, x_{N0})$ uma variedade com dimensão $n_1 + \cdots + n_N$ e índice $p_1 + \cdots + p_N$ e

$$\begin{aligned}
T_{(x_{10},\ldots,x_{N0})}(M_1 \times \cdots \times M_N) &= T_{x_{10}}(M_1) \times \cdots \times T_{x_{N0}}(M_N), \\
\mathrm{t}_{(x_{10},\ldots,x_{N0})}(M_1 \times \cdots \times M_N) &= \mathrm{t}_{x_{10}}(M_1) \times \cdots \times \mathrm{t}_{x_{N0}}(M_N).
\end{aligned}$$

Dem: Trata-se de uma demonstração análoga à do resultado precedente, que é um caso particular deste, em que a única dificuldade são as notações mais pesadas. Alternativamente, podemos fazer uma demonstração por indução, a partir do resultado anterior. □

II.6.16 Seja $\mathbb{R}^n_p = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p_+$ o sector canónico de índice p de $\mathbb{R}^n$. Tem-se então que $\mathbb{R}^n_p$ é uma variedade de dimensão n em todos os pontos, o seu índice num ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ sendo igual ao número de índices j tais que $j > n - p$ e $a_j = 0$.

Dem: É claro que $\mathbb{R}^n_p$ é, no ponto 0, uma variedade com dimensão n e índice p, visto que $\mathbb{R}^n_p$ é um sector de índice p de $\mathbb{R}^n$. A questão é verificar o que sucede nos restantes pontos. Para isso, começamos por reparar que, por II.4.15, $\mathbb{R}$ é uma variedade com dimensão 1 e índice 0 em todos os pontos e $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ é uma variedade com dimensão 1 e índice 0 em todos os pontos distintos de 0 (trata-se de pontos interiores). Por outro lado, $\mathbb{R}_+$ é um sector de índice 1 de $\mathbb{R}$, sendo portanto, no ponto 0, uma variedade com dimensão 1 e índice 1. Podemos agora aplicar o resultado precedente para garantir que $\mathbb{R}^n_p = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p_+$ é uma variedade, tendo em cada ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ dimensão n (igual à soma das dimensões dos factores nos pontos a_j) e índice igual à soma dos índices de $\mathbb{R}$ nos pontos a_j com $j \leq n - p$ com os índices de $\mathbb{R}_+$ nos pontos a_j com $j > n - p$, isto é, igual ao número de índices $j > n - p$ tais que $a_j = 0$. □

II.6.17 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $x_0 \in M \subset E$ tais que (M, x_0) seja uma variedade com dimensão n e índice p. Tem-se então:
a) Existe um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, (M, x) seja uma variedade com dimensão n e índice menor ou igual a p.
b) Qualquer que seja a vizinhança V de x_0 em M e qualquer que seja $0 \leq j \leq p$, existe $x \in V$ tal que (M, x) seja uma variedade com dimensão n e índice j.
Em particular, se M é uma variedade conexa, então M tem a mesma dimensão em todos os pontos.
Dem: Seja $\varphi: U \to U'$ um difeomorfismo local de (M, x_0) sobre $(\mathbb{R}^n_p, 0)$. É então imediato que, para cada $x \in U$, φ é um difeomorfismo local de (M, x) sobre $(\mathbb{R}^n_p, \varphi(x))$, que, pelo resultado anterior, é uma variedade com dimensão n e índice menor ou igual a p, o que nos permite concluir que (M, x) é uma variedade com dimensão n e índice menor ou igual a p. Para demonstrar b), e uma vez que, para cada vizinhança V de x_0, int(V) é também, no ponto x_0, uma variedade com dimensão n e índice p, basta-nos provar que, qualquer que seja $0 \leq j \leq p$, existe $x \in M$ tal que (M, x) seja uma variedade com dimensão n e índice j. Ora, considerando, como acima, um difeomorfismo local $\varphi: U \to U'$ de (M, x_0) sobre $(\mathbb{R}^n_p, 0)$, esta conclusão é uma consequência de que, pelo resultado anterior, vão existir pontos na vizinhança aberta U' de 0 em $\mathbb{R}^n_p$ onde $\mathbb{R}^n_p$ é uma variedade com qualquer índice j entre 0 e p (tomar as últimas $p - j$ coordenadas estritamente positivas e suficientemente pequenas e todas as restantes iguais a 0). A última conclusão do enunciado resulta de que, tendo em conta a), para cada inteiro n o conjunto dos pontos de M onde a dimensão é n é aberto em M pelo que, uma vez que M é a união destes abertos que são disjuntos dois a dois, apenas um deles pode ser não vazio. □

II.6.18 Tendo em conta a alínea b) do resultado anterior, vemos que as únicas variedades em que o índice é o mesmo em todos os pontos são aquelas em que esse índice é 0, isto é, as variedades sem bordo. Costuma-se também dar o nome de *variedades sem cantos* àquelas em que o índice em cada ponto é sempre 0 ou 1. Nesta ordem de ideias, chamam-se *cantos* duma variedade os pontos desta em que o índice é maior ou igual a 2.

II.6.19 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ um conjunto. Para cada $p \geq 0$, vamos notar $\partial_p(M)$ o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que (M, x) seja uma variedade com índice p, conjunto a que daremos o nome de *bordo de índice p* de M.

É claro que, no caso em que M é uma variedade de dimensão n, tem-se $\partial_p(M) = \emptyset$, para cada $p > n$, e M é a união disjunta dos $\partial_p(M)$.

II.6.20 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ um conjunto. Se $x_0 \in \partial_p(M)$ é tal que a variedade (M, x_0) tenha dimensão n, então $(\partial_p(M), x_0)$ é uma variedade de dimensão $n - p$ e índice 0 e

$$\mathrm{t}_{x_0}(\partial_p(M)) = \mathrm{t}^+_{x_0}(\partial_p(M)) = T_{x_0}(\partial_p(M)) = \mathrm{t}_{x_0}(M) \cap (-\mathrm{t}_{x_0}(M)).$$

Em particular, cada $\partial_p(M)$ é uma variedade sem bordo.
Dem: Seja $x_0 \in \partial_p(M)$, onde M tenha dimensão n. Seja $\varphi: U \to V$ um difeomorfismo local de (M, x_0) sobre $(\mathbb{R}^n_p, 0)$. Para cada $x \in U$, φ é também um difeomorfismo local de (M, x) sobre $(\mathbb{R}^n_p, \varphi(x))$, pelo que φ aplica $U \cap \partial_p(M)$ sobre $V \cap \partial_p(\mathbb{R}^n_p)$ e obtemos, por restrição de φ, um difeomorfismo local de $(\partial_p(M), x_0)$ sobre $(\partial_p(\mathbb{R}^n_p), 0)$. Mas, por II.6.16, tem-se $\partial_p(\mathbb{R}^n_p) = \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}^p$, que é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$, com dimensão $n - p$, o que nos permite concluir que $(\partial_p(M), x_0)$ é uma variedade de dimensão $n - p$ e índice 0, em particular $\mathrm{t}_{x_0}(\partial_p(M)) = \mathrm{t}^+_{x_0}(\partial_p(M)) = T_{x_0}(\partial_p(M))$ é um espaço vectorial de dimensão $n - p$. Por outro lado, uma vez que $\partial_p(M) \subset M$, temos trivialmente $\mathrm{t}_{x_0}(\partial_p(M)) \subset \mathrm{t}_{x_0}(M)$, donde, uma vez que $\mathrm{t}_{x_0}(\partial_p(M))$ é um subespaço vectorial de $T_{x_0}(M)$, também

$$\mathrm{t}_{x_0}(\partial_p(M)) \subset \mathrm{t}_{x_0}(M) \cap (-\mathrm{t}_{x_0}(M)).$$

Uma vez que, tendo em conta II.6.13 e II.6.3, o segundo membro é também um subespaço vectorial de dimensão $n - p$, concluímos finalmente a igualdade de ambos os membros da inclusão anterior. □

II.6.21 **(Algumas propriedades topológicas das variedades)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade. Tem-se então:
a) M é um espaço topológico *localmente compacto*, isto é, cada ponto $x \in M$ admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas.
b) M é um espaço topológico *localmente conexo*, isto é, cada ponto $x \in M$ admite um sistema fundamental de vizinhanças conexas.[44] Em particular as componentes conexas de M são conjuntos abertos em M, e portanto também variedades, com a mesma dimensão e índice que M em cada ponto.
Dem: Se atendermos a que um difeomorfismo é também um homeomorfismo, para provar a) e b), basta-nos provar que 0 admite em $\mathbb{R}^n_p$ um sistema fundamental de vizinhanças compactas e conexas. Ora, isso acontece ao sistema fundamental de vizinhanças constituído pelos conjuntos $[-r, r]^{n-p} \times [0, r]^p$, com $r > 0$. □

II.6.22 **(As variedades são localmente fechadas)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade. Existe então um aberto U de E, com $M \subset U$, tal que M seja fechado em U.

---

[44] Aliás, é mesmo um espaço localmente conexo por arcos.

Dem: De facto, o que vamos demonstrar é que todo o subconjunto localmente compacto M de E verifica a propriedade do enunciado. Para cada $x \in M$, seja V_x uma vizinhança compacta de x em M. Vem que $\mathrm{int}_M(V_x)$ é um aberto de M, contendo x, pelo que existe um aberto U_x de E, com $x \in U_x$, tal que $\mathrm{int}_M(V_x) = M \cap U_x$. Seja U a união dos abertos U_x, que é um aberto de E, contendo M. Vamos ver que M é fechado em U, para o que tomamos um ponto arbitrário $y \in U$, que seja aderente a M. Seja $x \in M$ tal que $y \in U_x$. Se W é uma vizinhança arbitrária de y, vem que $W \cap U_x$ é também uma vizinhança de y, pelo que, por y ser aderente a M, tem-se $W \cap U_x \cap M \neq \emptyset$, donde também $W \cap V_x \neq \emptyset$; ficou portanto provado que y é aderente a V_x, pelo que, por V_x ser compacto, logo fechado em E, segue-se que $y \in V_x$, em particular $y \in M$. □

É bem conhecido o resultado de Topologia que nos diz que todo o espaço topológico conexo, que seja localmente conexo por arcos, isto é, em que cada ponto admita um sistema fundamental de vizinhanças conexas por arcos, é também um espaço topológico conexo por arcos. Uma vez que o raciocínio da demonstração de II.6.21 mostra também que toda a variedade é localmente conexa por arcos, podemos concluir que toda a variedade conexa é também conexa por arcos. De facto, torna-se muitas vezes útil dispôr de um resultado mais forte em que se garante que dois pontos podem ser unidos não só por um arco contínuo, mas também por um arco suave. A demonstração, que apresentamos em seguida, é um pouco mais delicada, na medida que temos que ser cuidadosos com o modo como unimos dois arcos, para evitar o perigo dos cantos, que não existia ao nível das aplicações contínuas.

II.6.23 Seja M uma variedade conexa. Dados $x, y \in M$, existe uma aplicação suave $f\colon [0,1] \to M$, tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Mais precisamente, existe mesmo uma aplicação suave $g\colon \mathbb{R} \to M$ e $\varepsilon > 0$, tal que $g(t) = x$, para cada $t \leq \varepsilon$, e $g(t) = y$, para cada $t \geq 1 - \varepsilon$.

Dem: Basta evidentemente mostrar a existência de g nas condições do enunciado, visto que se pode então tomar para f a restrição de g. Considere-se em M a relação $\sim$, definida pela condição de se ter $x \sim y$ se, e só se, existe uma aplicação suave $g\colon \mathbb{R} \to M$ e $\varepsilon > 0$, tal que $g(t) = x$, para cada $t \leq \varepsilon$, e $g(t) = y$, para cada $t \geq 1 - \varepsilon$. A primeira propriedade fundamental a verificar é que $\sim$ é uma relação de equivalência. O facto de se ter $x \sim x$ é claro, se tomarmos para g a aplicação constante de valor x, e, supondo que $x \sim y$, com a correspondente aplicação suave $g\colon \mathbb{R} \to M$, o facto de se ter $y \sim x$ resulta de que se pode considerar a aplicação suave $h\colon \mathbb{R} \to M$, definida por $h(t) = g(1-t)$. Quanto à transitividade, se $x \sim y$ e $y \sim z$, podemos considerar as aplicações suaves $g, \widehat{g}\colon \mathbb{R} \to M$ tais que, para um certo $\varepsilon > 0$ se tenha $g(t) = x$, para $t \leq \varepsilon$, $g(t) = y$, para $t \geq 1 - \varepsilon$, $\widehat{g}(t) = y$, para $t \leq \varepsilon$, e $\widehat{g}(t) = z$, para $t \geq 1 - \varepsilon$; e podemos então considerar a aplicação $h\colon \mathbb{R} \to M$, definida por

$$h(t) = \begin{cases} g(2t) & \text{, se } t \le \frac{1}{2} \\ \widehat{g}(2t-1) & \text{, se } t > \frac{1}{2} \end{cases};$$

trata-se de uma aplicação suave por isso acontecer à respectiva restrição a cada um dos abertos $]-\infty, \frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{2}, +\infty[$ e $]\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}[$, com união $\mathbb{R}$, a última por ser constantemente igual a y; uma vez que $h(t) = x$, se $t \le \frac{\varepsilon}{2}$, e $h(t) = z$, se $t \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, concluímos que $x \sim z$, como queríamos. Se verificarmos que cada uma das classes de equivalência, para esta relação, é um conjunto aberto, teremos o problema resolvido, visto que, M sendo uma união disjunta destes conjuntos abertos, o facto de M ser conexo implica que apenas um deles pode ser não vazio, por outras palavras, tem-se $x \sim y$, quaisquer que sejam x e y. Seja portanto x_0 pertencente a uma das classes de equivalência. Seja $\varphi: U \to V$ um difeomorfismo local de (M, x_0) sobre $(\mathbb{R}^n_p, 0)$. Se necessário substituindo φ por uma restrição, podemos já supor que V é convexo (por exemplo, que V é da forma $]-r, r[^{n-p} \times [0, r[^p$). Aplicando o teorema da partição da unidade à cobertura aberta de $\mathbb{R}$ constituída pelos intervalos $]-\infty, \frac{2}{3}[$ e $]\frac{1}{3}, +\infty[$, podemos considerar uma aplicação suave $\alpha: \mathbb{R} \to [0,1]$, tal que $\alpha(t) = 0$, para cada $t \le \frac{1}{3}$, e $\alpha(t) = 1$, para cada $t \ge \frac{2}{3}$ (a função da partição da unidade correspondente ao segundo aberto). Podemos agora, para cada $x \in U$, considerar a aplicação suave $g: \mathbb{R} \to M$, definida por

$$g(t) = \varphi^{-1}(\alpha(t)\varphi(x)),$$

para a qual se tem $g(t) = x_0$, se $t \le \frac{1}{3}$, e $g(t) = x$, se $t \ge \frac{2}{3}$, o que mostra que $x \sim x_0$. Ficou portanto provado que U está contido na classe de equivalência em questão, o que mostra que esta é aberta. □

II.6.24 **(Corolário)** Sejam $M \subset E$ uma variedade conexa, F um espaço vectorial de dimensão finita e $f: M \to F$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $x \in M$, $Df_x = 0 \in L(T_x(M); F)$. Tem-se então que f é uma aplicação constante.

Dem:[45] Dados $x, y \in M$, consideremos uma aplicação suave $g: \mathbb{R} \to M$, tal que $g(0) = x$ e $g(1) = y$. Podemos então considerar a aplicação $h: \mathbb{R} \to F$, de classe C^1, definida por $h(t) = f(g(t))$, para a qual se tem $h'(t) = Df_{g(t)}(g'(t)) = 0$, pelo que h é constante, em particular

$$f(x) = h(0) = h(1) = f(y).$$ □

Embora o teorema da função inversa seja falso no quadro das variedades com bordo, algumas das aplicações deste teorema, que foram estudadas na

[45]Este enunciado pode ser também demonstrado facilmente sem recorrer ao resultado precedente, mas parece-nos instrutivo apresentar esta demonstração.

secção precedente no quadro das variedades sem bordo, são generalizáveis para as variedades com bordo. O que se passa é que é por vezes possível tirar conclusões sobre as variedades com bordo, aplicando o teorema da função inversa a variedades sem bordo convenientes. É isso que vamos fazer nos próximos resultados.

II.6.25 Sejam (M,x_0) uma variedade com dimensão n e índice p, B uma parte dum espaço vectorial $\widehat{E}$ de dimensão finita, e $f\colon M\to B$ uma imersão no ponto x_0. Existe então um aberto U de M, com $x_0\in U$, tal que a restrição $f_{/U}$ seja um difeomorfismo de U sobre $f(U)$. Em particular f é uma imersão em todos os pontos de U (generalização de II.4.23).

Dem: Compondo f com um difeomorfismo local de um par $(A,0)$ sobre (M,x_0), onde A é um sector, ficamos reduzidos a provar o resultado no caso particular em que M é um aberto de um sector A de índice p de um espaço vectorial F de dimensão n. Uma vez que M é um aberto de A, vai existir um aberto V de F, tal que $M=A\cap V$. O facto de A ser fechado em F implica que M é fechado em V pelo que, tendo em conta II.3.12, podemos considerar uma aplicação suave $\widehat{f}\colon V\to\widehat{E}$ prolongando f. A aplicação linear Df_0 vai ser uma restrição de $D\widehat{f}_0$, pelo que, uma vez que ambas têm o mesmo domínio F, elas vão coincidir. Concluímos assim que $D\widehat{f}_0$ é uma aplicação linear injectiva pelo que, uma vez que o domínio de $\widehat{f}$ é um aberto de F, em particular uma variedade sem bordo, podemos aplicar a versão particular já demonstrada em II.4.23 para garantir a existência de um aberto V' de F, com $0\in V'\subset V$, tal que a restrição $\widehat{f}_{/V'}$ seja um difeomorfismo de V' sobre $\widehat{f}(V')$. O conjunto $U=A\cap V'$ é então um aberto de A, com $0\in U\subset M$, tal que a restrição de $\widehat{f}$ a U, igual à restrição a U de f, é um difeomorfismo de U sobre o conjunto $\widehat{f}(U)=f(U)$ de B. O facto de, para cada $x\in U$, a aplicação linear $Df_x\colon T_x(M)\to T_{f(x)}(\widehat{M})$ ser ainda injectiva resulta de que se trata de um isomorfismo de $T_x(U)=T_x(M)$ sobre $T_{f(x)}(f(U))$. □

II.6.26 Sejam $M\subset E$ uma variedade, eventualmente com bordo, e $f\colon M\to\widehat{E}$ uma imersão. Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita, $C\subset G$ um subconjunto arbitrário e $g\colon C\to M$ uma aplicação *contínua* tal que $f\circ g\colon C\to\widehat{E}$ seja C^p. Tem-se então que a aplicação $g\colon C\to M$ é C^p.

Dem: Repetir a demonstração apresentada no quadro das variedades sem bordo. □

II.6.27 **(Corolário)** Sejam $M\subset E$ uma variedade, eventualmente com bordo, e $f\colon M\to\widehat{E}$ uma imersão, que seja um homeomorfismo de M sobre $f(M)$. Tem-se então que f é um difeomorfismo de M sobre $f(M)$, em particular $f(M)$ é também uma variedade.

Dem: Repetir a demonstração apresentada no quadro das variedades sem bordo. □

II.6.28 **(Fotografia de uma subvariedade)** Seja $(\widehat{M}, x_0)$ uma variedade *sem bordo*, com dimensão n, e seja $M \subset \widehat{M}$, tal que $x_0 \in M$ e que (M, x_0) seja uma variedade, com dimensão m e índice p. Existem então espaços vectoriais F e G, com dimensões m e $n - m$, um sector A de índice p de F, conjuntos abertos $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $x_0 \in \widehat{U}$, V de F, com $0 \in V$, e W de G, com $0 \in W$, e um difeomorfismo $\psi: V \times W \to \widehat{U}$, tal que $\psi(0,0) = x_0$ e que

$$\psi^{-1}(M \cap \widehat{U}) = \{(y,z) \in V \times W \mid y \in A \text{ e } z = 0\}.$$

Dem:[46] Para uma melhor sistematização, vamos dividir a demonstração em várias alíneas.
a) Usando um difeomorfismo local de $(\widehat{M}, x_0)$ sobre $(\widehat{F}, 0)$, em que $\widehat{F}$ é um espaço vectorial de dimensão n, verificamos facilmente que basta demonstrar o resultado no caso particular em que $x_0 = 0$ e $\widehat{M}$ é um aberto dum espaço vectorial $\widehat{F}$ de dimensão n. É esse caso particular que vamos demonstrar em seguida.
b) Sejam F um espaço vectorial de dimensão m, $A \subset F$ um sector de índice p e $\varphi: \tilde{V}'' \to U'$ um difeomorfismo local de $(A, 0)$ sobre $(M, 0)$.
c) Uma vez que $\tilde{V}''$ é aberto em A, podemos escrever $\tilde{V}'' = A \cap V''$, com V'' aberto em F. O facto de A ser fechado em F implica que $\tilde{V}''$ é fechado em V'' pelo que, por II.3.12, podemos garantir a existência de uma aplicação suave $\overline{\varphi}: V'' \to \widehat{F}$, prolongando φ.
d) $D\varphi_0$ é um isomorfismo de $F = T_0(A)$ sobre $T_0(M)$, sendo portanto uma aplicação linear injectiva de F em $\widehat{F}$. Uma vez que $D\overline{\varphi}_0$ é um prolongamento de $D\varphi_0$, com o mesmo domínio F, segue-se que $D\overline{\varphi}_0 = D\varphi_0$ e portanto $D\overline{\varphi}_0$ é uma aplicação linear injectiva de F em $\widehat{F}$.
e) Pelo teorema da derivada injectiva, podemos considerar um espaço vectorial G de dimensão $n - m$, um aberto V' de F, com $0 \in V' \subset V''$, um aberto W' de G, com $0 \in W'$, um aberto $\widehat{U}'$ de $\widehat{F}$, com $0 \in \widehat{U}'$, e um difeomorfismo $\psi': V' \times W' \to \widehat{U}'$, tal que, para cada $y \in V'$, $\psi'(y,0) = \overline{\varphi}(y)$, em particular, $\psi'(0,0) = 0$.
f) Uma vez que $A \cap V'$ é um aberto de A contido em $A \cap V'' = \tilde{V}''$ e que $\varphi: \tilde{V}'' \to U'$ é um homeomorfismo, concluímos que o conjunto $\overline{\varphi}(A \cap V') = \varphi(A \cap V')$ é um aberto de U', portanto também de M, contendo $0 = \varphi(0)$, pelo que vai existir um aberto $\tilde{U}'$ de $\widehat{M}$, com $0 \in \tilde{U}'$, tal que

$$\overline{\varphi}(A \cap V') = M \cap \tilde{U}'.$$

[46] Reparar que este resultado é uma generalização de II.4.27, mas a sua demonstração, embora seguindo as mesmas ideias que a daquele resultado, é tecnicamente um pouco mais complicada.

g) Pela continuidade de ψ' em $(0,0)$, existe um aberto V de F, com $0 \in V \subset V'$, e um aberto W de G, com $0 \in W \subset W'$, de modo que, sendo $\widehat{U} = \psi'(V \times W)$, que é um aberto de $\widehat{F}$, contendo $0 = \psi'(0,0)$, se tenha $\widehat{U} \subset \tilde{U}'$, em particular, $\widehat{U} \subset \widehat{M}$. Vamos ver que a restrição $\psi: V \times W \to \widehat{U}$ de ψ' verifica as condições do enunciado.
h) Se $(y,z) \in V \times W$ verifica $y \in A$ e $z = 0$, vem

$$\psi(y,z) = \psi'(y,0) = \overline{\varphi}(y) = \varphi(y) \in M \cap \widehat{U},$$

e portanto $(y,z) \in \psi^{-1}(M \cap \widehat{U})$.
i) Suponhamos agora que $(y,z) \in V \times W$ pertence a $\psi^{-1}(M \cap \widehat{U})$. Tem-se portanto

$$\psi(y,z) \in M \cap \widehat{U} \subset M \cap \tilde{U}' = \overline{\varphi}(A \cap V'),$$

pelo que existe $y' \in A \cap V'$ tal que

$$\psi'(y,z) = \psi(y,z) = \overline{\varphi}(y') = \psi'(y',0),$$

o que, tendo em conta o facto de ψ' ser injectiva, implica que $y = y'$ e $z = 0$, em particular, $y \in A$. □

II.6.29 **(Construção de variedades como imagens recíprocas)** Sejam (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ variedades *sem bordo*, com dimensões m e n, respectivamente, e $f: M \to \widehat{M}$ uma submersão no ponto x_0, tal que $f(x_0) = y_0$. Seja $y_0 \in \widehat{M}' \subset \widehat{M}$, tal que $(\widehat{M}', y_0)$ seja uma variedade com dimensão n' e índice p. Sendo então

$$M' = f^{-1}(\widehat{M}') = \{x \in M \mid f(x) \in \widehat{M}'\},$$

tem-se que (M', x_0) é uma variedade com dimensão $m - (n - n')$ e índice p e

$$T_{x_0}(M') = \{u \in T_{x_0}(M) \mid Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')\},$$
$$\mathrm{t}_{x_0}(M') = \{u \in T_{x_0}(M) \mid Df_{x_0}(u) \in \mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}')\}.$$

Dem: Basta repetir a demonstração de II.4.32, resultado do qual este é uma generalização, reparando que a afirmação sobre o cone tangente se demonstra do mesmo modo que aquela sobre os espaços vectoriais tangentes. □

II.6.30 **(Exemplo)** Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$, $x_0 \in E$, $r > 0$ e $\overline{B}_r(x_0) \subset E$ a bola fechada de centro x_0 e raio r de E,

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leq r\} = \{x \in E \mid r^2 - \langle x - x_0, x - x_0\rangle \geq 0\}.$$

Consideremos a aplicação suave $f: E \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = r^2 - \langle x - x_0, x - x_0\rangle,$$

e reparemos que $Df_x(u) = -2\langle x - x_0, u\rangle$, pelo que a aplicação linear $Df_x\colon E \to \mathbb{R}$ é sobrejectiva, excepto para $x = x_0$. Uma vez que E e $\mathbb{R}$ são variedades sem bordo com dimensões n e 1, respectivamente, e que se tem $\overline{B}_r(x_0) = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, onde $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ é uma variedade com dimensão 1, tendo índice 1 no ponto 0 e índice 0 nos restantes pontos, concluímos que $\overline{B}_r(x_0)$ é uma variedade, com a possível excepção do ponto x_0, tendo dimensão n em todos os pontos, índice 0 nos pontos da bola aberta $B_r(x_0) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| < r\}$ e índice 1 nos pontos da esfera $S_r(x_0) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| = r\}$. O resultado precedente não nos permite tirar directamente nenhuma conclusão sobre o que se passa no ponto $x_0 \in \overline{B}_r(x_0)$, mas vemos que, de facto, ele não é uma excepção, visto que, sendo um ponto interior a $\overline{B}_r(x_0)$, este conjunto é naquele ponto uma variedade de dimensão n e índice 0 (aliás, este mesmo raciocínio serviria também para mostrar que $\overline{B}_r(x_0)$ é uma variedade de dimensão n e índice 0 em qualquer ponto da bola aberta $B_r(x_0)$).
Em conclusão $\overline{B}_r(x_0)$ é uma variedade sem cantos com dimensão n, tendo-se $\partial_0(\overline{B}_r(x_0)) = B_r(x_0)$ e $\partial_1(\overline{B}_r(x_0)) = S_r(x_0)$. É claro que, para cada $x \in \overline{B}_r(x_0)$, $T_x(\overline{B}_r(x_0)) = E$ (sendo um espaço vectorial de dimensão n não pode ser outra coisa…) e, quanto ao cone tangente, tem-se $\mathrm{t}_x(\overline{B}_r(x_0)) = E$, para cada $x \in B_r(x_0)$ (pontos onde o índice é 0), e, aplicando mais uma vez o resultado precedente, vemos que, para cada $x \in S_r(x_0)$,

$$\mathrm{t}_x(\overline{B}_r(x_0)) = \{u \in E \mid Df_x(u) \geq 0\} = \{u \in E \mid \langle x - x_0, u\rangle \leq 0\}$$

(o conjunto dos vectores que fazem um ângulo recto ou obtuso com o *raio* $x - x_0$).

II.6.31 Um caso particular de II.6.29, que se encontra frequentemente na prática, é aquele em que $\widehat{M} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $y_0 = (0, 0)$ e $\widehat{M}' = \{0\}^n \times \mathbb{R}^p_+$, que é, no ponto $(0, 0)$, uma variedade com dimensão p e índice p. Sendo (M, x_0) uma variedade sem bordo com dimensão m e $f\colon M \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave, podemos escrever

$$f(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x), h_1(x), \ldots, h_p(x))$$

e a condição de $Df_{x_0}\colon T_{x_0}(M) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ser uma aplicação linear sobrejectiva é equivalente, tal como vimos no lema de Álgebra Linear II.4.35, ao facto de as derivadas $Dg_{i\,x_0}$ e $Dh_{j\,x_0}$, das aplicações suaves componentes $g_i, h_j\colon M \to \mathbb{R}$, serem linearmente independentes em $L(T_{x_0}(M); \mathbb{R})$. Se essa condição se verificar e se se tiver $f(x_0) = (0, 0)$, ou seja $g_i(x_0) = 0 = h_j(x_0)$, podemos concluir que

$$M' = \{x \in M \mid \underset{i}{\forall}\, g_i(x) = 0, \underset{j}{\forall}\, h_j(x) \geq 0\}$$

é no ponto x_0 uma variedade com dimensão $m - n$ e índice p e que

$$T_{x_0}(M') = \{u \in T_{x_0}(M) \mid \underset{i}{\forall} Dg_{i_{x_0}}(u) = 0\},$$
$$\mathrm{t}_{x_0}(M') = \{u \in T_{x_0}(M) \mid \underset{i}{\forall} Dg_{i_{x_0}}(u) = 0, \underset{j}{\forall} Dh_{j_{x_0}}(u) \geq 0\}.$$

Repare-se que M' pode ser olhado como o conjunto dos elementos de M que verificam um sistema de n equações e p inequações e que o número de equações é igual à codimensão de M' em x_0 e o número de inequações é igual ao respectivo índice.

II.6.32 Vamos olhar de novo, com um pouco mais de atenção, para a situação que acabamos de descrever.
Suponhamos que temos uma variedade sem bordo M, com dimensão m, e $n+p$ aplicações suaves $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_p \colon M \to \mathbb{R}$ e que consideramos o subconjunto M' de M, definido por n equações e p inequações,

$$M' = \{x \in M \mid \underset{i}{\forall} g_i(x) = 0, \underset{j}{\forall} h_j(x) \geq 0\}.$$

As considerações anteriores apenas nos permitem estudar o que se passa com M' nos seus elementos x_0, para os quais se tenha $h_j(x_0) = 0$, para cada j, isto é, para os quais todas as inequações sejam realizadas como igualdades, supondo evidentemente que nesses elementos x_0 se verifica a hipótese fundamental de serem linearmente independentes as aplicações lineares $Dg_{i_{x_0}}$ e $Dh_{j_{x_0}}$.
Poderíamos assim ficar com a impressão que os métodos ao nosso dispôr não nos permitiam estudar o que se passa com M' nos pontos x_0 para os quais, para alguns valores de j, $h_j(x_0) > 0$. Há, no entanto, uma maneira muito simples de tornear esta dificuldade: Suponhamos, com efeito, que J é o conjunto dos índices $j \in \{1, \ldots, p\}$ tais que $h_j(x_0) > 0$. Podemos então considerar um novo conjunto M'' definido por todas as equações mas apenas pelas inequações correspondentes aos restantes índices j,

$$M'' = \{x \in M \mid \underset{i}{\forall} g_i(x) = 0, \underset{j \notin J}{\forall} h_j(x) \geq 0\},$$

conjunto que já pode ser estudado no ponto x_0 pelos métodos anteriores. Uma vez que M' e M'' coincidem na vizinhança de x_0, visto que ambos têm a mesma intersecção com o aberto de M

$$U = \{x \in M \mid \underset{j \in J}{\forall} h_j(x) > 0\}$$

(e portanto com um aberto do espaço vectorial ambiente que intersectado com M seja igual a U), as conclusões sobre o estudo de M'' em x_0 estendem-se imediatamente ao de M' nesse ponto.

Tal como acontecia na secção precedente, no quadro das variedades sem bordo, também aqui se pode enunciar uma versão mais forte de II.6.29, em que a hipótese de a aplicação linear $Df_{x_0} \colon T_{x_0}(M) \to T_{y_0}(\widehat{M})$ ser sobrejectiva é substituída por uma hipótese, em geral mais fraca, a condição de transversalidade. Começamos por estabelecer um lema, que vai jogar o papel paralelo ao de II.4.36.

II.6.33 **(Lema)** Seja $(\widehat{M}, y_0)$ uma variedade sem bordo com dimensão n e seja $y_0 \in \widehat{M}' \subset \widehat{M}$ tal que $(\widehat{M}', y_0)$ seja uma variedade com dimensão n' e índice p. Existe então um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, e uma submersão $g: \widehat{U} \to \mathbb{R}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p$, tal que $g(y_0) = (0, 0)$ e se tenha

$$\widehat{M}' \cap \widehat{U} = \{y \in \widehat{U} \mid g(y) \in \{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p_+\}.$$

Por outras palavras, toda a variedade pode ser definida localmente por um sistema de equações e de inequações, verificando a hipótese de independência referida em II.6.32.

Dem: Este lema vai ser uma consequência do resultado sobre fotografia de uma subvariedade referido em II.6.31. Esse resultado permite-nos considerar espaços vectoriais F e G, com dimensões n' e $n - n'$, um sector A de índice p de F, conjuntos abertos $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, V de F, com $0 \in V$, e W de G, com $0 \in W$, e um difeomorfismo $\psi: V \times W \to \widehat{U}$, tal que $\psi(0, 0) = y_0$ e que

$$\psi^{-1}(\widehat{M}' \cap \widehat{U}) = \{(y', z) \in V \times W \mid y' \in A, z = 0\}.$$

Considerando um isomorfismo de $\mathbb{R}^{n'}$ sobre F, que aplique o sector canónico $\mathbb{R}^{n'}_p$ sobre A, e um isomorfismo de $\mathbb{R}^{n-n'}$ sobre G, vemos que, se necessário compondo ψ com a restrição do produto cartesiano destes isomorfismos, pode-se já supor que $F = \mathbb{R}^{n'}$, $A = \mathbb{R}^{n'}_p = \mathbb{R}^{n'-p} \times \mathbb{R}^p_+$ e $G = \mathbb{R}^{n-n'}$. Tomamos agora para $g: \widehat{U} \to \mathbb{R}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p$ a composta de $\psi^{-1}: \widehat{U} \to \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n-n'}$ com a aplicação linear sobrejectiva de $\mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n-n'}$ sobre $\mathbb{R}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p$, definida por

$$(a_1, \ldots, a_{n'}, b_1, \ldots, b_{n-n'}) \mapsto (b_1, \ldots, b_{n-n'}, a_{n'-p+1}, \ldots, a_{n'}). \qquad \square$$

II.6.34 **(Segunda versão da construção de variedades como imagens recíprocas)** Sejam (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ variedades *sem bordo*, com dimensões m e n, respectivamente, e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave tal que $f(x_0) = y_0$. Seja $y_0 \in \widehat{M}' \subset \widehat{M}$ tal que $(\widehat{M}', y_0)$ seja uma variedade com dimensão n' e índice p, e suponhamos verificada a seguinte *condição de transversalidade*[47]:

$$Df_{x_0}(T_{x_0}(M)) + T_{y_0}(\partial_p(\widehat{M}')) = T_{y_0}(\widehat{M}).$$

[47]É claro que esta condição se encontra automaticamente verificada no caso em que a aplicação linear $Df_{x_0}: T_{x_0}(M) \to T_{y_0}(\widehat{M})$ é sobrejectiva. No caso em que $(\widehat{M}', y_0)$ não tem bordo, reencontramos a condição em II.4.37.

Sendo então

$$M' = f^{-1}(\widehat{M}') = \{x \in M \mid f(x) \in \widehat{M}'\},$$

tem-se que (M', x_0) é uma variedade com dimensão $m - (n - n')$ e índice p e

$$T_{x_0}(M') = \{u \in T_{x_0}(M) \mid Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')\},$$
$$\mathrm{t}_{x_0}(M') = \{u \in T_{x_0}(M) \mid Df_{x_0}(u) \in \mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}')\}.$$

Dem: Tendo em conta o lema precedente, podemos considerar um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, e uma submersão $g \colon \widehat{U} \to \mathbb{R}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p$, com $g(y_0) = (0, 0)$, de modo que, para cada $y \in \widehat{U}$, se tenha $y \in \widehat{M}'$ se, e só se, $g(y) \in \{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p_+$. Resulta então de II.6.29 que se tem

$$T_{y_0}(\widehat{M}') = \{v \in T_{y_0}(\widehat{M}) \mid Dg_{y_0}(v) \in \{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p\},$$
$$\mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}') = \{v \in T_{y_0}(\widehat{M}) \mid Dg_{y_0}(v) \in \{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p_+\},$$

e portanto, tendo em conta II.6.20,

$$T_{y_0}(\partial_p(\widehat{M}')) = \mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}') \cap (-\mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}')) = \{v \in T_{y_0}(\widehat{M}) \mid Dg_{y_0}(v) = 0\}.$$

Pela continuidade de f, podemos considerar um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que $f(U) \subset \widehat{U}$. Seja $\widehat{f} = g \circ f_{/U}$, que é uma aplicação suave de U em $\mathbb{R}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p$, verificando $\widehat{f}(x_0) = (0, 0)$, e reparemos que, para cada $x \in U$, tem-se $x \in M'$ se, e só se, $\widehat{f}(x) \in \{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p_+$, por outras palavras,

$$M' \cap U = \widehat{f}^{-1}(\{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p_+) = \{x \in U \mid \widehat{f}(x) \in \{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p_+\}.$$

Vamos agora verificar que a condição de transversalidade implica que a aplicação linear $D\widehat{f}_{x_0} \colon T_{x_0}(M) \to \mathbb{R}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p$ é sobrejectiva. Ora, dado $w \in \mathbb{R}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p$ arbitrário, podemos escolher $v' \in T_{y_0}(\widehat{M})$ tal que $Dg_{y_0}(v') = w$ e a condição de transversalidade implica a existência de $u \in T_{x_0}(M)$ e de $v'' \in T_{y_0}(\partial_p(\widehat{M}'))$ tais que $v' = Df_{x_0}(u) + v''$, tendo-se então $Dg_{y_0}(v'') = 0$, pelo que

$$w = Dg_{y_0}(v') = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(u) + Dg_{y_0}(v'') = D\widehat{f}_{x_0}(u).$$

Podemos agora aplicar II.6.29, para garantir que $M' \cap U$, e portanto M', é, no ponto x_0, uma variedade com dimensão $m - (n - n')$ e índice p, que $T_{x_0}(M')$ é o conjunto dos $u \in T_{x_0}(M)$ tais que

$$Dg_{y_0}(Df_{x_0}(u)) = D\widehat{f}_{x_0}(u) \in \{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p,$$

isto é, tais que $Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')$, e que $\mathrm{t}_{x_0}(M')$ é o conjunto dos $u \in T_{x_0}(M)$ tais que

$$Dg_{y_0}(Df_{x_0}(u)) = D\widehat{f}_{x_0}(u) \in \{0\}^{n-n'} \times \mathbb{R}^p_+,$$

isto é, tais que $Df_{x_0}(u) \in \mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}')$. □

II.6.35 **(Versão mais geral da construção de variedades como imagens recíprocas)** Sejam (M, x_0) uma variedade de dimensão m e índice p, $(\widehat{M}, y_0)$ uma variedade *sem bordo* com dimensão n e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave tal que $f(x_0) = y_0$. Seja $y_0 \in \widehat{M}' \subset \widehat{M}$ tal que $(\widehat{M}', y_0)$ seja uma variedade com dimensão n' e índice p' e suponhamos que

$$Df_{x_0}(T_{x_0}(\partial_p(M))) + T_{y_0}(\partial_{p'}(\widehat{M}')) = T_{y_0}(\widehat{M})$$

(*condição de transversalidade*[48]). Sendo então

$$M' = f^{-1}(\widehat{M}') = \{x \in M \mid f(x) \in \widehat{M}'\},$$

(M', x_0) é uma variedade de dimensão $m - (n - n')$ e índice $p + p'$ e

$$T_{x_0}(M') = [u \in T_{x_0}(M) \mid Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')\},$$
$$\mathrm{t}_{x_0}(M') = [u \in \mathrm{t}_{x_0}(M) \mid Df_{x_0}(u) \in \mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}')\}.$$

Dem: Para uma melhor sistematização, dividimos a demonstração em várias alíneas:

a) Seja E o espaço vectorial ambiente da variedade (M, x_0) e notemos k a respectiva dimensão. Tendo em conta o lema II.6.33, podemos considerar um aberto U de E, com $x_0 \in U$, e uma submersão $g\colon U \to \mathbb{R}^{k-m} \times \mathbb{R}^p$, tal que $g(x_0) = (0, 0)$ e se tenha

(*) $$M \cap U = \{x \in U \mid g(x) \in \{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p_+\}.$$

Tendo em conta II.6.29, tem-se

$$T_{x_0}(M) = \{u \in E \mid Dg_{x_0}(u) \in \{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p\},$$
$$\mathrm{t}_{x_0}(M) = \{u \in E \mid Dg_{x_0}(u) \in \{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p_+\},$$

e portanto também

$$T_{x_0}(\partial_p(M)) = \mathrm{t}_{x_0}(M) \cap (-\mathrm{t}_{x_0}(M)) = \\ = \{u \in E \mid Dg_{x_0}(u) = 0\}.$$

b) Mostremos agora que, se necessário substituindo U por um aberto mais pequeno e g pela sua restrição, pode-se já supor que existe uma aplicação

[48] A novidade em relação à versão precedente está em que permitimos que a variedade (M, x_0) tenha bordo. No entanto, a variedade de chegada $(\widehat{M}, y_0)$ continua a não ter bordo. No caso em que a variedade de partida (M, x_0) também não tem bordo, reencontramos a condição de transversalidade na versão precedente.

suave $\widehat{f}\colon U \to \widehat{M}$, constituindo um prolongamento da restrição de f a $M \cap U$.
Para isso, basta considerar um difeomorfismo local $\psi\colon \widehat{U} \to \widehat{V}$ de $(\widehat{M}, y_0)$ sobre $(\mathbb{R}^n, 0)$, reduzir U de modo que $f(M \cap U) \subset \widehat{U}$, reparar que, por (*), $M \cap U$ é fechado em U pelo que, por II.3.12, $\psi \circ f_{/M\cap U}$ admite um prolongamento suave a U, prolongamento que, se necessário reduzindo de novo U, se pode já supor tomar valores em $\widehat{V}$, bastando por fim tomar para $\widehat{f}$ a composição deste prolongamento com ψ^{-1}.
c) Seja $h\colon U \to \widehat{M} \times (\mathbb{R}^{k-m} \times \mathbb{R}^p)$ a aplicação suave definida por

$$h(x) = (\widehat{f}(x), g(x)).$$

Tem-se $h(x_0) = (y_0, 0)$ e vamos mostrar que h verifica, no ponto x_0, a condição de transversalidade descrita no resultado precedente, relativamente ao conjunto $\widehat{M}' \times (\{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p_+)$, que é, no ponto $(y_0, 0)$, uma variedade com dimensão $n' + p$ e índice $p + p'$ (reparar que U é, em x_0, uma variedade sem bordo com dimensão k e que $\widehat{M} \times (\mathbb{R}^{k-m} \times \mathbb{R}^p)$ é, em $(y_0, 0)$, uma variedade sem bordo com dimensão $n + (k - m) + p$).
Seja então $(v, w) \in T_{y_0}(\widehat{M}) \times (\mathbb{R}^{k-m} \times \mathbb{R}^p)$ arbitrário. O facto de Dg_{x_0} ser uma aplicação linear sobrejectiva implica a existência de $u \in E$ tal que $Dg_{x_0}(u) = w$. Tem-se então $v - D\widehat{f}_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M})$, pelo que, pela condição de transversalidade do enunciado, vai existir $u' \in T_{x_0}(\partial_p(M))$ e

$$v' \in T_{y_0}(\partial_{p'}(\widehat{M}')) = \mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}') \cap (-t_{y_0}(\widehat{M}'))$$

tais que

$$Df_{x_0}(u') + v' = v - D\widehat{f}_{x_0}(u).$$

O que vimos em a) mostra-nos que $Dg_{x_0}(u') = 0$ pelo que, sendo $u'' = u + u'$, tem-se ainda $Dg_{x_0}(u'') = w$ e, pela última fórmula destacada, $v = D\widehat{f}_{x_0}(u'') + v'$. Podemos assim escrever

$$(v, w) = (D\widehat{f}_{x_0}(u''), Dg_{x_0}(u'')) + (v', 0) = Dh_{x_0}(u'') + (v', 0),$$

onde $(v', 0)$ pertence a

$$\mathrm{t}_{(y_0,0)}(\widehat{M}' \times (\{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p_+)) \cap (-\mathrm{t}_{(y_0,0)}(\widehat{M}' \times (\{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p_+)))$$

portanto

$$(v', 0) \in T_{(y_0,0)}(\partial_{p+p'}(\widehat{M}' \times (\{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p_+))),$$

o que prova a condição de transversalidade pretendida.
d) Para cada $x \in U$, tem-se $x \in M'$ se, e só se, $x \in M$ e $f(x) \in \widehat{M}'$ ou seja se, e só se, $g(x) \in \{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p_+$ e $\widehat{f}(x) \in \widehat{M}'$, portanto se, e só se,

$h(x) \in \widehat{M}' \times (\{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}_+^p)$. Aplicando o resultado precedente, concluímos agora que $M' \cap U$, e portanto M', é, no ponto x_0, uma variedade com dimensão

$$k - (n + (k - m) + p - (n' + p)) = m - (n - n')$$

e índice $p + p'$ e que um vector $u \in E$ está em $T_{x_0}(M')$ se, e só se, $Dh_{x_0}(u) \in T_{(y_0,0)}(\widehat{M}' \times (\{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}_+^p))$ ou seja, se, e só se, se verifica $Dg_{x_0}(u) \in \{0\}^{k-m} \times \mathbb{R}^p$ e $D\widehat{f}_{x_0}(u) \in T_{y_0}(\widehat{M}')$, o que é ainda equivalente, tendo em conta o que vimos em a), às condições $u \in T_{x_0}(M)$ e $Df_{x_0}(u) \in T_{y_0}(M')$. Do mesmo modo se verifica que um vector $u \in E$ está em $\mathrm{t}_{x_0}(M')$ se, e só se, $u \in \mathrm{t}_{x_0}(M)$ e $Df_{x_0}(u) \in \mathrm{t}_{y_0}(\widehat{M}')$. □

II.6.36 **(Corolário)** Sejam $(\widehat{M}, y_0)$ uma variedade *sem bordo*, com dimensão n, e M e M' dois subconjuntos de $\widehat{M}$, contendo y_0, tais que (M, y_0) seja uma variedade com dimensão m e índice p e (M', y_0) seja uma variedade com dimensão m' e índice p'. Se se verifica a *condição de transversalidade*

$$T_{y_0}(\partial_p(M)) + T_{y_0}(\partial_{p'}(M')) = T_{y_0}(\widehat{M}),$$

$M \cap M'$ é uma variedade em y_0 com dimensão $m + m' - n$ e índice $p + p'$ e

$$T_{y_0}(M \cap M') = T_{y_0}(M) \cap T_{y_0}(M'),$$
$$\mathrm{t}_{y_0}(M \cap M') = \mathrm{t}_{y_0}(M) \cap \mathrm{t}_{y_0}(M').$$

Dem: Tal como em II.4.38, o caso particular em que (M, y_0) e (M', y_0) não têm bordo, basta aplicar o resultado precedente à inclusão $\iota: M' \to \widehat{M}$. □

§7. Teorema de Sard.

II.7.1 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Diz-se que $x \in M$ é um *ponto regular* de f se f for uma submersão no ponto x; caso contrário, diz-se que x é um *ponto crítico* de f. Diz-se que um ponto $y \in \widehat{M}$ é um *valor regular* de f se, todos os $x \in f^{-1}(\{y\})$ são pontos regulares; caso contrário, isto é, se existe um ponto crítico $x \in f^{-1}(\{y\})$, diz-se que y é um *valor crítico* de f.

A importância dos valores regulares é que eles são os pontos $y \in \widehat{M}$ para os quais se pode garantir que a imagem recíproca $f^{-1}(\{y\})$ é uma subvariedade, eventualmente vazia, de M. O teorema de Sard, que estudamos em seguida, vai garantir a existência de muitos valores regulares, provando, mais precisamente, que o conjunto dos valores críticos é pequeno em $\widehat{M}$, num sentido conveniente. Repare-se que, no caso em que, para cada $x \in M$, M tem em x uma dimensão menor que a de $\widehat{M}$ em $f(x)$, todos os pontos de M são críticos, pelo que os valores regulares de f são simplesmente aqueles que não pertencem a $f(M)$.

A primeira coisa que temos que fazer é explicar o que entendemos por "conjunto pequeno" numa variedade. No teorema de Sard, propriamente dito, isso significa que se trata de um conjunto de medida nula. No entanto, para evitar utilizar argumentos de Teoria da Medida, preferimos examinar uma versão mais fraca deste teorema[49], mas que é suficiente para a maioria das suas aplicações, em que a noção de conjunto pequeno é meramente topológica. Os conjuntos pequenos vão ser os conjuntos magros que definimos em seguida.

II.7.2 Seja M um espaço topológico localmente compacto e separado (por exemplo uma variedade, eventualmente com bordo). Diz-se que um conjunto $A \subset M$ é *magro* se existir uma família finita ou numerável $(C_j)_{j\in J}$ de subconjuntos fechados de M com interior vazio tal que $A \subset \bigcup\limits_{j\in J} C_j$.

Nos dois resultados seguintes, cujas demonstrações são triviais, isolamos algumas propriedades elementares dos conjuntos magros.

II.7.3 Seja M um espaço topológico localmente compacto e separado. Tem-se então:

a) Todo o conjunto fechado de interior vazio é magro, em particular $\emptyset$ é um conjunto magro.

b) Se $A \subset M$ é magro e $B \subset A$, então B é magro.

c) Se $(A_j)_{j\in J}$ é uma família finita ou numerável de conjuntos magros, então $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ é um conjunto magro.

II.7.4 Sejam M e $\widehat{M}$ espaços topológicos localmente compactos e separados e $f\colon M \to \widehat{M}$ um homeomorfismo. Se $A \subset M$, então A é magro em M se, e só se, $f(A)$ é magro em $\widehat{M}$.

O que referimos nos dois resultados precedentes mostra que certas construções que se esperava que conduzissem de conjuntos pequenos a conjuntos pequenos fazem-no de facto. Para a noção ser verdadeiramente útil precisamos, no entanto, de algo que garanta que não há demasiados conjuntos pequenos e é isso que faz o teorema de Baire que examinamos em seguida.

Repare-se que a definição de conjunto magro e as respectivas proprie-

[49]Em rigor, não deveríamos dar o nome de "teorema de Sard" à versão que estudaremos, na medida em que se trata de um resultado estabelecido anteriormente por Brown (ver, por exemplo, [19] para uma discussão mais detalhada desta questão). Preferimos utilizar o nome "teorema de Sard" por ser essa a designação pela qual é reconhecido pela comunidade matemática actual um resultado deste tipo.

dades elementares podiam ter sido dadas no quadro dos espaços topológicos arbitrários e que só no teorema de Baire vamos utilizar o facto de estarmos a trabalhar com espaços localmente compactos e separados.[50]

II.7.5 **(Teorema de Baire)** Seja M um espaço topológico localmente compacto e separado. Se $A \subset M$ é magro então $\mathrm{int}(A) = \emptyset$.

Dem: Basta mostrarmos que, se $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de conjuntos fechados de interior vazio, então $\bigcup\limits_{n\geq 1} C_n$ tem interior vazio. Suponhamos que isso não acontecia, ou seja, que existia $x \in M$ interior a $\bigcup\limits_{n\geq 1} C_n$. Seja então $K_0 \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} C_n$ uma vizinhança compacta de x. Vamos construir recursivamente compactos K_n, $n \geq 1$, de interior não vazio, verificando $K_n \subset K_{n-1} \cap (M \setminus C_n)$. Para isso, atendemos a que $\mathrm{int}(K_{n-1})$ é um aberto não vazio, e portanto não contido em C_n, e daqui deduzimos que o aberto $\mathrm{int}(K_{n-1}) \cap (M \setminus C_n)$ é não vazio, pelo que nos basta tomar para K_n uma vizinhança compacta de um dos pontos deste aberto que esteja contida nele. Vemos agora que

$$\bigcap_{n\geq 1} K_n \subset K_0 \cap (\bigcap_{n\geq 1} M \setminus C_n) = K_0 \cap (M \setminus \bigcup_{n\geq 1} C_n) = \emptyset,$$

o que é absurdo, uma vez que se trata da intersecção de uma sucessão decrescente de compactos não vazios (os $K_0 \setminus K_n$ são abertos do compacto K_0, com união K_0, pelo que teria de haver uma união finita, igual a um dos $K_0 \setminus K_n$, que fosse igual a K_0, o que implicava que $K_n = \emptyset$). □

Repare-se que, apesar de os conjuntos magros terem interior vazio, nem todos os conjuntos de interior vazio têm que ser magros; por exemplo, em $\mathbb{R}$, o conjunto dos racionais, sendo união numerável de conjuntos unitários, é magro mas o conjunto dos irracionais, apesar de ter interior vazio, não é magro (senão $\mathbb{R}$ seria magro). Há, no entanto, uma classe importante de conjuntos para os quais ser magro equivale a ter interior vazio:

II.7.6 Se M é um espaço topológico localmente compacto e separado, um conjunto $A \subset M$ diz-se *σ-compacto* se for união de uma família contável de subconjuntos compactos de M. Se $A \subset M$ é σ-compacto, então A é um conjunto magro se, e só se, tem interior vazio.

Dem: Pelo teorema de Baire, já sabemos que, se A é magro, então

[50] De facto o teorema de Baire também é verificado num enquadramento diferente, muito importante, por exemplo para as aplicações à Análise Funcional, a saber o dos espaços métricos completos, mas trata-se de um resultado que não teremos ocasião de aplicar no nosso estudo.

$\text{int}(A) = \emptyset$. Reciprocamente, se A tem interior vazio e é σ-compacto, então A é uma união de uma família contável de conjuntos compactos C_j, os quais vão, em particular, ser conjuntos fechados de interior vazio, o que mostra que A é magro. □

Para podermos estabelecer mais uma propriedade importante dos conjuntos magros, temos necessidade de rever uma noção topológica que utilizaremos em várias outras situações.

II.7.7 **(Generalidades sobre espaços de base contável)** Se A é um espaço topológico, uma *base de abertos* de A é um conjunto $\mathcal{U}$ de partes abertas de A, com a propriedade de todo o aberto U de A ser a união de uma família de abertos pertencentes a $\mathcal{U}$ [51] ou, o que é equivalente, com a propriedade de, para cada aberto U de A e cada $x \in U$, existir $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V \subset U$. O espaço topológico A diz-se *de base contável* se admitir uma base de abertos $\mathcal{U}$ finita ou numerável. Como propriedades elementares destas noções, temos:
a) Sejam A um espaço topológico e $B \subset A$ um subespaço topológico. Se $\mathcal{U}$ é uma base de abertos de A, então a classe dos conjuntos $U \cap B$, com $U \in \mathcal{U}$, é uma base de abertos de B. Em particular, se A é de base contável, então B é também de base contável.
b) Seja $\mathcal{U}$ uma base de abertos de A e escolhamos, para cada conjunto não vazio $U \in \mathcal{U}$, um elemento x_U. O conjunto C, dos elementos x_U assim escolhidos, é então uma parte densa de A. Em particular, todo o espaço topológico de base contável é *separável*, isto é, tem uma parte densa finita ou numerável.
c) Se A é um espaço métrico, então A é de base contável se, e só se, é separável. Com efeito, dado um subconjunto denso C, finito ou numerável, o conjunto das bolas abertas de A com centro num ponto de C e raio racional constitui uma base contável de abertos de A.
d) Se E é um espaço vectorial de dimensão finita n, então E é de base contável. Com efeito, E é isomorfo, e portanto homeomorfo, ao espaço métrico $\mathbb{R}^n$, que admite uma parte densa finita ou numerável, constituída pelos pontos com coordenadas racionais.

As observações anteriores vão permitir tirar algumas conclusões importantes sobre as variedades.

II.7.8 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade. Tem-se então:
a) M é um espaço topológico de base contável.
b) O conjunto das componentes conexas de M é finito ou numerável.
c) Se M tem dimensão 0, então as componentes conexas de M são os

[51] Olhamos para o conjunto vazio como sendo a união da família vazia de subconjuntos.

subconjuntos unitários e portanto M é finito ou numerável.
Dem: A alínea a) resulta de M ser um subespaço topológico de um espaço vectorial de dimensão finita, o qual é de base contável. Quanto a b), sendo $\mathcal{U}$ uma base finita ou numerável de abertos de M, o facto de as componentes conexas de M serem abertos de M (cf. II.6.21) disjuntos dois a dois e não vazios implica a existência de uma aplicação injectiva do conjunto das componentes conexas em $\mathcal{U}$, que a cada componente conexa associa um aberto não vazio escolhido em $\mathcal{U}$ que esteja contido nela. No caso em que M tem dimensão 0, a topologia de M é a topologia discreta, o que implica que as suas componentes conexas são os conjuntos unitários, uma vez que só estes podem ser conexos não vazios (qualquer subconjunto de M é simultaneamente aberto e fechado em M). □

II.7.9 **(Lema)** Seja M um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável, por exemplo uma variedade. Existe então uma sucessão de compactos de M, $(K_n)_{n\geq 1}$ tal que $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$ e que $M = \bigcup\limits_{n\geq 1} K_n$. Em particular M é σ-compacto.
Dem: Seja $\mathcal{U}$ uma base contável de abertos de M e notemos $(U_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão cujo conjunto de termos seja o dos abertos pertencentes a $\mathcal{U}$ cuja aderência seja compacta (no caso trivial $M = \emptyset$ pode ser necessário começar por juntar o conjunto vazio $\emptyset$ a $\mathcal{U}$). Tem-se ainda $M = \bigcup\limits_{n\geq 1} U_n$, visto que, para cada $x \in M$, vai existir uma vizinhança compacta V de x e podemos então escolher $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U \subset \mathrm{int}(V)$, donde $\mathrm{ad}(U) \subset V$, e portanto $\mathrm{ad}(U)$ é compacto. Construamos agora recursivamente uma sucessão estritamente crescente $(k_n)_{n\geq 1}$ de números naturais, do seguinte modo: $k_1 = 1$; supondo construído k_n, e notando K_n o compacto de M

$$K_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathrm{ad}(U_i),$$

o facto de a família de todos os U_i ser uma cobertura aberta do compacto K_n permite-nos escolher $k_{n+1} > k_n$ tal que

$$K_n \subset \bigcup_{i=1}^{k_{n+1}} U_i.$$

É agora imediato que os compactos K_n, definidos pela fórmula acima, verificam as condições pedidas. □

II.7.10 Seja M um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável, por exemplo uma variedade. Seja $U \subset M$ um aberto. Se $A \subset U$, então A é magro relativamente a U se, e só se, é magro relativamente a M.
Dem: Se A é magro em M, então A está contido numa união contável de conjuntos C_j, fechados em M e de interior vazio, e então A também está contido na união dos conjuntos $C_j \cap U$, fechados em U e de interior vazio, o

que mostra que A é magro em U. Suponhamos, reciprocamente, que A é magro em U. O conjunto A está assim contido numa família contável de conjuntos C_j fechados em U e de interior vazio. Uma vez que U também é localmente compacto, separado e de base contável, o lema anterior garante que U é união de uma família de compactos $(K_n)_{n\geq 1}$ e então os $C_j \cap K_n$ constituem uma família contável de conjuntos de interior vazio, cuja união contém A, conjuntos esses que são fechados nos K_n, logo compactos e portanto fechados em M, o que mostra que A é magro em M. □

O lema seguinte é o único resultado com algum sabor de Teoria da Medida de que vamos necessitar.

II.7.11 **(Lema)** Sejam $a \leq b$ em $\mathbb{R}$, J um conjunto finito de índices, e, para cada $j \in J$, $a_j \leq b_j$ em $\mathbb{R}$ e suponhamos que se tem $[a, b] \subset \bigcup\limits_{j\in J} [a_j, b_j]$. Tem-se então $b - a \leq \sum\limits_{j\in J} (b_j - a_j)$.

Dem: Vamos fazer a demonstração por indução no número de índices em J. No caso em que $J = \{j\}$ tem um único elemento, o facto de se ter $a, b \in [a_j, b_j]$ implica que $a_j \leq a$ e $b \leq b_j$, donde $b - a \leq b_j - a_j$ e temos o resultado. Suponhamos o resultado válido quando J tem n elementos e vejamos o que sucede quando J tem $n + 1$ elementos. Seja $j_0 \in J$ tal que $a \in [a_{j_0}, b_{j_0}]$, portanto $a_{j_0} \leq a \leq b_{j_0}$. Podemos já supor que se tem $b > b_{j_0}$, sem o que $[a, b]$ estava contido em $[a_{j_0}, b_{j_0}]$ e tínhamos uma consequência trivial do caso já estudado em que J tem um único elemento. Tem-se então $]b_{j_0}, b] \subset \bigcup\limits_{j\neq j_0} [a_j, b_j]$, donde $[b_{j_0}, b] \subset \bigcup\limits_{j\neq j_0} [a_j, b_j]$, uma vez que o conjunto do segundo membro é fechado. Pela hipótese de indução, concluímos que $b - b_{j_0} \leq \sum\limits_{j\neq j_0} b_j - a_j$, e portanto

$$b - a = b_{j_0} - a + b - b_{j_0} \leq b_{j_0} - a_{j_0} + \sum_{j\neq j_0} b_j - a_j = \sum_{j\in J} b_j - a_j. \qquad \square$$

No teorema de Sard, o conjunto que queremos garantir ser magro é a imagem de outro conjunto por uma aplicação contínua. Na sua demonstração utilizaremos mais que uma vez o lema seguinte:

II.7.12 **(Lema)** Sejam M e $\widehat{M}$ dois espaços topológicos localmente compactos, separados e de base contável, por exemplo duas variedades, e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação contínua. Seja $A \subset M$ um conjunto tal que, para cada $x \in A$, exista um aberto V de M, com $x \in V$, tal que $f(A \cap V)$ seja magro. Tem-se então que $f(A)$ é magro.

Dem: Seja $\mathcal{U}$ uma base contável de abertos de M. A hipótese do enunciado e o facto de toda o subconjunto de um conjunto magro ser ainda magro permite-nos garantir que, para cada $x \in A$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ e que $f(A \cap U)$ seja magro. Sendo $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ o conjunto contável constituído pelos abertos $U \in \mathcal{U}$ com esta propriedade, vemos que $f(A)$ vai ser a união contável dos conjuntos magros $f(A \cap U)$, com $U \in \mathcal{U}'$, sendo assim também magro. □

Vamos agora provar um lema que tem já o espírito do teorema de Sard mas em que o conjunto que se garante ser "pequeno" é apenas uma parte do conjunto dos valores críticos, parte essa que faz intervir derivadas de ordem superior.

II.7.13 **(Lema)** Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave e notemos, para cada $p \geq 1$, $C_p(f)$ o subconjunto fechado de U constituído pelos pontos x tais que, para todo o $1 \leq j \leq p$, a derivada de ordem j, $D^j f_x \in L^j(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ é nula. Tem-se então que o subconjunto $f(C_m(f))$ de $\mathbb{R}$ é magro.

Dem: Fixemos em $\mathbb{R}^m$ a norma do máximo e recordemos que, dado um ponto $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $r > 0$, a bola fechada $\overline{B}_r(x)$ é o produto de intervalos

$$\overline{B}_r(x) = [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - r, x_2 + r] \times \cdots \times [x_m - r, x_m + r].$$

Vamos dividir a demonstração em duas partes:

a) Comecemos por mostrar que, dados $x \in U$ e $r > 0$ tais que $\overline{B}_r(x) \subset U$, existe, para cada $p \geq 1$, uma constante $c_p \geq 0$ tal que, quaisquer que sejam $y \in \overline{B}_r(x) \cap C_p(f)$ e $z \in \overline{B}_r(x)$, se tenha

$$|f(z) - f(y)| \leq c_p \|z - y\|^{p+1}. \tag{1}$$

Isto pode ser visto facilmente a partir da Fórmula de Taylor mas, para não ultrapassarmos a "revisão do Cálculo Diferencial" que apresentámos no início, podemos apresentar um argumento directo alternativo, por indução em p, para o que convém generalizar o que se pretende provar, permitindo que o espaço de chegada seja um espaço vectorial normado F, de dimensão finita, substituindo em (1) o valor absoluto em $\mathbb{R}$ pela norma em F e reparando que a definição de $C_p(f)$ se estende trivialmente a este quadro mais geral. No caso em que $p = 1$, a fórmula (1) resulta de aplicarmos duas vezes a segunda versão da fórmula da média, desde que se tome para c_1 o máximo sobre o compacto $\overline{B}_r(x)$ da aplicação contínua que a w associa $\|D(Df)_w\|$. Com efeito, uma primeira aplicação garante que, para cada w no segmento de extremidades y e z,

$$\|Df_w\| = \|Df_w - Df_y\| \leq c_1 \|w - y\| \leq c_1 \|z - y\|$$

e uma segunda aplicação garante então que $\|f(z) - f(y)\| \leq c_1 \|z - y\|^2$.

Por fim, supondo o resultado verdadeiro para um certo $p \geq 1$, vemos que, sendo c_{p+1} a constante c_p, correspondente à aplicação suave $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^m; F)$, tem-se, para cada

$$y \in \overline{B}_r(x) \cap C_{p+1}(f) \subset \overline{B}_r(x) \cap C_p(Df)$$

e $z \in \overline{B}_r(x)$ e cada w no segmento de extremidades y e z,

$$\|Df_w\| = \|Df_w - Df_y\| \leq c_{p+1}\|w - y\|^{p+1} \leq c_{p+1}\|z - y\|^{p+1},$$

donde $\|f(z) - f(y)\| \leq c_{p+1}\|z - y\|^{p+2}$.
b) Passemos agora à demonstração da afirmação no enunciado. Seja $x \in C_m(f)$ arbitrário e fixemos $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(x) \subset U$. Tendo em conta o lema II.7.12, o resultado estará demonstrado se verificarmos que o subconjunto compacto $f(C_m(f) \cap \overline{B}_r(x))$ de $\mathbb{R}$ tem interior vazio, e portanto é magro, visto que ele contém $f(C_m(f) \cap B_r(x))$. Suponhamos que isso não acontecia e tentemos chegar a um absurdo. Sejam então $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ tais que $[a - \delta, a + \delta] \subset f(C_m(f) \cap \overline{B}_r(x))$. Pelo que vimos atrás, podemos considerar uma constante $c_m \geq 0$ tal que, sempre que $y \in C_m(f) \cap \overline{B}_r(x)$ e $z \in \overline{B}_r(x)$,

$$|f(z) - f(y)| \leq c_m\,\|z - y\|^{m+1}.$$

Seja $N \geq 1$ um inteiro a concretizar posteriormente e reparemos que o compacto $\overline{B}_r(x)$ se pode escrever como união dos N^m conjuntos $\overline{B}_{r/N}(x_\alpha)$, com x_α da forma

$$(x_1 - r + \frac{(2k_1 - 1)r}{N}, x_2 - r + \frac{(2k_2 - 1)r}{N}, \ldots, x_m - r + \frac{(2k_m - 1)r}{N}),$$

com $1 \leq k_j \leq N$ (olhar para cada uma destas bolas na forma de um produto de intervalos). Se α for um índice tal que em $\overline{B}_{r/N}(x_\alpha)$ exista um ponto y_α em $C_m(f)$, tem-se então, para cada $z \in \overline{B}_{r/N}(x_\alpha)$,

$$|f(z) - f(y_\alpha)| \leq c_m\,\|z - y_\alpha\|^{m+1} \leq c_m\,(\frac{2r}{N})^{m+1},$$

o que mostra que

$$f(\overline{B}_{r/N}(x_\alpha)) \subset [f(y_\alpha) - c_m\,(\frac{2r}{N})^{m+1}, f(y_\alpha) + c_m\,(\frac{2r}{N})^{m+1}].$$

Concluímos daqui que

$$\begin{aligned}&[a - \delta, a + \delta] \subset f(C_m(f) \cap \overline{B}_r(x)) \subset\\ &\qquad \subset \bigcup_\alpha [f(y_\alpha) - c_m\,(\frac{2r}{N})^{m+1}, f(y_\alpha) + c_m\,(\frac{2r}{N})^{m+1}],\end{aligned}$$

com a união estendida aos índices α para os quais existe y_α nas condições referidas, de onde deduzimos, pelo lema II.7.11, que

$$2\delta \leq \sum_{\alpha} 2c_m \left(\frac{2r}{N}\right)^{m+1} \leq 2N^m c_m \left(\frac{2r}{N}\right)^{m+1} = \frac{2^{m+2} c_m r^{m+1}}{N}.$$

Fomos assim conduzidos a um absurdo, uma vez que a expressão da direita converge para 0, quando $N \to +\infty$, e podemos portanto escolher N tal que essa expressão seja menor que 2δ. □

II.7.14 **(Teorema de Sard)** Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Sendo $C(f) \subset M$, o conjunto dos pontos críticos de f, o conjunto $f(C(f)) \subset \widehat{M}$, dos valores críticos de f, é magro.

Dem:[52] Para maior clareza, vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

a) Reparemos que nos basta demonstrar o resultado no caso particular em que M tem a mesma dimensão m em todos os pontos e $\widehat{M}$ tem a mesma dimensão n em todos os pontos, hipótese que faremos de aqui em diante.

Com efeito, no caso geral, podemos considerar a família finita ou numerável das componentes conexas M_j de M e a família finita ou numerável das componentes conexas $\widehat{M}_k$ de $\widehat{M}$ (cf. II.7.8), que são abertos em M e $\widehat{M}$, respectivamente, e já são variedades sem bordo com essa propriedade, e então a imagem de cada M_j vai estar contida nalgum $\widehat{M}_k$ e o conjunto dos valores críticos de $f\colon M \to \widehat{M}$ vai ser a união contável dos conjuntos dos valores críticos dos $f_{/M_j}\colon M_j \to \widehat{M}$ e portanto, lembrando II.7.10, vai ser um conjunto magro.

b) Notemos agora que o resultado é trivialmente verdadeiro no caso em que $n = 0$. Com efeito, tem-se então que todos os pontos de M são trivialmente regulares, pelo que $C(f) = \emptyset$ e $f(C(f)) = \emptyset$. Nas alíneas seguintes vamos supor sempre que $n > 0$.

c) Vamos demonstrar o resultado por indução em m. Comecemos por supor que $m = 0$. Neste caso M é finito ou numerável (cf. a alínea c) de II.7.8). Resulta daqui que $f(M) = f(C(f))$ é um conjunto finito ou numerável, portanto uma união finita ou numerável de conjuntos unitários, que são compactos de interior vazio, pelo que $f(C(f))$ é magro.

d) Seja $m \geq 1$ tal que o resultado seja válido sempre que a variedade M tenha dimensão $m - 1$. Para terminar a demonstração, temos que ver que o resultado é ainda válido quando M tem dimensão m.

e) Vamos examinar agora o caso particular em que M é um aberto U de $\mathbb{R}^m$ e em que $\widehat{M}$ é $\mathbb{R}^n$. Consideramos portanto um aberto U de $\mathbb{R}^m$ e uma aplicação suave $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, com as componentes $f_j\colon U \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, e notamos $C(f) \subset U$ o conjunto dos pontos críticos de f. Para cada inteiro

[52] A demonstração que apresentamos é baseada na que se encontra no livro de Milnor [19], com as adaptações decorrentes de utilizarmos conjuntos magros em vez de conjuntos de medida nula.

$p \geq 1$, notamos $C_p(f)$ o subconjunto de $C(f)$ formado pelos pontos $x \in U$ tais que $D^j f_x = 0$, para cada $1 \leq j \leq p$. Os conjuntos $C_p(f)$ verificam $C_p(f) \supset C_{p+1}(f)$ e $C(f) \supset C_1(f)$. Tem-se que $C(f)$ é a união de $C(f) \setminus C_1(f)$ com os conjuntos $C_p(f) \setminus C_{p+1}(f)$, com $1 \leq p \leq m-1$, e com $C_m(f)$. Tem-se então que $f(C(f))$ vai ser a união de $f(C(f) \setminus C_1(f))$ com os $f(C_p(f) \setminus C_{p+1}(f))$ e com $f(C_m(f))$, pelo que, para ver que o conjunto $f(C(f))$ é magro, basta verificarmos que são magros os conjuntos $f(C(f) \setminus C_1(f))$, $f(C_p(f) \setminus C_{p+1}(f))$ e $f(C_m(f))$. É isso que vamos fazer nas três próximas alíneas.

f) Vamos verificar que $f(C(f) \setminus C_1(f))$ é um conjunto magro, para o que podemos já supor que $n \geq 2$, sem o que se tinha trivialmente $C(f) = C_1(f)$. Seja $x_0 \in C(f) \setminus C_1(f)$ arbitrário. Existe então $w \in \mathbb{R}^m$ tal que $Df_{x_0}(w) \neq 0$, e portanto, para alguma componente j, $Df_{j_{x_0}}(w) \neq 0$. Por continuidade, podemos escolher um aberto V de U, com $x_0 \in V$, tal que, para cada $x \in V$, $Df_{j_x}(w) \neq 0$, em particular $Df_{j_x}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ seja sobrejectiva. Tendo em conta o lema II.7.12, o objectivo desta alínea estará alcançado se mostrarmos que o conjunto $f(V \cap (C(f) \setminus C_1(f)))$ é magro. Suponhamos que isso não acontecia e tentemos chegar a um absurdo. Reparemos que $C_1(f)$ é fechado em U e que, tendo em conta II.4.22, o mesmo acontece a $C(f)$. $V \setminus C_1(f)$ é assim um aberto de $\mathbb{R}^m$, em particular é localmente compacto, separado e de base contável, pelo que, por II.7.9, é união de uma sucessão de compactos K_i, $i \geq 1$, o que implica que o conjunto $f(V \cap (C(f) \setminus C_1(f)))$ é união dos compactos $f(K_i \cap C(f))$, tendo portanto, por II.7.6, interior não vazio. Sejam $y_0 = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tais que

$$B_r(y_0) =]b_1 - r, b_1 + r[\times \cdots \times]b_n - r, b_n + r[\subset f(V \cap (C(f) \setminus C_1(f)))$$

(como antes, consideramos em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo). Seja $M \subset V$,

$$M = \{x \in V \mid f_j(x) = b_j\},$$

que vai ser assim uma variedade de dimensão $m - 1$. Para cada

$$\begin{aligned} y = (y_1, \ldots, y_{j-1}, b_j, y_{j+1}, \ldots, y_n) \in \\ \in]b_1 - r, b_1 + r[\times \cdots \times \{b_j\} \times \cdots \times]b_n - r, b_n + r[, \end{aligned}$$

podemos considerar um ponto crítico $x \in V$ de f tal que $f(x) = y$, vindo, em particular, $x \in M$ e o facto de a aplicação linear $Df_x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ não ser sobrejectiva e a sua imagem conter o vector $Df_x(w)$, não pertencente ao subespaço $\mathbb{R}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-j}$ de $\mathbb{R}^n$, com dimensão $n - 1$, implica que esta imagem não contém

$$\mathbb{R}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-j} = T_y(\mathbb{R}^{j-1} \times \{b_j\} \times \mathbb{R}^{n-j})$$

e portanto que y é também um valor crítico da restrição

$$f_{/M}: M \to \mathbb{R}^{j-1} \times \{b_j\} \times \mathbb{R}^{n-j}.$$

Concluímos assim que o conjunto dos valores críticos desta restrição tem interior não vazio, e portanto não é magro em $\mathbb{R}^{j-1} \times \{b_j\} \times \mathbb{R}^{n-j}$, o que é um absurdo, tendo em conta a hipótese de indução.

g) Vamos agora verificar que $f(C_p(f) \setminus C_{p+1}(f))$ é magro. Seja $x_0 \in C_p(f) \setminus C_{p+1}(f)$ arbitrário. Tem-se portanto $D^p f_{x_0} = 0$ e $D^{p+1} f_{x_0} \neq 0$, pelo que existem $w_1, \dots, w_{p+1}$ em $\mathbb{R}^m$ tais que $D^{p+1} f_{x_0}(w_1, \dots, w_{p+1}) \neq 0$ e podemos escolher uma componente j tal que $D^{p+1} f_{j_{x_0}}(w_1, \dots, w_{p+1}) \neq 0$. Por continuidade, podemos escolher um aberto V de U, com $x_0 \in V$, tal que, para cada $x \in V$, $D^{p+1} f_{j_x}(w_1, \dots, w_{p+1}) \neq 0$. Tendo em conta o lema II.7.12, o objectivo desta alínea estará alcançado se mostrarmos que o conjunto $f(V \cap (C_p(f) \setminus C_{p+1}(f)))$ é magro. Seja $g: V \to \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por

$$g(x) = D^p f_{j_x}(w_2, \dots, w_{p+1}).$$

Uma vez que, para cada $x \in V$, $Dg_x(w_1) \neq 0$, e portanto $Dg_x: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é sobrejectiva, vemos que o conjunto $M = \{x \in V \mid g(x) = 0\}$ é uma variedade de dimensão $m-1$. Se $y \in f(V \cap (C_p(f) \setminus C_{p+1}(f)))$, podemos considerar $x \in V \cap (C_p(f) \setminus C_{p+1}(f))$ tal que $f(x) = y$ e o facto de ser $x \in C_p(f)$ implica que $g(x) = 0$, e portanto que $x \in M$; para além disso, o facto de se ter $Df_x = 0$ implica que x é um ponto crítico de f, e portanto também da restrição $f_{/M}: M \to \mathbb{R}^n$. Vemos assim que o conjunto $f(V \cap (C_p(f) \setminus C_{p+1}(f)))$ está contido no conjunto dos valores críticos de $f_{/M}: M \to \mathbb{R}^n$ que, pela hipótese de indução, é magro, o que mostra que $f(V \cap (C_p(f) \setminus C_{p+1}(f)))$ é também magro, como queríamos.

h) Vamos agora verificar que $f(C_m(f))$ é magro. Suponhamos então que isso não acontecia. Como em f), o aberto U de $\mathbb{R}^m$, sendo localmente compacto, separado e de base contável, é união de uma sucessão de compactos K_i, $i \geq 1$, pelo que $f(C_m(f))$ ia ser a união dos compactos $f(C_m(f) \cap K_i)$ e portanto, por II.7.6, teria interior não vazio, ou seja, existia $y_0 = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tais que

$$B_r(y_0) =]b_1 - r, b_1 + r[\times \cdots \times]b_n - r, b_n + r[\subset f(C_m(f)).$$

Uma vez que se tem trivialmente $C_m(f) \subset C_m(f_1)$, podíamos então concluir que $]b_1 - r, b_1 + r[\subset f_1(C_m(f_1))$, pelo que $f_1(C_m(f_1))$ não tinha interior vazio em $\mathbb{R}$, em particular não era magro, o que era absurdo, tendo em conta o lema II.7.13.

i) Tal como observámos em e), o que vimos nas três últimas alíneas mostra que o teorema de Sard, com M de dimensão m, está demonstrado no caso particular em que M é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $\widehat{M}$ é $\mathbb{R}^n$. Passemos, por fim, à demonstração no caso geral. Seja $x_0 \in C(f)$ arbitrário. Sejam $\widehat{V}$ um aberto de $\widehat{M}$, com $f(x_0) \in \widehat{V}$, $\widehat{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\psi: \widehat{V} \to \widehat{U}$ um difeomorfismo.

Sejam V um aberto de M, com $x_0 \in V$, U um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $\varphi: U \to V$ um difeomorfismo; se necessário reduzindo estes abertos, podemos já supor que $f(V) \subset \widehat{V}$. O facto de a derivada de um difeomorfismo ser um isomorfismo implica, tendo em conta o teorema de derivação da função composta, que $x' \in U$ é um ponto crítico de $\psi \circ f_{/V} \circ \varphi: U \to \widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ se, e só se, $\varphi(x')$ é um ponto crítico de f, pelo que $f(C(f) \cap V)$ é a imagem por ψ^{-1} do conjunto dos valores críticos de $\psi \circ f_{/V} \circ \varphi$, conjunto esse que é magro em $\mathbb{R}^n$, e portanto em $\widehat{U}$, pelo caso particular já estudado. Concluímos assim que $f(C(f) \cap V)$ é magro em $\widehat{V}$, e portanto em $\widehat{M}$, o que, tendo em conta o lema II.7.12, implica que $f(C(f))$ é magro em $\widehat{M}$. □

Uma vez que a definição de ponto crítico ou de valor crítico apenas faz intervir a derivada de primeira ordem da função f, poderíamos ser levados a pensar na possibilidade de o teorema de Sard ser verdadeiro apenas com a exigência de f ser de classe C^1. Se examinarmos a demonstração precedente e os lemas nela utilizados, verificamos que tivemos necessidade de trabalhar com derivadas de ordem superior e, de facto, um exemplo clássico de Whitney (cf. [27]) mostra que a classe C^1 não é em geral suficiente. Com uma demonstração mais cuidadosa, pode-se verificar que, quando M e $\widehat{M}$ têm dimensões m e n, o teorema é válido para as aplicações de classe C^p, onde o inteiro p depende apenas de m e n (cf. [6], problema 2 de XVI.23). Por exemplo, quando $m \leq n$, pode-se mostrar que a classe C^1 é suficiente. De facto, examinando as demonstrações que fizemos, constatamos que é suficiente exigir que a aplicação $f: M \to \widehat{M}$ seja de classe C^{m+1}, onde m é a dimensão de M, mas pode-se mostrar que, em geral, não é necessário exigir tanto.
O teorema de Sard e as definições de ponto crítico, ponto regular, valor crítico e valor regular foram apresentados apenas no quadro das variedades sem bordo. No entanto, eles são trivialmente generalizáveis à situação em que a variedade domínio pode ter bordo:

II.7.15 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ variedades, a segunda das quais sem bordo, e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Generalizando o que foi feito no caso em que M também não tem bordo, dizemos que um ponto $x \in M$ é um *ponto regular* de f se, sendo $j \geq 0$ tal que $x \in \partial_j(M)$, x é um ponto regular da restrição $f_{/\partial_j(M)}: \partial_j(M) \to \widehat{M}$ e, caso contrário, dizemos que x é um *ponto crítico* de f. Como antes, chamam-se *valores críticos* de f aos elementos de $\widehat{M}$ que são imagem de algum ponto crítico e *valores regulares* de f aos restantes elementos de $\widehat{M}$.

II.7.16 **(Teorema de Sard para variedades com bordo)** Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades a segunda das quais sem bordo, e seja $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Tem-se então que o conjunto $f(C(f)) \subset \widehat{M}$, dos valores críticos de f, é magro.
Dem: Por definição, o conjunto dos valores críticos de f é a união dos con-

juntos dos valores críticos das restrições de f às diferentes variedades sem bordo $\partial_j(M)$, conjuntos esses que, pela versão do teorema de Sard já demonstrada, são magros. $\square$

II.7.17 **(Corolário)** Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades, a segunda das quais sem bordo, e seja $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Se, para cada $x \in M$, a dimensão de M em x é menor que a dimensão de $\widehat{M}$ em $f(x)$, então $f(M)$ é um conjunto magro em $\widehat{M}$.
Dem: Basta atender a que $f(M)$ é trivialmente o conjunto dos valores críticos de f. $\square$

II.7.18 **(Corolário)** Sejam $M \subset E$ uma variedade com dimensão menor ou igual a p em cada ponto, $\widehat{E}$ um espaço vectorial de dimensão finita e $f: M \to \widehat{E}$ uma aplicação suave. Tem-se então que $f(M)$ não contém nenhuma subvariedade, não vazia, de dimensão maior que p, de $\widehat{E}$.
Dem: Suponhamos que $f(M)$ continha uma tal subvariedade. Considerando um ponto do bordo de índice 0 desta, concluímos a existência de um espaço vectorial F, de dimensão maior que p, de um aberto não vazio U de F e de um difeomorfismo $\varphi: U \to V$, com $V \subset f(M)$. Sejam $\widehat{V}$ um aberto de $\widehat{E}$, contendo V, e $\psi: \widehat{V} \to F$ um prolongamento suave de $\varphi^{-1}: V \to U$. Considerando o aberto não vazio M' de M, constituído pelos $x \in M$ tais que $f(x) \in \widehat{V}$, que é, em particular, uma variedade com dimensão menor ou igual a p em cada ponto, obtemos uma aplicação suave $\psi \circ f_{/M'}: M' \to F$ cuja imagem contém U, o que é absurdo, pelo teorema de Baire (II.7.5), já que, pelo corolário precedente, essa imagem é magra. $\square$

Com o fim de apresentar outra aplicação importante do teorema de Sard, definimos em seguida as noções de subconjunto homogéneo de um espaço vectorial de dimensão finita e de aplicação suave homogénea.

II.7.19 Sejam E um espaço vectorial real de dimensão finita e $A \subset E$ um subconjunto. Dizemos que A é um *conjunto homogéneo* se, quaisquer que sejam $x_0, x_1 \in A$, existe um difeomorfismo $\varphi: A \to A$ tal que $\varphi(x_0) = x_1$.[53]

II.7.20 Se $M \subset E$ é uma variedade homogénea, então M não tem bordo e tem a mesma dimensão em todos os pontos.
Dem: Quaisquer que sejam x_0 e x_1 em M, a existência de um difeomorfismo $\varphi: M \to M$ tal que $\varphi(x_0) = x_1$ implica que (M, x_0) e (M, x_1) são localmente difeomorfos e portanto que M tem a mesma dimensão e o mesmo índice em todos os pontos. Basta agora repararmos que, tendo em conta

[53] Intuitivamente, todos os pontos de A estão situados do mesmo modo dentro de A, ou são indistinguíveis dentro de A. Note-se que, como aplicação das equações diferenciais, pode-se provar que toda a variedade conexa sem bordo é homogénea (cf. o exercício IV.17 adiante).

II.6.17, o facto de M ter o mesmo índice em todos os pontos implica que esse índice comum é 0. □

II.7.21 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ e $B \subset F$ dois subconjuntos e $f: A \to B$ uma aplicação suave. Diz-se que f é uma *aplicação homogénea* se, quasiquer que sejam $x_0, x_1 \in A$, existem dois difeomorfismos $\varphi: A \to A$ e $\psi: B \to B$ com $\varphi(x_0) = x_1$ e $f \circ \varphi = \psi \circ f$.
Repare-se que se tem então, em particular, $\psi(f(x_0)) = f(x_1)$.
Podemos assim garantir que, se $f: A \to B$ é uma aplicação suave homogénea, então A é um conjunto homogéneo e, no caso em que f é sobrejectiva, B também é um conjunto homogéneo.

II.7.22 **(Corolário do teorema de Sard)** Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave homogénea e sobrejectiva. Tem-se então que f é uma submersão.
Dem: Podemos já afastar o caso trivial em que $M = \emptyset$. Pelo teorema de Sard o conjunto dos valores críticos de f, sendo magro, não pode ser todo o $\widehat{M}$ e existe assim pelo menos um valor regular. Uma vez que f é sobrejectiva, concluímos assim, em particular, a existência de $x_0 \in M$ onde f seja uma submersão. Dado $x \in M$ arbitrário, existem então difeomorfismos $\varphi: M \to M$ e $\psi: \widehat{M} \to \widehat{M}$ tais que $\varphi(x_0) = x$ e $f \circ \varphi = \psi \circ f$, ou seja $f = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, e derivando ambos os membros em x, obtemos

$$Df_x = D\psi_{f(x_0)} \circ Df_{x_0} \circ D(\varphi^{-1})_x,$$

pelo que Df_x, sendo a composta de dois isomorfismos com uma aplicação linear sobrejectiva, é uma aplicação linear sobrejectiva. □

EXERCÍCIOS

Ex II.1 Mostrar que, nas definições do cone tangente e do cone tangente alargado de um conjunto num dos seus pontos, pode-se exigir que a sucessão de números reais estritamente positivos t_n convirja para $+\infty$.

Ex II.2 Encontrar uma definição e enunciar um resultado que implique simultaneamente II.1.2 e II.1.3.

Ex II.3 **a)** Dar um exemplo de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ e de um ponto $x_0 \in A$ tais que o cone tangente alargado $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ contenha estritamente $\mathrm{t}_{x_0}(A)$.
b) Dar um exemplo de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ e de um ponto $x_0 \in A$ tais que o cone tangente alargado $\mathrm{t}^+_{x_0}(A)$ não seja um subespaço vectorial.

Ex II.4 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Mostrar que se B e C são duas partes de E e $x_0 \in B \cap C$, então

$$\mathrm{t}_{x_0}(B \cup C) = \mathrm{t}_{x_0}(B) \cup \mathrm{t}_{x_0}(C),$$
$$\mathrm{t}^+_{x_0}(B \cup C) \supset \mathrm{t}^+_{x_0}(B) \cup \mathrm{t}^+_{x_0}(C),$$
$$T_{x_0}(B \cup C) \supset T_{x_0}(B) + T_{x_0}(C).$$

Dar um exemplo em que se tenha $\mathrm{t}^+_{x_0}(B \cup C) \neq \mathrm{t}^+_{x_0}(B) \cup \mathrm{t}^+_{x_0}(C)$ e $T_{x_0}(B \cup C) \neq T_{x_0}(B) + T_{x_0}(C)$.

Ex II.5 **a) (Continuidade do cone tangente alargado)** Sejam $x_0 \in A \subset E$, (x_n) uma sucessão de elementos de A, com $x_n \to x_0$ e, para cada n, $w_n \in \mathrm{t}^+_{x_n}(A)$. Supondo que $w_n \to w \in E$, mostrar que $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A)$. **Sugestão:** Atender à caracterização alternativa do cone tangente alargado.
b) Mostrar, com um contraexemplo, que a propriedade de continuidade referida em a) não é verificada pelos cones tangentes $\mathrm{t}_x(A)$.

Ex II.6 Recorrendo apenas à intuição, determinar quais os cones tangentes e cones tangentes alargados dos seguintes conjuntos nos pontos indicados:[54]
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$, nos pontos $x_0 = (1,1)$, $y_0 = (1,2)$ e $z_0 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.
b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y = x^2\}$, nos pontos $x_0 = (0,0)$ e $y_0 = (1,1)$.
c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \sin(\frac{1}{x})\} \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$, nos pontos $x_0 = (0,0)$ e $y_0 = (0,1)$.
d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, no ponto $x_0 = (1,0,0)$.

Ex II.7 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $x_0 \in A \subset E$. Mostrar que, para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $x \in A$, com $0 < \|x - x_0\| < \varepsilon$, existe $w \in \mathrm{t}_{x_0}(A) \setminus \{0\}$ tal que

$$\left\|\frac{w}{\|w\|} - \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right\| < \delta$$

e, quaisquer que sejam $x, y \in A$, com $x \neq y$, $\|x - x_0\| < \varepsilon$ e $\|y - x_0\| < \varepsilon$, existe $w \in \mathrm{t}^+_{x_0}(A) \setminus \{0\}$ tal que

$$\left\|\frac{w}{\|w\|} - \frac{x - y}{\|x - y\|}\right\| < \delta.$$

Reparar que este resultado generaliza a parte não trivial de II.1.12.

Ex II.8 Seja $A \subset \mathbb{R}$ o conjunto constituído pelo 0 e pelos números da forma $1/2^n$, com $n \in \mathbb{N}$.
a) Verificar que

$$\mathrm{t}_{(0,0)}(A \times A) \neq \mathrm{t}_0(A) \times \mathrm{t}_0(A).$$

Sugestão: Verificar que os logaritmos na base 2 dos declives das secantes oblíquas de $(0,0)$ para os pontos de $A \times A$ são todos números inteiros.

[54]Em cada caso será útil desenhar uma figura.

b) Com um pouco mais de trabalho verificar que

$$\mathrm{t}^{+}_{(0,0)}(A \times A) \neq \mathrm{t}^{+}_{0}(A) \times \mathrm{t}^{+}_{0}(A).$$

Sugestão: O conjunto dos logaritmos na base 2 dos valores absolutos dos declives das secantes oblíquas entre pontos de $A \times A$ tem os inteiros como únicos pontos de acumulação possíveis, sendo portanto fechado.

Ex II.9 Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$$

e seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $f(x,y) = x\sin(\frac{1}{y})$, se $y \neq 0$, e $f(0,0) = 0$. Mostrar que f é contínua mas não é de classe C^0.

Ex II.10 Demonstrar rigorosamente o que foi feito intuitivamente na alínea b) do exercício II.6. **Sugestão:** Construir um difeomorfismo entre A e $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$.

Ex II.11 Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície esférica

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25\}.$$

Utilizar difeomorfismos do tipo dos utilizados no exemplo c) em II.4.8 para determinar os vectores tangentes a S nos pontos $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3)$ e $(3,4,0)$, justificando o resultado.

Ex II.12 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de um produto interno, e seja $S \subset E$ a hipersuperfície esférica

$$S = \{x \in E \mid \langle x, x\rangle = 1\}.$$

Mostrar que, se $x_0 \in S$ e se $u \in T_{x_0}(S)$, então u é prependicular a x_0, isto é, $\langle u, x_0\rangle = 0$. **Sugestão:** Considerar dois prolongamentos suaves da aplicação identicamente igual a 1 sobre S e derivá-los na direcção de u.

Ex II.13 Mostrar que, se $E \neq \{0\}$ é um espaço vectorial de dimensão finita e se $A \subset E$ é um subconjunto compacto e não vazio, então existe pelo menos um ponto $x_0 \in A$ tal que $\mathrm{t}_{x_0}(A) \neq E$. **Sugestão:** Considerar em E um produto interno e tomar um ponto $x_0 \in A$ de norma máxima.

Ex II.14 Seja $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$, e seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por $f(x,y) = y$. Mostrar que se podem escolher dois prolongamentos suaves $\overline{f}$ e $\widehat{f}$ de f a $\mathbb{R}^2$ tais que as derivadas de segunda ordem

$$D^2\overline{f}_{(0,0)}, D^2\widehat{f}_{(0,0)}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

não tenham a mesma restrição a $T_{(0,0)}(A) \times T_{(0,0)}(A)$.

Ex II.15 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $A \subset E$ um conjunto arbitrário. Se $(U_j)_{j\in J}$ é uma família de abertos de A de união A, mostrar que existe uma outra família $(V_j)_{j\in J}$ de abertos de A, ainda de união A, que seja *localmente finita* (isto é, tal que cada ponto de x admita uma vizinhança em A, que intersecta V_j apenas para um número finito de índices j) e que verifique $\mathrm{ad}_A(V_j) \subset U_j$.[55] **Sugestão:** Considerar uma partição da unidade de A subordinada à cobertura aberta constituída pelos U_j.

Ex II.16 Nas condições do enunciado do primeiro teorema da partição da unidade II.3.4, verificar que a união dos compactos C_γ tem que ser o aberto U e portanto que, salvo na caso trivial em que $U = \emptyset$, o conjunto contável Γ dos índice tem que ser infinito.

Ex II.17 A demonstração do corolário II.3.9 permite que se reforce um pouco mais a conclusão da alínea c) do respectivo enunciado. Qual o reforço que poderia ser feito?

Ex II.18 Nas hipóteses de II.3.9, mostrar que, se o conjunto A for compacto, pode-se exigir que os conjuntos C_j, aparecendo em b), sejam também compactos. **Sugestão:** Diminuir convenientemente os conjuntos U_j.

Ex II.19 Seja A uma parte dum espaço vectorial E de dimensão finita e sejam B e C dois subconjuntos disjuntos fechados **em** A. Mostrar que existe uma aplicação suave $f\colon A \to [0,1]$, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in B$, e $f(x) = 1$, para cada $x \in C$. **Sugestão:** Considerar uma partição da unidade para uma cobertura aberta conveniente de A.

Ex II.20 **(Refinamento de II.3.14)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais munido duma norma, $A \subset E$ um conjunto (por exemplo, $A = E\ldots$), $B \subset A$ um subconjunto fechado em A, $C \subset F$ um conjunto convexo não vazio e $f\colon B \to F$ uma aplicação contínua tal que $f(B) \subset C$. Mostrar que, para cada aplicação contínua $\delta\colon B \to]0,+\infty[$, existe uma aplicação suave $\widehat{g}\colon A \to F$ tal que $\widehat{g}(A) \subset C$ e que, para cada $x \in B$, $\|\widehat{g}(x) - f(x)\| < \delta(x)$.
Sugestão: Já conhecemos a existência de uma aplicação suave $g\colon U \to F$, com $B \subset U$ aberto em E, $g(U) \subset C$ e $\|g(x) - f(x)\| < \delta(x)$, para cada $x \in B$. Escolher $y_0 \in C$ e definir

$$\widehat{g}(x) = \begin{cases} \varphi(x)g(x) + \psi(x)y_0, & \text{se } x \in U \cap A \\ y_0, & \text{se } x \in A \setminus U \end{cases},$$

onde $\varphi, \psi\colon A \to [0,1]$ são as funções duma partição da unidade associada aos abertos $U \cap A$ e $A \setminus B$ de A.

---

[55] Esta propriedade exprime o facto de A ser um espaço topológico *paracompacto*. Pode-se provar, mais geralmente, que todo o espaço topológico metrizável é paracompacto, mas trata-se de um resultado de difícil demonstração.

Ex II.21 **(Uma versão do teorema de extensão de Tietze-Urysohn)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um conjunto (por exemplo, $A = E\ldots$), $B \subset A$ um subconjunto fechado em A e $f\colon B \to F$ uma aplicação contínua. Mostrar que existe uma aplicação contínua $\overline{f}\colon A \to F$ tal que $\overline{f}_{/B} = f$.

Sugestão: Começar por utilizar a conclusão do exercício precedente para encontrar uma aplicação suave $g\colon A \to F$ tal que, para cada $x \in B$, $\|f(x) - g(x)\| < 1$. Utilizando de novo a mesma conclusão, construir recursivamente aplicações suaves $g_j\colon A \to F$, onde $j \geq 1$, começando por escolher g_1 tal que $\|g_1(x)\| < 1$, para cada $x \in A$, e

$$\|f(x) - g(x) - g_1(x)\| < \frac{1}{2},$$

para cada $x \in B$, e supondo já escolhidos $g_1, \ldots, g_j$, escolher g_{j+1} de modo que $\|g_{j+1}(x)\| < \frac{1}{2^j}$, para cada $x \in A$, e

$$\|f(x) - g(x) - g_1(x) - \cdots - g_j(x) - g_{j+1}(x)\| < \frac{1}{2^{j+1}},$$

para cada $x \in B$. Verificar que se pode então definir uma aplicação contínua $\overline{f}\colon A \to F$ por

$$\overline{f}(x) = g(x) + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$$

e que se tem $\overline{f}_{/B} = f$.

Ex II.22 Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + 2y^2 = 1\}.$$

Mostrar que B é uma variedade sem bordo com dimensão 1 em todos os pontos, com a excepção de $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, e que nestes pontos B não é uma variedade.

Ex II.23 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave, injectiva e tal que, para cada $x \in M$, Df_x seja um isomorfismo de $T_x(M)$ sobre $T_{f(x)}(\widehat{M})$. Mostrar que então $f(M)$ é aberto em $\widehat{M}$ e que f é um difeomorfismo de M sobre $f(M)$.

Ex II.24 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Seja $K \subset M$ um conjunto compacto tal que a restrição $f_{/K}\colon K \to \widehat{M}$ seja uma aplicação injectiva e que, para cada $x \in K$, Df_x seja um isomorfismo de $T_x(M)$ sobre $T_{f(x)}(\widehat{M})$. Mostrar que existe então um aberto U de M, com $K \subset U$, tal que $f_{/U}$ seja um difeomorfismo de U sobre

um aberto V de $\widehat{M}$.[56]
Sugestão: Demonstrar e utilizar o seguinte resultado de natureza puramente topológica: Sejam M e $\widehat{M}$ espaços topológicos, o segundo dos quais de Hausdorff. Seja $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação contínua em todos os pontos de um certo conjunto compacto $K \subset M$ tal que a restrição $f_{/K}$ seja injectiva e que, para cada $x \in K$, exista um aberto U_x de M, com $x \in U_x$, tal que a restrição $f_{/U_x}$ seja injectiva. Existe então um aberto U de M, com $K \subset U$, tal que a restrição $f_{/U}$ é injectiva. Para demonstrar este resultado utilizar duas vezes a propriedade das coberturas abertas dum compacto, demonstrando, como passo intermédio, que, para cada $x_0 \in K$, existem abertos V_{x_0} e W_{x_0} de M, com $x_0 \in V_{x_0}$ e $K \subset W_{x_0}$, tais que, se $x \in V_{x_0}$, $y \in W_{x_0}$ e $f(x) = f(y)$, então $x = y$.

Ex II.25 Seja E um espaço vectorial real, de dimensão $n \geq 1$, munido de produto interno. Lembrar que uma aplicação linear $\xi\colon E \to E$ se diz *autoadjunta* se, quaisquer que sejam $x, y \in E$, se tem $\langle \xi(x), y\rangle = \langle x, \xi(y)\rangle$. Mostrar que toda a aplicação linear autoadjunta $\xi\colon E \to E$ admite um *vector próprio* não nulo x_0, isto é, um vector para o qual $\xi(x_0) = ax_0$, para um certo $a \in \mathbb{R}$. **Sugestão:** Lembrar que $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ é uma variedade sem bordo com dimensão $n-1$ e que, para cada $x_0 \in S$, $T_{x_0}(S)$ é o conjunto dos vectores $u \in E$ tais que $\langle x_0, u\rangle = 0$. Tomar para x_0 um ponto onde seja máxima a aplicação suave $f\colon S \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \langle \xi(x), x\rangle$.

Ex II.26 Sejam $x_0 \in M \subset E$, $y_0 \in M' \subset E'$ e $z_0 \in \widehat{M} \subset \widehat{E}$ tais que (M, x_0), (M', y_0) e $(\widehat{M}, z_0)$ sejam variedades sem bordo, com dimensões m, m' e n, respectivamente. Sejam $f\colon M \to \widehat{M}$ e $g\colon M' \to \widehat{M}$ duas aplicações suaves, tais que $f(x_0) = z_0 = g(y_0)$ e que seja verificada a seguinte *condição de transversalidade*:

$$Df_{x_0}(T_{x_0}(M)) + Dg_{y_0}(T_{y_0}(M')) = T_{z_0}(\widehat{M}).$$

Mostrar que, sendo $A \subset M \times M'$ o *produto fibrado*

$$A = \{(x, y) \in M \times M' \mid f(x) = g(y)\},$$

o conjunto A é, no ponto (x_0, y_0), uma variedade sem bordo, com dimensão $m + m' - n$, e caracterizar o espaço vectorial tangente $T_{(x_0,y_0)}(A)$.

Ex II.27 Mostrar que, para cada inteiro $n \in \mathbb{Z}$, fica bem definida uma aplicação $f_n\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pela condição de se ter, para $r > 0$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n(r\cos(t), r\sin(t)) = (r\cos(nt), r\sin(nt)),$$

e utilizar II.4.31 para mostrar que a aplicação f_n é suave.

[56] Reparar que o teorema da função inversa não é mais do que o caso particular deste resultado, em que o compacto K é um conjunto unitário.

Ex II.28 **(Um resultado de Álgebra Linear)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n e $\xi_1, \ldots, \xi_m : E \to \mathbb{R}$ m aplicações lineares.
a) Mostrar que, se a dimensão do subespaço vectorial de $L(E;\mathbb{R})$ gerado pelos ξ_j for p, então

$$E' = \{u \in E \mid \underset{j}{\forall} \xi_j(u) = 0\}$$

é um subespaço vectorial de E com dimensão $n - p$. **Sugestão:** Reduzir o resultado ao caso em que os ξ_j são linearmente independentes e, nesse caso, utilizar o lema II.4.35.
b) Mostrar que, se $\xi : E \to \mathbb{R}$ é uma aplicação linear, então ξ anula-se sobre o subespaço vectorial E', referido em a), se, e só se, existem $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, tais que $\xi = a_1\xi_1 + \cdots + a_m\xi_m$.

Ex II.29 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n, $U \subset E$ um aberto e $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$ aplicações suaves. Seja

$$M = \{x \in E \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0\}$$

e suponhamos que, para um certo $x_0 \in M$, as aplicações lineares $Df_{j\,x_0} \in L(E;\mathbb{R})$ são linearmente independentes. Mostrar que, se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma aplicação suave, tal que $f_{/M}$ admita no ponto $x_0 \in M$ um máximo relativo ou um mínimo relativo, então existem $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$Df_{x_0} = a_1 Df_{1\,x_0} + \cdots + a_m Df_{m\,x_0}.$$

(Este resultado é a base do conhecido *método dos multiplicadores de Lagrange*, para a determinação de extremos condicionados).
Sugestão: Utilizar II.4.34 e a alínea b) de II.2.7.

Ex II.30 Seja $\mathbb{K}$ um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e notemos $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o espaço vectorial de dimensão n^2, cujos elementos são as matrizes quadradas de elementos de $\mathbb{K}$, com n linhas e n colunas. Para cada matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, seja $\det(X) \in \mathbb{K}$ o respectivo determinante, e notemos $SL(n,\mathbb{K})$ o subconjunto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$SL(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(X) = 1\},$$

conjunto a que se costuma dar o nome de *grupo linear especial*.
a) Mostrar que $SL(n,\mathbb{K})$ é um grupo, relativamente à operação de multiplicação de matrizes, tendo a matriz identidade I como elemento neutro.
b) Mostrar que $SL(n,\mathbb{K})$ é, no elemento I, uma variedade sem bordo com dimensão $n^2 - 1$, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e dimensão $2n^2 - 2$, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e que o espaço vectorial $T_I(SL(n,\mathbb{K}))$ é o conjunto das matrizes A tais que $\mathrm{tr}(A) = 0$ (notamos $\mathrm{tr}(A)$ o *traço* da matriz A, isto é, a soma dos elementos da sua diagonal principal). **Sugestão:** A aplicação $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é suave e tem-se $D\det_I(A) = \mathrm{tr}(A)$.
c) Mostrar que, para cada $X \in SL(n,\mathbb{K})$, tem lugar um difeomorfismo de $SL(n,\mathbb{K})$ sobre $SL(n,\mathbb{K})$, que a cada Y associa $X \times Y$ e deduzir daqui que

$SL(n, \mathbb{K})$ é uma variedade sem bordo com a mesma dimensão em todos os pontos, caracterizando cada espaço vectorial tangente $T_X(SL(n, \mathbb{K}))$.

Ex II.31 Para cada matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notamos X^* a respectiva matriz transposta e lembremos que uma matriz X é dita *simétrica* (resp. *antissimétrica*) se se tem $X^* = X$ (resp. $X^* = -X$). Lembremos também que uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é dita *ortogonal* se for invertível e com $X^{-1} = X^*$. Notemos $O(n)$ o conjunto das matrizes ortogonais, conjunto a que se costuma dar o nome de *grupo ortogonal*.
a) Mostrar que $O(n)$ é um grupo, relativamente à operação de multiplicação de matrizes, tendo a matriz identidade I como elemento neutro.
b) Mostrar que $O(n)$ é, na matriz identidade I, uma variedade sem bordo, com dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ e que $T_I(O(n))$ é o espaço vectorial constituído pelas matrizes antissimétricas. **Sugestão:** Aplicar II.4.32 a $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definida por $f(X) = X^* \times X$, reparando que esta aplicação toma valores no subespaço vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituído pelas matrizes simétricas.
c) Utilizar o mesmo raciocínio que na alínea c) do exercício precedente para mostrar que $O(n)$ é uma variedade sem bordo com dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ em todos os seus elementos e determinar o espaço vectorial tangente em cada um deles.

Ex II.32 Mais geralmente, para cada $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notamos X^* a respectiva matriz transconjugada e dizemos que uma matriz X é *unitária* se for invertível e com $X^{-1} = X^*$. Notemos $U(n)$ o conjunto das matrizes complexas unitárias, com n linhas e n colunas, conjunto a que se costuma dar o nome de *grupo unitário*.
a) Mostrar que $U(n)$ é um grupo, relativamente à operação de multiplicação de matrizes, tendo a matriz identidade I como elemento neutro.
b) Mostrar que $U(n)$ é, na matriz identidade I, uma variedade sem bordo, com dimensão n^2 e que $T_I(U(n))$ é o espaço vectorial constituído pelas matrizes complexas X tais que $X^* = -X$. **Sugestão:** A mesma que para o exercício precedente.
c) Mostrar que $U(n)$ é uma variedade sem bordo com dimensão n^2 em todos os seus elementos e determinar o espaço vectorial tangente em cada um deles.

Ex II.33 Seja G uma variedade, munida de uma estrutura de grupo, tal que a aplicação $\mu: G \times G \to G$, definida por $\mu(x, y) = x \cdot y$, seja suave.
a) Mostrar que, para cada $x \in G$, têm lugar difeomorfismos $L_x, R_x: G \to G$, definidos por $L_x(y) = x \cdot y$ e $R_x(y) = y \cdot x$ (a *translação à esquerda* e a *translação à direita*).
b) Deduzir de a) que G é variedade sem bordo e com a mesma dimensão em todos os pontos.
c) Mostrar que, se $(x, y) \in G \times G$, tem-se

$$D\mu_{(x,y)}(u, v) = D(L_x)_y(v) + D(R_y)_x(u)$$

e que, em particular, notando e o elemento neutro de G,

$$D\mu_{(e,e)}(u,v) = u + v.$$

d) Mostrar que tem lugar uma bijecção $\widehat{\mu}: G \times G \to G \times G$, definida por $\widehat{\mu}(x,y) = (x, \mu(x,y))$, e utilizar o exercício II.23 para mostrar que $\widehat{\mu}$ é um difeomorfismo. Deduzir daqui que é suave a aplicação $\varphi: G \to G$, definida por $\varphi(x) = x^{-1}$ (o inverso no grupo) e que se tem $D\varphi_e(u) = -u$. Concluir, em particular, que G é um grupo de Lie.

Ex II.34 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, munido de produto interno. Se $k \le n$, mostrar que o subconjunto $V_k(E)$ de E^k, constituído pelos sistemas ortonormados $(x_1, \dots, x_k)$, é uma variedade compacta sem bordo, com dimensão $kn - \frac{k(k+1)}{2}$, no caso real, e $2kn - k^2$, no caso complexo (aos $V_k(E)$ costuma-se dar o nome de *variedades de Stiefel*). Mostrar ainda que, para cada $(x_1, \dots, x_k) \in V_k(E)$, o espaço tangente $T_{(x_1,\dots,x_k)}(V_k(E))$ é o conjunto dos $(u_1, \dots, u_k) \in E^k$ tais que, quaisquer que sejam i, j entre 1 e k,

$$\langle u_i, x_j \rangle + \langle x_i, u_j \rangle = 0.$$

Sugestão: Utilizar II.5.6 e um isomorfismo conveniente de $L(\mathbb{K}^k; E)$ sobre E^k.

Ex II.35 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, munido de um produto interno, e consideremos a respectiva variedade de Grassmann $G(E)$, com as subvariedades abertas $G_k(E)$ (cf. II.5.13). Mostrar que as variedades $G_k(E)$ são conexas. **Sugestão:** Lembrar que, como foi visto nos exercícios I.17 e I.18, os grupos de Lie $U(E)$ e $SO(E)$ são conexos.

Ex II.36 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n e seja $G'(E)$ o conjunto das aplicações lineares $\lambda \in L(E;E)$ tais que $\lambda \circ \lambda = \lambda$. Mostrar que existe uma bijecção natural entre $G'(E)$ e o conjunto dos pares (F, G) de subespaços vectoriais de E tais que $E = F \oplus G$, associando a cada λ o par $(\lambda(E), \ker(\lambda))$, e adaptar o que foi feito em II.5.13 para mostrar que $G'(E)$ é uma variedade sem bordo e com

$$T_\lambda(G'(E)) = \{\alpha \in L(E;E) \mid \alpha \circ \lambda + \lambda \circ \alpha = \alpha\}.$$

Se λ corresponde ao par (F, G), com F de dimensão k, apresentar uma caracterização matricial de $T_\lambda(G'(E))$ realtiva à soma directa referida e deduzir que $G'(E)$ tem em λ dimensão $2k(n-k)$, no caso real, e $4k(n-k)$, no caso complexo. Verificar ainda que, como no caso referido, $G'(E)$ é união disjunta de subvariedades abertas $G'_k(E)$, onde $0 \le k \le n$.

Ex II.37 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, munido de um produto interno.
a) Para cada $\lambda \in G'(E)$, isto é, para cada $\lambda \in L(E;E)$ tal que $\lambda \circ \lambda = \lambda$, mostrar que a aplicação linear $\lambda + \lambda^* - Id_E: E \to E$ é um isomorfismo.

Sugestão: Se $x \in E$ é tal que $\lambda(x) + \lambda^*(x) = x$, mostrar que $\lambda(\lambda^*(x)) = 0$ e $\lambda^*(\lambda(x)) = 0$ e, considerando os produtos internos por x, deduzir que $\lambda^*(x) = 0$ e $\lambda(x) = 0$, donde $x = 0$.
b) Nas condições de a), reparar que a imagem de $\lambda^* - Id_E$ está contida em $\ker(\lambda^*) = \lambda(E)^\perp$ (cf. o exercício I.1) e deduzir da identidade

$$x = \lambda((\lambda + \lambda^* - Id_E)^{-1}(x)) + (\lambda^* - Id_E)((\lambda + \lambda^* - Id_E)^{-1}(x))$$

que a projecção ortogonal $\varphi(\lambda)$ de E sobre $\lambda(E)$ é dada por

$$\varphi(\lambda) = \lambda \circ (\lambda + \lambda^* - Id_E)^{-1}.$$

c) Concluir que é suave a aplicação $\varphi: G'(E) \to G(E)$, que a cada λ associa a projecção ortogonal de E sobre $\lambda(E)$,[57] e determinar, para cada $\lambda \in G'(E)$, a aplicação linear derivada $D\varphi_\lambda: T_\lambda(G'(E)) \to T_{\varphi(\lambda)}(G(E))$.
d) No caso particular em que $\lambda = \pi_F \in G(E) \subset G'(E)$, reparar que $\varphi(\lambda) = \lambda$ e mostrar que, considerando as matrizes relativas à soma directa ortogonal $E = F \oplus F^\perp$, $D\varphi_\lambda$ associa a cada $\alpha \in T_\lambda(G'(E))$ com matriz $\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$, a aplicação linear com matriz $\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{2,1}^* \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$.

Ex II.38 Sejam E e E' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão n, munidos de produtos internos, e seja $\xi: E \to E'$ um isomorfismo, não necessariamente ortogonal. Mostrar que tem lugar um difeomorfismo associado

$$\xi_*: G(E) \to G(E'),$$

que associa a cada π_F, projecção ortogonal de E sobre o subespaço vectorial F, a projecção ortogonal $\pi_{\xi(F)}$ de E' sobre $\xi(F)$. **Sugestão:** Basta mostrar que ξ_* é uma aplicação suave. Para isso utilizar o exercício anterior, reparando que $\xi \circ \pi_F \circ \xi^{-1}$ pertence a $G'(E')$ e tem imagem $\xi(F)$.

Ex II.39 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita e seja $n \geq 1$. Seja

$$\mathcal{R}_n(E) = \{\xi \in L(E;E) \mid \xi^n = Id_E\} \subset GL(E)$$

o conjunto das raízes de índice n da identidade no grupo de Lie $GL(E)$.
a) Mostrar que $\mathcal{R}_n(E)$ é uma variedade sem bordo e que, para cada $\xi \in \mathcal{R}_n(E)$,

$$T_\xi(\mathcal{R}_n(E)) = \{\alpha \in L(E;E) \mid \alpha \circ \xi^{n-1} + \xi \circ \alpha \circ \xi^{n-2} + \cdots + \xi^{n-2} \circ \alpha \circ \xi + \xi^{n-1} \circ \alpha = 0\}.$$

Verificar ainda que $T_\xi(\mathcal{R}_n(E))$ pode ser caracterizado alternativamente como o conjunto das aplicações lineares que se pode escrever na forma

[57]"Moralmente", φ associa F a cada par (F, G).

$\beta\circ\xi-\xi\circ\beta$, com $\beta\in L(E;E)$.[58]
Sugestão: Para cada $\xi\in\mathcal{R}_n(E)$ fixado, considerar uma aplicação suave $\varphi\colon GL(E)\to\mathcal{R}_n(E)$, definida por $\varphi(\eta)=\eta\circ\xi\circ\eta^{-1}$, que aplica Id_E em ξ, e aplicar o segundo teorema da submersão, reparando que, se $\alpha\in L(E;E)$ verifica

$$\alpha\circ\xi^{n-1}+\xi\circ\alpha\circ\xi^{n-2}+\cdots+\xi^{n-2}\circ\alpha\circ\xi+\xi^{n-1}\circ\alpha=0,$$

então tem-se $\alpha=\beta\circ\xi-\xi\circ\beta$, com $\beta\in L(E;E)$ definido por

$$\beta=-\frac{1}{n}(\alpha\circ\xi^{n-1}+2\,\xi\circ\alpha\circ\xi^{n-2}+\cdots+(n-1)\,\xi^{n-2}\circ\alpha\circ\xi+n\,\xi^{n-1}\circ\alpha).$$

b) Lembrar que dois elementos $\xi,\xi'\in GL(E)$ (como, mais geralmente, dois elementos de um grupo arbitrário) se dizem *conjugados* se existe $\eta\in GL(E)$ tal que $\xi'=\eta\circ\xi\circ\eta^{-1}$ e que se está em presença de uma relação de equivalência em $GL(E)$ a cujas classes de equivalência se dá o nome de *classes de conjugação*. Verificar que o raciocíno feito na alínea precedente mostra, mais geralmente, que $\mathcal{R}_n(E)$ é uma união de classes de conjugação de $GL(E)$ e que cada uma destas é aberta em $\mathcal{R}_n(E)$. Concluir, em particular, que Id_E é um ponto isolado de $\mathcal{R}_n(E)$.
c) Verificar que existe um difeomorfismo da variedade $G'(E)$, referida no exercício precedente, sobre $\mathcal{R}_2(E)$, que a cada $\lambda\in G'(E)$ associa $2\lambda-Id_E$.

Ex II.40 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, munido de produto interno, e seja $n\ge 1$. Sendo $O(E)$ o grupo ortogonal, seja

$$\widehat{\mathcal{R}}_n(E)=\{\xi\in O(E)\mid \xi^n=Id_E\}\subset O(E)$$

o conjunto das raízes de índice n da identidade no grupo de Lie $O(E)$.
a) Mostrar que $\widehat{\mathcal{R}}_n(E)$ é uma variedade sem bordo e que, para cada $\xi\in\widehat{\mathcal{R}}_n(E)$,

$$T_\xi(\widehat{\mathcal{R}}_n(E))=\{\alpha\in T_\xi(O(E))\mid \alpha\circ\xi^{n-1}+\xi\circ\alpha\circ\xi^{n-2}+\cdots+\xi^{n-2}\circ\alpha\circ\xi+\xi^{n-1}\circ\alpha=0\}.$$

Verificar ainda que $T_\xi(\widehat{\mathcal{R}}_n(E))$ pode ser caracterizado alternativamente como o conjunto das aplicações lineares que se podem escrever na forma $\beta\circ\xi-\xi\circ\beta$, com $\beta\in L_{-aa}(E;E)$.
Sugestão: Análoga à do exercício precedente, mas utilizando o grupo ortogonal $O(E)$ no lugar de $GL(E)$ e lembrando a caracterização do espaço tangente ao grupo ortogonal.
b) Verificar que o raciocíno feito na alínea precedente mostra, mais geralmente, que $\widehat{\mathcal{R}}_n(E)$ é uma união de classes de conjugação de $O(E)$ e que cada uma destas é aberta em $\widehat{\mathcal{R}}_n(E)$. Concluir, em particular, que Id_E é um

[58] Este exercício e o próximo, assim como as sugestões para as respectivas resoluções, são devidos a Cecília Ferreira.

ponto isolado de $\widehat{\mathcal{R}}_n(E)$.
c) Verificar que existe um difeomorfismo da variedade de Grassmann $G(E)$, referida em II.5.13, sobre $\widehat{\mathcal{R}}_2(E)$, que a cada $\lambda \in G(E)$ associa $2\lambda - Id_E$. Interpretar esse difeomorfismo, mostrando que $\widehat{\mathcal{R}}_2(E)$ é o conjunto das simetrias relativas a subespaços vectoriais de E.

Ex II.41 Seja E um espaço vectorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $A \subset E$. Mostrar que A é um sector de índice 1 se, e só se, existe uma aplicação linear $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$, com $\lambda \neq 0$, tal que

$$A = \{x \in E \mid \lambda(x) \geq 0\}.$$

Ex II.42 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade.
a) Mostrar que, para cada $p \geq 0$, $\bigcup\limits_{j \geq p} \partial_j(M)$ é fechado em M.
b) Mostrar que, se $x \in \partial_p(M)$, então, para cada $0 \leq j \leq p$, x é aderente a $\partial_j(M)$.

Ex II.43 Sejam $a < b$ dois números reais. Mostrar que o intervalo $[a, b]$ é uma variedade de dimensão 1, com $\partial_1([a, b]) = \{a, b\}$.

Ex II.44 Mostrar que os seguintes conjuntos *não* são variedades no ponto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$:
a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}$.
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \vee y \geq 0\}$.
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq x^2\}$.

Ex II.45 Considerar a *pirâmide quadrangular* A de $\mathbb{R}^3$, constituída pelos pontos que se podem escrever na forma (tx, ty, t), com $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ e $t \in [0, 1]$. Mostrar que A *não* é uma variedade no ponto $(0, 0, 0)$.
Sugestão: Mostrar que o cone tangente $\mathrm{t}_{(0,0,0)}(A)$ não é um sector de $\mathbb{R}^3$.

Ex II.46 Considerar o *cone* A de $\mathbb{R}^3$, constituído pelos pontos que se podem escrever na forma (tx, ty, t), com $t \in [0, 1]$ e $x^2 + y^2 \leq 1$. Mostrar que A não é uma variedade no ponto $(0, 0, 0)$.

Ex II.47 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $x_0 \in M \subset E$, tal que (M, x_0) seja uma variedade com dimensão n e índice p, e $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Mostrar que os conjuntos

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y) \in M \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}, \\ G_f^+ &= \{(x, y) \in M \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}, \\ G_f^- &= \{(x, y) \in M \times \mathbb{R} \mid y \leq f(x)\}, \end{aligned}$$

são variedades no ponto $(x_0, f(x_0))$ e determinar quais as dimensões e índices nesse ponto.

Ex II.48 Seja $S_+ \subset \mathbb{R}^3$ a *meia superfície esférica*

$$S_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Mostrar que S_+ é uma variedade de dimensão 2 e determinar, para cada um dos pontos $(0,0,1)$ e $(0,1,0)$, o índice e o cone tangente.

Ex II.49 Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o *igloo de esquimó*,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0, x \leq \frac{1}{2}\}.$$

Mostrar que M é uma variedade de dimensão 2 e determinar os subconjuntos $\partial_0(M)$, $\partial_1(M)$ e $\partial_2(M)$. Determinar qual o cone tangente de M no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Ex II.50 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n e $x_0 \in M \subset E$ tais que (M, x_0) seja uma variedade com dimensão n e índice 1. Seja $u \in E$ tal que $u \in \mathrm{t}_{x_0}(M)$, mas $-u \notin \mathrm{t}_{x_0}(M)$.[59]
Mostrar que existe $\varepsilon > 0$ e um aberto U de $\partial_1(M)$, com $x_0 \in U$, tal que:
1) Para cada $x \in U$ e $t \in]0, \varepsilon[$, $x + tu \in \partial_0(M)$ e $x - tu \notin M$;
2) Tem lugar um difeomorfismo de $U \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ sobre um aberto $\widehat{U}$ de E, com $x_0 \in \widehat{U}$, que a cada (x,t) associa $x + tu$.[60]
Sugestão: Utilizar II.6.33 para garantir a existência de um aberto $\widehat{U}'$ de E, com $x_0 \in \widehat{U}'$, e de uma submersão $\varphi\colon \widehat{U}' \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x_0) = 0$ e que $M \cap \widehat{U}'$ seja o conjunto dos $x \in \widehat{U}'$ tais que $\varphi(x) \geq 0$. Verificar que se pode escolher U e ε de modo que, para cada $x \in U$ e $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, se tenha $x + tu \in \widehat{U}'$ e, notando $f(x,t) = \varphi(x + tu)$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D\varphi_{x+tu}(u) > 0.$$

Ex II.51 **a)** Seja $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ tal que (M, x_0) seja uma variedade sem bordo com dimensão $n-1$. Mostrar que existe $1 \leq j \leq n$ tal que o vector e_j da base canónica de $\mathbb{R}^n$ não pertença a $T_{x_0}(M)$ e que, para cada j nessas condições, existe $\varepsilon > 0$ verificando a condição seguinte: Sendo

$$\widehat{U} = \prod_k]x_{0k} - \varepsilon, x_{0k} + \varepsilon[\subset \mathbb{R}^n,$$
$$U = \prod_{k \neq j}]x_{0k} - \varepsilon, x_{0k} + \varepsilon[\subset \mathbb{R}^{n-1},$$

existe uma aplicação suave $f\colon U \to]x_{0j} - \varepsilon, x_{0j} + \varepsilon[$ tal que, para cada

[59] Intuitivamente, um vector que aponta “estritamente para dentro” de M.
[60] Estas conclusões costumam ser expressas intuitivamente pela afirmação de que $M \cap \widehat{U}$ é constituído pela parte de $\widehat{U}$ que está de um dos lados de $\partial_1(M)$.

$x \in \widehat{U}$, tem-se $x \in M$ se, e só se, $x_j = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.[61]
Sugestão: Aplicar o teorema da função inversa à restrição a M da projecção $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ que "esquece" a coordenada j.
b) Seja $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ tal que (M, x_0) seja uma variedade com dimensão n e índice 1. Mostrar que existe $1 \leq j \leq n$ tal que o vector e_j da base canónica de $\mathbb{R}^n$ não pertença a $T_{x_0}(\partial_1(M))$ e que, para cada j nessas condições, existe $\varepsilon > 0$ tal que, sendo

$$\widehat{U} = \prod_k]x_{0k} - \varepsilon, x_{0k} + \varepsilon[\subset \mathbb{R}^n,$$
$$U = \prod_{k \neq j}]x_{0k} - \varepsilon, x_{0k} + \varepsilon[\subset \mathbb{R}^{n-1},$$

existe uma aplicação suave $f: U \to]x_{0j} - \varepsilon, x_{0j} + \varepsilon[$ para a qual se verifica uma das duas condições seguintes:[62]
1) Se $x \in \widehat{U}$, tem-se $x \in M$ se, e só se, $x_j \geq f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$;
2) Se $x \in \widehat{U}$, tem-se $x \in M$ se, e só se, $x_j \leq f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.
Sugestão: Aplicar a conclusão de a) à variedade $\partial_1(M)$, no ponto x_0, e ter em conta a conclusão do exercício II.50.

Ex II.52 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $a < b$ dois números reais e $f: [a, b] \to E$ uma aplicação suave, tal que $f'(t) \neq 0$, para cada $t \in [a, b]$ (um *caminho regular*). Mostrar que, se f é injectiva, então f é um difeomorfismo de $[a, b]$ sobre a sua imagem, em particular $f([a, b])$ é uma variedade de dimensão 1, com bordo $\{f(a), f(b)\}$. Determinar quais o cone tangente e o espaço vectorial tangente em cada elemento de $f([a, b])$.

Ex II.53 Generalizar o que foi feito no exercício II.26, permitindo que as variedades (M, x_0) e (M', y_0) tenham bordo, à custa de reforçar convenientemente a condição de transversalidade.

Ex II.54 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n e $M \subset E$ uma variedade *sem cantos*, de dimensão igual à do espaço ambiente (portanto $\partial_j(M) = \emptyset$, para cada $j \geq 2$). Mostrar que existe um aberto U de E, com $M \subset U$, e uma aplicação suave $f: U \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \partial_1(M)$, $Df_x: E \to \mathbb{R}$ seja uma aplicação linear sobrejectiva e que se tenha

$$M = \{x \in U \mid f(x) \geq 0\},$$
$$\partial_1(M) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

(a variedade é definível globalmente por uma inequação). Mostrar ainda que, no caso em que M é fechado em E, pode-se tomar $U = E$. **Sugestão:** A

[61] Localmente, pelo menos no caso em que $j = n$, podemos dizer que M é o gráfico da aplicação f.
[62] Pelo menos no caso em que $j = n$, podemos dizer que, localmente, M é a parte de cima ou a parte de baixo do gráfico de f.

versão local deste resultado é uma consequência do lema em II.6.33. Para passar para a versão global, utilizar uma partição da unidade, começando por substituir provisoriamente o intervalo $[0,+\infty[$ e o conjunto $\{0\}$ por $[1,+\infty[$ e $\{1\}$, respectivamente.

Ex II.55 Seja M um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável. Mostrar que a classe dos subconjuntos σ-compactos de M é fechada para as intersecções finitas e para as uniões finitas ou numeráveis e contém tanto os subconjuntos abertos como os subconjuntos fechados de M. Mostrar ainda que, se $\widehat{M}$ é outro espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável e $f\colon M \to \widehat{M}$ é uma aplicação contínua, então a imagem directa de um subconjunto σ-compacto de M é um subconjunto σ-compacto de $\widehat{M}$ e a imagem recíproca de um subconjunto σ-compacto de $\widehat{M}$ é um subconjunto σ-compacto de M.

Ex II.56 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n, U um aberto de E e $K \subset U$ um conjunto compacto. Mostrar que existe uma variedade compacta, sem cantos, de dimensão n, $M \subset U$, tal que $K \subset \partial_0(M)$. **Sugestão:** Pelo teorema da partição da unidade, e depois de substituir eventualmente U por um aberto mais pequeno que seja limitado, considerar uma função suave $f\colon E \to [0,1]$, nula fora duma certa parte compacta de U e tal que $f(x) = 1$, para cada $x \in K$. Construir a variedade M a partir dum valor regular de f no intervalo $]0,1[$.

Ex II.57 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n e $M \subset E$ uma variedade de dimensão menor ou igual a m em cada um dos seus pontos.
a) Mostrar que, se $n \geq 2m+1$, então, para cada $\delta > 0$, existe $w \in E$, com $\|w\| < \delta$, tal que $M \cap (w+M) = \emptyset$. Constatar que a condição $n \geq 2m+1$ não é desnecessária, examinando o que se passa com a circunferência de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^2$. **Sugestão:** Aplicar o teorema de Sard, ou directamente o seu corolário II.7.17, à aplicação $f\colon M \times M \to E$, definida por $f(x,y) = y - x$.
b) Mostrar que, se $n \geq 2m+2$, então existe $w \in E$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $x \in M$, $x + tw \notin M$. **Sugestão:** Considerar a aplicação $g\colon M \times M \times \mathbb{R} \to E$, definida por $g(x,y,s) = s(y-x)$.

Ex II.58 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade. Mostrar que o *bordo total*

$$\partial(M) = \bigcup_{k\geq 1} \partial_k(M)$$

é um subconjunto magro de M.

Ex II.59 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades, ambas eventualmente com bordo e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Generalizando as definições em II.7.1 e II.7.15, chamemos *pontos regulares* de f aos pontos $x \in M$ tais que, sendo $x \in \partial_k(M)$, a aplicação linear

$$D(f_{/\partial_k(M)}) : T_x(\partial_k(M)) \to T_{f(x)}(\widehat{M})$$

seja sobrejectiva, chamemos *pontos críticos* de M aos restantes pontos de M, chamemos *valores críticos* de f àqueles que são imagem de algum ponto crítico de f e *valores regulares* de f aos elementos de $\widehat{M}$ que não são valores críticos. Verificar que, se $x \in M$ é um ponto regular de M, então $f(x) \in \partial_0(\widehat{M})$ e que, ainda neste caso, o conjunto dos valores críticos de f é um subconjunto magro de $\widehat{M}$.

Ex II.60 Lembrar a noção de grupo de Lie referida em II.5.3 e as respectivas propriedades, estudadas no exercício II.33.
Mostrar que, se $G \subset E$ e $\widehat{G} \subset \widehat{E}$ são grupos de Lie e $f : G \to \widehat{G}$ é um morfismo de grupos suave e sobrejectivo então f é uma submersão.
Sugestão: Utilizar o corolário do teorema de Sard em II.7.22, depois de mostrar que f é uma aplicação suave homogénea.

Ex II.61 Sejam G um grupo de Lie, com elemento neutro e, e M uma variedade. Chama-se *acção suave* (à esquerda) de G em M a uma aplicação suave $G \times M \to M$, que notaremos $(g, x) \mapsto gx$, verificando as propriedades $ex = x$ e $(g \cdot h)x = g(hx))$, para $x \in M$ e $g, h \in G$. Uma tal acção diz-se *transitiva* se, quaisquer que sejam $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $y = gx$.
a) Mostrar que, dada uma acção suave, tem lugar, para cada $g \in G$, um difeomorfismo $\widehat{L}_g : M \to M$, definido por $\widehat{L}_g(x) = gx$, cujo inverso é $\widehat{L}_{g^{-1}}$ e deduzir que, no caso em que a acção suave é transitiva, M é uma variedade homogénea, em particular não tem bordo e tem a mesma dimensão em todos os pontos.
b) Mostar que, se E é um espaço euclidiano ou hermitiano de dimensão n, então, para cada $0 \le k \le n$, tem lugar uma acção suave transitiva do grupo de Lie $O(E)$ na variedade de Grassmann $G_k(E)$ definida, por $(\xi, \lambda) \mapsto \xi \circ \lambda \circ \xi^*$, ou, equivalentemente, por $(\xi, \pi_F) \mapsto \pi_{\xi(F)}$.
c) Mostrar que, dada uma acção suave transitiva, tem lugar, para cada $x \in M$, uma aplicação suave sobrejectiva $\widehat{R}_x : G \to M$, definida por $\widehat{R}_x(g) = gx$. Verificar que esta aplicação é homogénea e deduzir, pelo corolário do teorema de Sard em II.7.22, que a aplicação é uma submersão.

Ex II.62 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, munido de um produto interno. Seja $0 \le k \le n$ e consideremos a variedade de Stiefel $V_k(E) \subset E^k$, dos sistemas ortonormados de k vectores de E (cf. o exercício II.34), e a variedade de Grassmann $G_k(E) \subset L(E; E)$, das projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de dimensão k de E (cf. II.5.13).
a) Mostrar que tem lugar uma aplicação suave $\Phi : V_k(E) \to G_k(E)$, que a cada $(x_1, \ldots, x_k)$ associa a projecção ortogonal π_F, onde F é o subespaço vectorial gerado por por $x_1, \ldots, x_k$ e que esta aplicação é sobrejectiva.
b) Verificar que a aplicação suave Φ é homogénea e aplicar o corolário do teorema de Sard em II.7.22 para concluir que $\Phi : V_k(E) \to G_k(E)$ é uma

submersão. **Sugestão:** Cada isomorfismo ortogonal $\xi: E \to E$ determina um difeomorfismo natural $V_k(E) \to V_k(E)$ e um difeomorfismo natural $G_k(E) \to G_k(E)$, que a cada π_F associa $\pi_{\xi(F)} = \xi \circ \pi_F \circ \xi^{-1}$.

Ex II.63 Sejam $M \subset E$, $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $\tilde{M} \subset \tilde{E}$ três variedades sem bordo, $f: M \times \widehat{M} \to \tilde{M}$ uma aplicação suave e $z_0 \in \tilde{M}$ um valor regular de f. Verificar que existe um conjunto magro $A \subset M$ tal que, para cada $x \in M \setminus A$, z_0 é um valor regular da aplicação $f_{(x)}: \widehat{M} \to \tilde{M}$, definida por $f_{(x)}(y) = f(x, y)$. **Sugestão:** Reparar que o conjunto

$$C = \{(x, y) \in M \times \widehat{M} \mid f(x, y) = z_0\}$$

é uma variedade sem bordo, determinar o respectivo espaço vectorial tangente em cada ponto, e aplicar o teorema de Sard à restrição da primeira projecção $M \times \widehat{M} \to M$ a C.

CAPÍTULO III
Fibrados Vectoriais e o Ambiente Euclidiano

§1. Fibrados vectoriais.

III.1.1 Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita e $A \subset G$ um subconjunto arbitrário. Se E é um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, vamos chamar *família de subespaços vectoriais de* E *de base* A a uma família $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ em que, para cada $x \in A$, E_x é um subespaço vectorial de E. Dizemos então que A é a *base* de $\underline{E}$ e que E_x é a *fibra* de $\underline{E}$ no ponto $x \in A$. Dizemos também que G é o *espaço ambiente da base* e que E é o *espaço ambiente das fibras*.

Uma família de subespaços vectoriais de E de base A é uma aplicação cujo domínio é A e que toma valores no conjunto dos subespaços vectoriais de E. Os fibrados vectoriais, que definiremos em seguida, vão ser intuitivamente as famílias de subespaços vectoriais que, enquanto aplicações de domínio A, são suaves. O facto de o conjunto dos subespaços vectoriais de E não ser uma parte de um espaço vectorial faz com que esta definição não possa ser formalizada, dentro do contexto em que nos colocamos. Somos portanto obrigados a encontrar uma definição *ad hoc*, que corresponda à ideia intuitiva atrás referida. Será cómodo começar por apresentar algumas definições que correspondem, neste contexto, à composição e à restrição de aplicações.

III.1.2 Sejam $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ e $A \subset G$ dois subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita e $f \colon \widehat{A} \to A$ uma aplicação. Se $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ é uma família de subespaços vectoriais de E de base A, define-se a sua *imagem recíproca* por meio de f como sendo a família de subespaços vectoriais de E de base $\widehat{A}$

$$f^*\underline{E} = \big(E_{f(y)}\big)_{y \in \widehat{A}}$$

(olhando para $\underline{E}$ como aplicação de domínio A, $f^*\underline{E}$ vai ser portanto a composta de $\underline{E}$ com f). Um caso particular importante é aquele em que $\widehat{A} \subset A \subset G$ e em que tomamos para $f \colon \widehat{A} \to A$ a *inclusão*, definida por $f(x) = x$, para cada $x \in \widehat{A}$. Dizemos então que a imagem recíproca $f^*\underline{E}$ é a *restrição* de $\underline{E}$ a $\widehat{A}$ e notamo-la $\underline{E}_{/\widehat{A}}$. Tem-se portanto

$$\underline{E}_{/\widehat{A}} = (E_x)_{x \in \widehat{A}}$$

(olhando para $\underline{E}$ como aplicação de domínio A, temos simplesmente a restrição desta aplicação ao subconjunto $\widehat{A}$ de A).

III.1.3 Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$ um subconjunto, E um espaço vectorial e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A. Se $\widehat{E}$ é outro espaço vectorial e $\xi: E \to \widehat{E}$ é uma aplicação linear, define-se a *imagem directa* de $\underline{E}$ por meio de f como sendo a família de subespaços vectoriais de $\widehat{E}$ de base A

$$\xi_* \underline{E} = (\xi(E_x))_{x\in A}.$$

III.1.4 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A. Chama-se *secção* de $\underline{E}$ a uma família $W = (W_x)_{x\in A}$ tal que, para cada $x \in A$, $W_x \in E_x$ (uma secção é portanto uma escolha de um elemento em cada uma das fibras). Uma secção é uma aplicação de A em E, verificando uma condição restritiva, e dizemos que a secção é *suave* se isso lhe acontecer enquanto aplicação de A em E.

III.1.5 Sejam $A \subset G$, $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A e $W = (W_x)_{x\in A}$ uma secção de $\underline{E}$. Dados $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ e a aplicação $f: \widehat{A} \to A$, define-se a *imagem recíproca* da secção W por meio de f como sendo a secção $f^*W = (W_{f(y)})_{y\in\widehat{A}}$ de $f^*\underline{E}$. É claro que f^*W não é mais do que a composta de W com f pelo que, se a aplicação $f: \widehat{A} \to A$ é suave e se W é uma secção suave de $\underline{E}$, então f^*W é uma secção suave de $f^*\underline{E}$.
Como caso particular importante, temos mais uma vez aquele em que $\widehat{A} \subset A$ e tomamos para $f: \widehat{A} \to A$ a inclusão. A secção imagem recíproca f^*W não é então mais do que a restrição de W a $\widehat{A}$, restrição essa que se nota naturalmente $W_{/\widehat{A}}$.

III.1.6 Sejam $A \subset G$, $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A e $W = (W_x)_{x\in A}$ uma secção de $\underline{E}$. Dados outro espaço vectorial $\widehat{E}$ e uma aplicação linear $\xi: E \to \widehat{E}$, define-se a *imagem directa* da secção W por meio de ξ como sendo a secção $\xi_*W = (\xi(W_x))_{x\in A}$ de $\xi_*\underline{E}$. É claro que ξ_*W não é mais do que a composta de ξ com W pelo que, se W é uma secção suave de $\underline{E}$, também ξ_*W é uma secção suave de $\xi_*\underline{E}$.

III.1.7 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E, de base A. Chama-se *campo de referenciais* de $\underline{E}$ a um sistema de secções suaves $W_1, \ldots, W_n$ de $\underline{E}$, tal que, para cada $x \in A$, $W_{1x}, \ldots, W_{nx}$ seja uma base da fibra E_x. Diz-se que $\underline{E}$ é um *fibrado vectorial trivial* se admitir um campo de referenciais. Diz-se que $\underline{E}$ é um *fibrado vectorial* se $\underline{E}$ é localmente um fibrado vectorial trivial, no sentido que, para cada $x \in A$, exista um aberto U de A, com $x \in U$, tal que $\underline{E}_{/U}$ seja um fibrado vectorial trivial.

III.1.8 Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial de dimensão finita e $F \subset E$ um subespaço vectorial. Tem então lugar um fibrado vectorial trivial, que notaremos F_A, cuja fibra em cada $x \in A$ é igual a F. Dizemos que F_A é o *fibrado vectorial constante* de fibra F.

Dem: Se $w_1, \dots, w_n$ é uma base de F, é claro que as secções suaves constantes de valores $w_1, \dots, w_n$ constituem um campo de referenciais de F_A. □

III.1.9 Seja $M \subset G$ uma variedade. Tem então lugar um fibrado vectorial $T(M)$, de base M, com as fibras contidas em G, cuja fibra em cada $x \in M$ é o espaço vectorial tangente $T_x(M)$. Dizemos que $T(M)$ é o *fibrado vectorial tangente* da variedade M. Mais precisamente, se U é um aberto de M difeomorfo a um aberto dum sector dum espaço vectorial de dimensão finita, então $T(M)_{/U}$ é um fibrado vectorial trivial.

Dem: Sabemos, por definição, que, para cada $x \in M$, existe um aberto U de M, com $x \in U$, um aberto V dum sector A dum espaço vectorial F de dimensão finita e um difeomorfismo $\varphi: V \to U$. O resultado ficará portanto demonstrado se virmos que, para cada U nestas condições, $T(M)_{/U}$ é um fibrado vectorial trivial. Fixemos uma base $w_1, \dots, w_n$ de F. Para cada $x \in U$, $D\varphi_{\varphi^{-1}(x)}$ é um isomorfismo de

$$T_{\varphi^{-1}(x)}(V) = T_{\varphi^{-1}(x)}(A) = F$$

sobre $T_x(U) = T_x(M)$ pelo que, sendo, para cada $1 \leq j \leq n$,

$$W_{j_x} = D\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(w_j),$$

$W_{1x}, \dots, W_{nx}$ vai ser uma base de $T_x(M)$. Se provarmos que cada $W_j = (W_{j_x})_{x \in U}$ é uma secção suave de $T(M)_{/U}$, obtivemos portanto um campo de referenciais de $T(M)_{/U}$ e o resultado ficará demonstrado. Ora, sendo $\widehat{V}$ um aberto de F, contendo V, e $\widehat{\varphi}: \widehat{V} \to G$ uma aplicação suave prolongando φ, sabemos que vai ter lugar uma aplicação suave $D\widehat{\varphi}: \widehat{V} \to L(F; G)$, aplicação essa que, restringida a V e composta à direita com o difeomorfismo $\varphi^{-1}: U \to V$ e à esquerda com a aplicação linear de $L(F; G)$ em G, que a λ associa $\lambda(w_j)$, vai dar precisamente a aplicação $W_j: U \to G$, o que nos permite concluir que cada W_j é efectivamente uma aplicação suave. □

III.1.10 Em geral, quando a variedade M não admitir uma carta global, isto é, quando não for difeomorfa a um aberto dum sector, o fibrado vectorial $T(M)$ poderá não ser trivial. O exemplo que apresentamos em seguida mostra um caso em que uma variedade, que não admite uma carta global, verifica mesmo assim a propriedade de o seu fibrado vectorial tangente ser trivial.

Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Para cada $(x, y) \in S$, sabemos que $T_{(x,y)}(S)$ é o subespaço vectorial de dimensão 1 de $\mathbb{R}^2$ constituído pelos vectores ortogonais a (x, y). Uma vez

que $(-y, x)$ é não nulo e ortogonal a (x, y), concluímos que tem lugar o campo de referenciais de $T(S)$ constituído pela secção suave W, definida por $W_{(x,y)} = (-y, x)$.
Não se deve pensar que este resultado seja generalizável para qualquer dimensão. Por exemplo, pode-se provar, embora com instrumentos de que não dispômos neste curso, que, sendo $S' \subset \mathbb{R}^3$ a superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1,

$$S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$T(S')$ não é um fibrado vectorial trivial, não existindo sequer uma secção suave de $T(S')$ que nunca se anule.[63]

III.1.11 Sejam $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ e $A \subset G$ dois subconjuntos de espaços vectoriais reais de dimensão finita e $f: \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Seja $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A, e consideremos a imagem recíproca $f^*\underline{E}$. Tem-se então:
a) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial, o mesmo acontece a $f^*\underline{E}$;
b) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial, o mesmo acontece a $f^*\underline{E}$.
Dem: Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial, podemos considerar um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_n$ de $\underline{E}$ e então é imediato que se obtém um campo de referenciais $f^*W_1, \ldots, f^*W_n$ para $f^*\underline{E}$. Suponhamos agora que $\underline{E}$ é simplesmente um fibrado vectorial. Dado $y \in \widehat{A}$ arbitrário, vai existir um aberto U de A, com $f(y) \in U$, tal que $\underline{E}_{/U}$ seja um fibrado vectorial trivial. Pela continuidade de f, podemos considerar um aberto V de $\widehat{A}$, com $y \in V$, tal que $f(V) \subset U$. Tem-se então que $(f^*\underline{E})_{/V} = (f_{/V})^*\underline{E}_{/U}$ é um fibrado vectorial trivial, o que mostra que $f^*\underline{E}$ é um fibrado vectorial. □

III.1.12 Sejam $\xi: E \to \widehat{E}$ uma aplicação linear, $A \subset G$ um subconjunto dum espaço vectorial real de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A, e consideremos a imagem directa $\xi_*\underline{E} = (\xi(E_x))_{x \in A}$. Suponhamos que, para cada $x \in A$, a restrição $\xi_{/E_x}: E_x \to \widehat{E}$ é injectiva (o que acontece, em particular se a aplicação linear $\xi: E \to \widehat{E}$ for injectiva). Tem-se então:
a) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial, o mesmo acontece a $\xi_*\underline{E}$;
b) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial, o mesmo acontece a $\xi_*\underline{E}$.
Dem: A conclusão de b) é uma consequência imediata da de a) e esta resulta de que, se $W_1, \ldots, W_n$ é um campo de referenciais de $\underline{E}$, então $\xi_*W_1, \ldots, \xi_*W_n$ é um campo de referenciais de $\xi_*\underline{E}$. □

III.1.13 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial trivial, com $E_x \subset E$, onde E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Seja $W_1, \ldots, W_n$ um campo de referenciais de $\underline{E}$. Seja W uma secção de $\underline{E}$ e sejam $f_1, \ldots, f_n: A \to \mathbb{K}$ as

[63] É este facto que está na origem da impossibilidade, que se pode intuir experimentalmente, de pentear uma *bola cabeluda*, sem permitir a formação de remoínhos.

aplicações definidas por

$$W_x = f_1(x)W_{1x} + \cdots + f_n(x)W_{nx}.$$

Tem-se então que W é uma secção suave se, e só se, cada aplicação $f_j: A \to \mathbb{K}$ é suave.

Dem: É imediato que, se cada $f_j: A \to \mathbb{K}$ é uma aplicação suave, então W é uma aplicação suave de A em E, portanto uma secção suave de $\underline{E}$. Suponhamos, reciprocamente, que W é uma secção suave de $\underline{E}$. Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Podemos então considerar vectores $w_{n+1}, \ldots, w_m \in E$ tais que se obtenha uma base $W_{1x_0}, \ldots, W_{nx_0}, w_{n+1}, \ldots, w_m$ de E. Seja $\mu = (\mu_x)_{x \in A}$ a aplicação suave de A em $L(\mathbb{K}^m; E)$ definida por

$$\mu_x(a_1, \ldots, a_m) = a_1 W_{1x} + \cdots + a_n W_{nx} + a_{n+1} w_{n+1} + \cdots + a_m w_m$$

(cf. II.2.12). Uma vez que μ_{x_0} aplica a base canónica de $\mathbb{K}^m$ numa base de E, concluímos que μ_{x_0} é um isomorfismo de $\mathbb{K}^m$ sobre E. Tendo em conta I.8.1, podemos garantir a existência de um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, μ_x seja um isomorfismo de $\mathbb{K}^m$ sobre E e que seja suave a aplicação de U em $L(E; \mathbb{K}^m)$, que a x associa μ_x^{-1}. Uma vez que, para cada $x \in U$,

$$W_x = \mu_x(f_1(x), \ldots, f_n(x), 0, \ldots, 0),$$

e portanto $(f_1(x), \ldots, f_n(x), 0, \ldots, 0) = \mu_x^{-1}(W_x)$, concluímos que é suave a restrição de cada f_j a U. O facto de a noção de aplicação suave ser local permite-nos concluir finalmente que cada f_j é uma aplicação suave de A em $\mathbb{K}$. □

III.1.14 É evidente que, se $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ é um fibrado vectorial trivial, então todas as fibras E_x são espaços vectoriais com a mesma dimensão. Resulta daqui que, se $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ é um fibrado vectorial, então, para cada $x_0 \in A$, existe um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que cada E_x, com $x \in U$, tem a mesma dimensão que E_{x_0}. Podemos assim concluir que, se a base A for conexa, todas as fibras E_x dum fibrado vectorial $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ têm a mesma dimensão (fixado x_0, o conjunto dos x tais que a dimensão de E_x é a mesma que a de E_{x_0} vai ser simultaneamente aberto e fechado em A).

Em geral, dizemos que um fibrado vectorial $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ tem *dimensão* n se todas as fibras E_x tiverem dimensão n.

Ao revermos o estudo dos espaços euclidianos e hermitianos, verificámos que um tal espaço admite sempre uma base ortonormada. Em particular, para cada sistema linearmente independente $x_1, \ldots, x_m$ de vectores de um tal espaço E, sabemos que vai existir uma base ortonormada para o subespaço vectorial de E gerado por aquele sistema de vectores. No que se vai seguir teremos necessidade de estabelecer a possibilidade de escolher os elementos dessa base ortonormada como funções suaves dos vectores $x_1, \ldots, x_m$. Isso vai ser conseguido a partir do conhecido método de ortogonalização de Gram-Schmidt.

III.1.15 Se E é um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita. Para cada $m \geq 1$, vamos notar $\Omega^m(E)$ o subconjunto de E^m constituído pelos sistemas linearmente independentes $(x_1, \ldots, x_m)$ e, supondo fixado um produto interno em E, definimos uma aplicação $f_m\colon \Omega^m(E) \to E$ pela condição de $f_m(x_1, \ldots, x_m)$ ser a projecção ortogonal de x_m sobre o complementar ortogonal do subespaço vectorial gerado por $x_1, \ldots, x_{m-1}$.

III.1.16 Seja E é um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, munido de um produto interno. Para cada $m \geq 1$ tem-se então:
a) $\Omega^m(E)$ é aberto em E^m;
b) A aplicação $f_m\colon \Omega^m(E) \to E$ é suave.
c) Para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega^m(E)$, os vectores

$$f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m)$$

constituem uma base ortogonal do subespaço vectorial de E gerado por $x_1, \ldots, x_m$ (diz-se que estes vectores são os construídos a partir de $x_1, \ldots, x_m$ pelo *método de ortogonalização de Gram-Schmidt*).

Dem: A demonstração é por indução completa em m. O caso $m = 1$ resulta simplesmente de que $\Omega^1(E) = E \setminus \{0\}$ e de que $f_1(x_1)$ é a projecção ortogonal de x_1 sobre $\{0\}^\perp = E$, portanto $f_1(x_1) = x_1$. Seja então $m > 1$ e suponhamos o resultado verdadeiro quando o número de vectores é menor que m. Tendo em conta a hipótese de indução, podemos considerar o aberto $\Omega'^m(E)$ de E^m, contendo $\Omega^m(E)$, constituído pelos $(x_1, \ldots, x_m)$ tais que $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Omega^{m-1}(E)$ e prolongar, com a mesma definição, a aplicação $f_m\colon \Omega^m(E) \to E$ a $\Omega'^m(E)$. Pela hipótese de indução, para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega'^m(E)$, $f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \ldots, f_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1})$ é uma base ortogonal do subespaço vectorial gerado por $x_1, \ldots, x_{m-1}$, pelo que, tendo em conta I.2.20,

$$f_m(x_1, \ldots, x_m) = x_m - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle x_m, f_j(x_1, \ldots, x_j)\rangle}{\langle f_j(x_1, \ldots, x_j), f_j(x_1, \ldots, x_j)\rangle}\, f_j(x_1, \ldots, x_j).$$

Esta fórmula mostra, mais uma vez pela hipótese de indução, que $f_m\colon \Omega'^m(E) \to E$ é suave e o facto de se ter $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega^m(E)$ se, e só se, $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega'^m(E)$ e $f_m(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$ vai implicar que $\Omega^m(E)$ é aberto em E^m. Para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega^m(E)$, a mesma fórmula mostra que $f_m(x_1, \ldots, x_m)$, que, por construção, é ortogonal ao subespaço gerado por $x_1, \ldots, x_{m-1}$, e portanto, em particular, ortogonal a cada $f_j(x_1, \ldots, x_j)$ com $j < m$, pertence ao subespaço vectorial gerado por $x_1, \ldots, x_m$, o que implica que $f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m)$ é efectivamente uma base ortogonal desse subespaço. $\square$

Repare-se que, no caso em que o corpo $\mathbb{K}$ dos escalares é $\mathbb{C}$, não afirmamos, de modo nenhum, que as aplicações f_m sejam holomorfas, uma vez que o produto interno é antilinear, e não linear complexo, na segunda variável.
Por vezes é mais conveniente trabalharmos com bases ortonormadas, e não apenas ortogonais, mas estas são obtidas de modo trivial a partir do resultado precedente.

III.1.17 **(Corolário)** Seja E é um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, munido de um produto interno. Para cada $m \geq 1$ tem então lugar uma aplicação suave $g_m\colon \Omega^m(E) \to E$ definida por

$$g_m(x_1, \ldots, x_m) = \frac{f_m(x_1, \ldots, x_m)}{\|f_m(x_1, \ldots, x_m)\|},$$

e, para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega^m(E)$,

$$g_1(x_1), g_2(x_1, x_2), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_m)$$

é uma base ortonormada do subespaço vectorial gerado por $x_1, \ldots, x_m$ (que se diz ser a obtida a partir destes vectores pelo *método de ortonormalização de Gram-Schmidt*).

Vamos agora utilizar os resultados precedentes para apresentar uma caracterização alternativa dos fibrados vectoriais, no caso em que o espaço vectorial E, ambiente das fibras, está munido de um produto interno. Essa caracterização vai ser fundamental para o estudo da Geometria Diferencial dos fibrados vectoriais e das variedades, com espaço ambiente euclidiano ou hermitiano.

III.1.18 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A. Notemos, para cada $x \in A$, $\pi_x\colon E \to E_x$ e $\pi_x^\perp\colon E \to E_x^\perp$ as projecções ortogonais sobre a fibra e sobre o respectivo complementar ortogonal. Tem-se então:
a) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial, então $\underline{E}$ admite um *campo de referenciais ortonormado*, isto é, um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_n$ tal que, para cada $x \in A$, $W_{1x}, \ldots, W_{nx}$ seja uma base ortonormada de E_x;
b) $\underline{E}$ é um fibrado vectorial se, e só se, a aplicação $\pi = (\pi_x)_{x \in A}$, de A em $L(E; E)$, é suave;
c) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial, então, dados $x_0 \in A$, uma base $w_1, \ldots, w_n$ de E_{x_0} e uma base $w_{n+1}, \ldots, w_m$ de $E_{x_0}^\perp$, existe um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, $\pi_x(w_1), \ldots, \pi_x(w_n)$ seja uma base da fibra E_x e $\pi_x^\perp(w_{n+1}), \ldots, \pi_x^\perp(w_m)$ seja uma base de $E_x^\perp$.
Dem: Comecemos por supor que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial. Podemos então considerar um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_n$ de $\underline{E}$, isto é, uma família de aplicações suaves de A em E tal que, para cada $x \in A$,

$W_{1x}, \dots, W_{nx}$ seja uma base de E_x. Tendo em conta III.1.17 podemos então considerar as aplicações suaves $Z_1, \dots, Z_n \colon A \to E$, definidas por

$$Z_{j_x} = g_j(W_{1x}, \dots, W_{j_x}),$$

as quais vão constituir um campo de referenciais ortonormado de $\underline{E}$. Suponhamos agora que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial, não forçosamente trivial. Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Podemos então considerar um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que $\underline{E}_{/U}$ seja um fibrado vectorial trivial, existindo portanto aplicações suaves $W_1, \dots, W_n$, de U em E, tais que, para cada $x \in U$, $W_{1x}, \dots, W_{nx}$ seja uma base ortonormada de E_x. Para cada $x \in U$ e $w \in E$, tem-se então

$$\pi_x(w) = \langle w, W_{1x} \rangle W_{1x} + \cdots + \langle w, W_{nx} \rangle W_{nx},$$

de onde se deduz, tendo em conta II.2.12, que é suave a aplicação de U em $L(E;E)$, que a x associa π_x. Uma vez que a noção de aplicação suave é local, concluímos portanto que é suave a aplicação de A em $L(E;E)$, que a x associa π_x.
Suponhamos agora que é suave a aplicação de A em $L(E;E)$, que a x associa π_x. É claro que é então também suave a aplicação de A em $L(E;E)$, que a x associa $\pi_x^\perp = Id_E - \pi_x$. Seja $x_0 \in A$ arbitrário e consideremos uma base $w_1, \dots, w_n$ de E_{x_0} e uma base $w_{n+1}, \dots, w_m$ de $E_{x_0}^\perp$. Podemos então considerar uma aplicação suave de $\Phi \colon A \to E^m$, definida por

$$\Phi(x) = (\pi_x(w_1), \dots, \pi_x(w_n), \pi_x^\perp(w_{n+1}), \dots, \pi_x^\perp(w_m)).$$

Uma vez que a imagem de x_0 por esta aplicação é a base $w_1, \dots, w_m$ de E, concluímos de III.1.16 que existe um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, $\Phi(x)$ seja uma base de E. Uma vez que as primeiras n componentes de $\Phi(x)$ pertencem a E_x e que as últimas $m-n$ componentes de $\Phi(x)$ pertencem a $E_x^\perp$, concluímos que, para cada $x \in U$, $\pi_x(w_1), \dots, \pi_x(w_n)$ é uma base de E_x e $\pi_x^\perp(w_{n+1}), \dots, \pi_x^\perp(w_m)$ é uma base de $E_x^\perp$.[64] Obtivemos assim um campo de referenciais $W_1, \dots, W_n$ de $\underline{E}_{/U}$, definido por $W_{j_x} = \pi_x(w_j)$, pelo que ficou provado que $\underline{E}_{/U}$ é um fibrado vectorial trivial e portanto $\underline{E}$ é um fibrado vectorial. □

No caso em que E é um espaço euclidiano ou hermitiano, podemos agora reexaminar a interpretação intuitiva dos fibrados vectoriais $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ como aplicações suaves de A no conjunto $\mathbb{G}(E)$ dos subespaços vectoriais de E. Podemos considerar que uma tal aplicação é suave quando o for a sua composição com a bijecção deste conjunto sobre o subonjunto $G(E) \subset L(E;E)$, que a cada subespaço F associa a projecção ortogonal π_F (cf. II.5.12 e II.5.13).

---

[64]Trata-se de um exercício simples de Álgebra Linear, que pode ser resolvido, por exemplo, pelo exame das dimensões dos espaços em questão.

III.1.19 **(Corolário)** Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com as fibras E_x contidas no espaço euclidiano ou hermitiano E. Tem então lugar um novo fibrado vectorial $\underline{E}^{\perp} = (E_x^{\perp})_{x\in A}$.

Dem: Uma vez que é suave a aplicação de A em $L(E;E)$, que a cada x associa a projecção ortogonal π_x, de E sobre E_x, vem também suave a aplicação de A em $L(E;E)$, que a cada x associa a projecção ortogonal $\pi_x^{\perp}$, de E sobre $E_x^{\perp}$, que é igual a $Id_E - \pi_x$. □

III.1.20 **(Corolário)** Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Dados $x_0 \in A$ e $w \in E_{x_0}$, existe então uma secção suave $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$, tal que $W_{x_0} = w$.

Dem: Fixando um produto interno em E, sabemos que tem lugar uma aplicação suave de A em $L(E;E)$, que a cada x associa a projecção ortogonal π_x, de E sobre E_x, bastando então definir $W_x = \pi_x(w)$. □

III.1.21 **(Aplicação às variedades de Grassmann)** Sejam E e $\widehat{E}$ dois espaços vectoriais de dimensão finita, reais ou complexos, munidos de produto interno e seja $\xi\colon E \to \widehat{E}$ uma aplicação linear injectiva, não necessariamente ortogonal. Considerando as variedades de Grassmann $G(E) \subset L(E;E)$ e $G(\widehat{E}) \subset L(\widehat{E};\widehat{E})$ (cf. II.5.12 e II.5.13), tem então lugar uma aplicação suave

$$\xi_*\colon G(E) \to G(\widehat{E})$$

que associa a cada projecção ortogonal π_F a projecção ortogonal $\pi_{\xi(F)}$. Esta aplicação é mesmo um difeomorfismo de $G(E)$ sobre um subconjunto de $G(\widehat{E})$.[65]

Dem: Consideremos a família de subespaços vectoriais de E de base $G(E)$ cuja fibra em cada $\lambda = \pi_F \in G(E)$ é o subespaço vectorial F de E. Esta família é um fibrado vectorial (o *fibrado vectorial tautológico*) uma vez que é suave a aplicação que a cada $\lambda = \pi_F$ associa a projecção ortogonal π_F sobre a fibra. Tendo em conta III.1.12, podemos considerar o fibrado vectorial de base $G(E)$ e fibras contidas em $\widehat{E}$ que a cada $\lambda = \pi_F$ associa o subespaço vectorial $\xi(F)$ de $\widehat{E}$ e, aplicando mais uma vez a alínea b) de III.1.18, concluímos que é suave a aplicação $\xi_*\colon G(E) \to L(\widehat{E};\widehat{E})$ que a cada $\lambda = \pi_F$ associa $\pi_{\xi(F)}$. A aplicação suave $\xi_*\colon G(E) \to G(\widehat{E})$ é uma bijecção de $G(E)$ sobre um subconjunto $G_0(\widehat{E})$, a saber, o constituído pelas projecções ortogonais $\pi_{\widehat{F}}$, com $\widehat{F}$ subespaço vectorial de $\xi(E)$.

Resta-nos mostrar que a aplicação inversa $\xi_*^{-1}\colon G_0(\widehat{E}) \to G(E)$ é também suave. Seguimos para isso um caminho análogo ao anterior, começando por considerar uma aplicação linear $\eta\colon \widehat{E} \to E$ cuja restrição a $\xi(E)$ seja ξ^{-1} (podemos, por exemplo, tomar para η a composta de ξ^{-1} com a projecção ortogonal de $\widehat{E}$ sobre $\xi(E)$). Consideramos então a família de subespaços

[65] Reparar que este resultado generaliza a conclusão do exercício II.38 e tem uma demonstração mais simples que o argumento utilizado para a respectiva resolução.

vectoriais de $\widehat{E}$ de base $G_0(\widehat{E})$ que a cada $\widehat{\lambda} = \pi_{\widehat{F}}$ associa o subespaço vectorial $\widehat{F}$, família que vai ser mais uma vez um fibrado vectorial por ser suave a aplicação que a cada $\lambda = \pi_{\widehat{F}}$ associa a projecção ortogonal $\pi_{\widehat{F}}$ sobre a fibra, e deduzimos daqui, mais uma vez por III.1.12, que tem lugar um fibrado vectorial de base $G_0(\widehat{E})$ cuja fibra em cada $\pi_{\widehat{F}}$ é o subespaço vectorial $\eta(\widehat{F}) = \xi^{-1}(\widehat{F})$ de E. Aplicando de novo III.1.18, concluímos que é suave a aplicação de $G_0(\widehat{E})$ em $G(E)$ que a cada $\pi_{\widehat{F}}$ associa $\pi_{\xi^{-1}(\widehat{F})}$, aplicação essa que não é mais do que ξ_*^{-1}. □

III.1.22 **(Corolário)** Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, munido de dois produtos internos e notemos π_F e $\widehat{\pi}_F$ as projecções ortogonais de E sobre F relativas ao primeiro e ao segundo produto internos e $G(E)$ e $G(\widehat{E})$ as variedades de Grassmann correspondentes. Tem então lugar um difeomorfismo $\Lambda: G(E) \to \widehat{G}(E)$, que a cada π_F associa $\widehat{\pi}_F$.

Dem: Trata-se do caso particular do resultado precedente em que se toma para $\xi: E \to E$ a aplicação identidade, com o primeiro produto interno no domínio e o segundo no espaço de chegada. □

III.1.23 **(A derivada de $\boldsymbol{\xi_*: G(E) \to G(\widehat{E})}$)** Nas condições de III.1.21, para cada $\pi_F \in G(E)$ a derivada

$$D(\xi_*)_{\pi_F}: T_{\pi_F}(G(E)) \to T_{\pi_{\xi(F)}}(G(\widehat{E}))$$

está definida pela seguinte condição: Para cada $\alpha \in T_{\pi_F}(G(E))$ e $u \in F$,

$$D(\xi_*)_{\pi_F}(\alpha)(\xi(u)) = \pi_{\xi(F)^\perp}(\xi(\alpha(u)).\ ^{66}$$

Dem: Para cada $\pi_F \in G(E)$ e $u \in E$, tem-se $\xi(\pi_F(u)) \in \xi(F)$ donde

$$\xi_*(\pi_F) \circ \xi \circ \pi_F(u) = \pi_{\xi(F)} \circ \xi \circ \pi_F(u) = \xi \circ \pi_F(u).$$

Derivando a primeira e a terceira expressões como funções de π_F na direcção de $\alpha \in T_{\pi_F}(G(E))$, obtemos

$$D(\xi_*)_{\pi_F}(\alpha) \circ \xi \circ \pi_F(u) + \pi_{\xi(F)} \circ \xi \circ \alpha(u) = \xi \circ \alpha(u).$$

No caso particular em que $u \in F$, tem-se $\pi_F(u) = u$ pelo que a igualdade anterior dá

$$D(\xi_*)_{\pi_F}(\alpha)(\xi(u)) = \xi(\alpha(u)) - \pi_{\xi(F)}(\xi(\alpha(u)) = \pi_{\xi(F)^\perp}(\xi(\alpha(u)). \quad \square$$

Até agora, no estudo dos fibrados vectoriais, o espaço vectorial E ambiente das fibras, foi considerado como podendo ser indiferentemente um espaço vectorial real ou complexo. No caso em que este é um espaço

[66] Lembrar que um vector tangente a $G(\widehat{E})$ em $\pi_{\xi(F)}$ fica determinado pela sua restrição a $\xi(F)$ (cf. a caracterização matricial em II.5.13).

vectorial complexo, podemos encará-lo também como espaço vectorial real, mas as noções de campo de referenciais, de fibrado vectorial trivial e de fibrado vectorial vão depender naturalmente do contexto em que nos colocamos. Quando houver dúvida sobre o contexto que estamos a considerar usaremos as palavras "real" e "complexo" para o clarificar. O resultado que apresentamos em seguida explica a relação entre os dois contextos.

III.1.24 Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial complexo e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ uma família de subespaços vectoriais complexos de E. Tem-se então:

a) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial complexo (respectivamente um fibrado vectorial trivial complexo), então $\underline{E}$ é também um fibrado vectorial real (respectivamente um fibrado vectorial trivial real).

b) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial real, então $\underline{E}$ é também um fibrado vectorial complexo.

Dem: Tendo em conta a definição de fibrado vectorial, vemos que, para provar a), basta mostrar que, se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial complexo trivial, então $\underline{E}$ é também um fibrado vectorial real trivial, e isso resulta de que, se as famílias $(W_{1x})_{x \in A}, \ldots, (W_{nx})_{x \in A}$ constituem um campo de referenciais complexo de $\underline{E}$, então estas famílias, conjuntamente com as famílias $(i\,W_{1x})_{x \in A}, \ldots, (i\,W_{nx})_{x \in A}$ constituem um campo de referenciais real. A conclusão de b) é uma consequência da alínea b) de III.1.18, uma vez que, fixando um produto interno complexo em E, a projecção ortogonal π_x de E sobre E_x, relativa ao produto interno complexo, é a mesma que a relativa ao produto interno real associado. □

III.1.25 Há ainda outra noção que faz sentido apresentar no caso em que a base A é um aberto num espaço vectorial complexo G. Se E é um espaço vectorial complexo, diz-se que uma família de subespaços vectoriais complexos de E, $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$, é um *fibrado vectorial holomorfo trivial* se ela admite um *campo de referenciais holomorfo*, isto é, um campo de referenciais complexo $W_1, \ldots, W_n$ constituído por aplicação holomorfas $A \to E$; diz-se que $\underline{E}$ é um *fibrado vectorial holomorfo* se, para cada $x \in A$, existe um aberto U de A, com $x \in U$, tal que $\underline{E}_{/U}$ seja um fibrado vectorial holomorfo trivial. Note-se que, salvo em casos particulares triviais, já não é verdade que, para um fibrado vectorial holomorfo $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$, com as fibras contidas num espaço hermitiano E, venha holomorfa a aplicação de A em $L_{\mathbb{C}}(E; E)$, que a cada x associa a projecção ortogonal π_x, de E sobre E_x (A razão está em que, como observámos atrás, o método de ortonormalização de Gram-Schmidt não é uma operação holomorfa.).

No resultado que apresentamos em seguida, o espaço ambiente das fibras será explicitamente considerado como real, uma vez que, na definição de variedade que temos estado a estudar, uma eventual estrutura complexa no espaço ambiente é irrelevante.

III.1.26 Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial real de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Vamos chamar *espaço total* de $\underline{E}$ o subconjunto $\tilde{\underline{E}}$ de $G \times E$:

$$\tilde{\underline{E}} = \{(x, w) \in G \times E \mid x \in A, w \in E_x\},$$

conjunto que será também notado simplesmente $\underline{E}$, quando daí não vier perigo de confusão.

III.1.27 Sejam $x_0 \in M \subset G$, tais que (M, x_0) seja uma variedade, com dimensão m e índice p, E um espaço vectorial real de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, e seja n a dimensão de E_{x_0}. Tem-se então que, para cada $w_0 \in E_{x_0}$, o espaço total $\underline{E} \subset M \times E$ é, no ponto (x_0, w_0), uma variedade de dimensão $m + n$ e índice p.

Dem: Seja U um aberto de M, com $x_0 \in U$, tal que $\underline{E}_{/U}$ seja um fibrado vectorial trivial. Seja $W_1, \ldots, W_n$ um campo de referenciais ortonormado de $\underline{E}_{/U}$ (cf. III.1.18). Tem-se então que $\widehat{U} = \underline{E} \cap (U \times E)$ é um aberto de $\underline{E}$, contendo (x_0, w_0), pelo que o resultado ficará demonstrado se virmos que $\widehat{U}$ é, no ponto (x_0, w_0), uma variedade com dimensão $m + n$ e índice p. Ora, vai ter lugar uma bijecção suave de $U \times \mathbb{R}^n$ sobre $\widehat{U}$, definida por

$$(x, (a_1, \ldots, a_n)) \mapsto (x, a_1 W_{1x} + \cdots + a_n W_{nx}),$$

pelo que, uma vez que $U \times \mathbb{R}^n$ é, em cada $(x_0, (a_1, \ldots, a_n))$, uma variedade com dimensão $m + n$ e índice p, ficamos reduzidos a provar que a inversa da bijecção referida é também suave. Basta-nos assim provar que são suaves as aplicações $\widehat{f}_j \colon \widehat{U} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, definidas pela condição de se ter, para cada $(x, w) \in \widehat{U}$,

$$w = f_1(x, w) W_{1x} + \cdots + f_n(x, w) W_{nx}$$

e isso resulta de se ter $f_j(x, w) = \langle w, W_{jx} \rangle$. □

§2. Orientação de fibrados vectoriais reais.

III.2.1 Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial real de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A. Vamos chamar *orientação* de $\underline{E}$ a uma família $\alpha = (\alpha_x)_{x \in A}$, em que cada α_x é uma orientação da fibra E_x.

Se $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ e se $f \colon \widehat{A} \to A$ é uma aplicação, define-se a *orientação imagem recíproca* da família imagem recíproca $f^*\underline{E} = (E_{f(y)})_{y \in \widehat{A}}$ como sendo a orientação

$$f^*\alpha = (\alpha_{f(y)})_{y \in \widehat{A}}.$$

No caso particular em que $\widehat{A} \subset A$ e $f\colon \widehat{A} \to A$ é a inclusão, a orientação imagem recíproca $f^*\alpha$ de $f^*\underline{E} = \underline{E}_{/\widehat{A}}$ é também notada $\alpha_{/\widehat{A}}$ e chamada de *restrição* da orientação α a $\widehat{A}$.

III.2.2 Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial real de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E de base A. Vamos dizer que uma orientação $\alpha = (\alpha_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$ é *suave* se, para cada $x_0 \in A$, existe um aberto U de A, com $x_0 \in U$, e um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_m$ de $\underline{E}_{/U}$, que seja *directo* ou seja *retrógrado* (no sentido que, para cada $x \in U$, a base $W_{1x}, \ldots, W_{mx}$ de E_x seja directa ou, para cada $x \in U$, esta base seja retrógrada). É claro que $\underline{E}$ é então automaticamente um fibrado vectorial.

III.2.3 Sejam $\widehat{A} \subset \widehat{G}$, $A \subset G$ e $f\colon \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Se $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ é um fibrado vectorial, munido de uma orientação suave $\alpha = (\alpha_x)_{x\in A}$, é então também suave a orientação imagem recíproca $f^*\alpha = (\alpha_{f(y)})_{y\in\widehat{A}}$ de $f^*\underline{E}$.

Dem: Seja $y_0 \in \widehat{A}$ arbitrário. Sejam U um aberto de A, com $f(y_0) \in U$, tal que exista um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_m$ de $\underline{E}_{/U}$, que seja directo ou retrógrado. Pela continudade de f, podemos considerar um aberto V de $\widehat{A}$, com $y_0 \in V$, tal que $f(V) \subset U$. Temos então secções suaves de $(f^*\underline{E})_{/V}$, $(f_{/V})^*W_1, \ldots, (f_{/V})^*W_m$, as quais constituem um campo de referenciais, que é directo ou retrógrado. □

III.2.4 **(Exemplo)** Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial de dimensão finita e $F \subset E$ um subespaço vectorial, sobre o qual se fixou uma orientação α. Sobre o fibrado vectorial constante F_A fica então definida uma *orientação constante* α, que associa a cada $x \in A$ a orientação α da fibra F em x. É evidente que esta orientação constante é uma orientação suave.

III.2.5 **(Teorema fundamental)** Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, munido de uma orientação suave $\alpha = (\alpha_x)_{x\in A}$. Se $W_1, \ldots, W_m$ é um campo de referenciais de $\underline{E}$, então, para cada $x_0 \in A$, existe um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, a base $W_{1x}, \ldots, W_{mx}$ de E_x é directa, ou, para cada $x \in U$, aquela base é retrógrada; em consequência, no caso em que a base A é conexa, o campo de referenciais é directo ou retrógrado.

Dem: Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Por definição, sabemos que existe um aberto V de A, com $x_0 \in V$, tal que $\underline{E}_{/V}$ admita um campo de referenciais $Z_1, \ldots, Z_m$, que seja directo ou retrógrado. Tendo em conta III.1.13, podemos considerar aplicações suaves $f_{j,k}\colon V \to \mathbb{R}$, onde $1 \le j, k \le m$, definidas pela condição de se ter

$$W_{kx} = \sum_{j=1}^{m} f_{j,k}(x)\, Z_{jx}.$$

Para cada $x \in V$, a matriz de elementos $f_{j,k}(x)$ é uma matriz de mudança de base, portanto uma matriz invertível, pelo que, considerando a aplicação suave que a cada $x \in V$ associa o determinante daquela matriz, vai existir um aberto U de A, com $x_0 \in U \subset V$, tal que, para cada $x \in U$, aquele determinante no ponto x tem o mesmo sinal que no ponto x_0. Concluímos portanto que ou, para cada $x \in U$, a base $W_{1x}, \dots, W_{mx}$ é directa, ou, para cada $x \in U$, ela é retrógrada. No caso em que a base A é conexa, o que acabamos de provar mostra-nos que A é a união de dois abertos disjuntos, a saber, o conjunto dos pontos de x onde $W_{1x}, \dots, W_{mx}$ é uma base directa e o conjunto dos pontos x onde aquela base é retrógrada, pelo que um destes abertos tem que ser igual a A, o que quer precisamente dizer que o campo de referenciais $W_1, \dots, W_m$ é directo ou retrógrado. □

III.2.6 Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Dadas duas orientações suaves α e α' de $\underline{E}$, são então abertos em A o conjunto dos pontos x tais que $\alpha_x = \alpha'_x$ e o conjunto dos pontos x tais que $\alpha_x = -\alpha'_x$; em particular, no caso em que a base A é conexa, ou $\alpha = \alpha'$ ou $\alpha = -\alpha'$.

Dem: Seja $x_0 \in A$ tal que $\alpha_{x_0} = \alpha'_{x_0}$ (resp. $\alpha_{x_0} = -\alpha'_{x_0}$). Seja V um aberto de A, com $x_0 \in V$, tal que exista um campo de referenciais $W_1, \dots, W_m$ de $\underline{E}_{/V}$, que seja directo ou retrógrado, relativamente à orientação α'. Pelo resultado precedente, podemos considerar um aberto U de A, com $x_0 \in U \subset V$, tal que ou, para cada $x \in U$, $W_{1x}, \dots, W_{mx}$ é directa, relativamente à orientação α, ou, para cada $x \in U$, $W_{1x}, \dots, W_{mx}$ é retrógrada, relativamente a α. Resulta daqui que se tem $\alpha_x = \alpha'_x$ (resp. $\alpha_x = -\alpha'_x$), para cada $x \in U$, o que mostra que os conjuntos em questão são abertos. O conjunto A é portanto união destes dois abertos disjuntos pelo que, no caso em que A é conexo, um destes abertos é igual a A. □

III.2.7 Diz-se que um fibrado vectorial $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ é *orientável* se admitir pelo menos uma orientação suave.

III.2.8 Se $M \subset E$ é uma variedade, chama-se *orientação* de M a uma orientação do fibrado vectorial tangente $T(M)$ e diz-se que M é *orientável* se isso acontecer ao fibrado vectorial $T(M)$.

III.2.9 Se $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ é um fibrado vectorial orientável, com a base A conexa e não vazia, então $\underline{E}$ admite duas, e só duas, orientações suaves; se uma delas for α, a outra é $-\alpha$.

Dem: Se α é uma orientação suave de $\underline{E}$, é imediato que $-\alpha$ é também uma orientação suave, que não coincide com a primeira por A não ser vazio; resulta então de III.2.6 que, para cada orientação suave β de $\underline{E}$ tem-se $\beta = \alpha$ ou $\beta = -\alpha$ (fixado $x_0 \in A$, tem-se $\beta_{x_0} = \alpha_{x_0}$ ou $\beta_{x_0} = -\alpha_{x_0}$, sendo então, no primeiro caso, $\beta = \alpha$ e, no segundo, $\beta = -\alpha$). □

III.2.10 Se $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ é um fibrado vectorial trivial, então $\underline{E}$ é orientável.

Dem: Se $W_1, \dots, W_m$ é um campo de referenciais de $\underline{E}$, podemos, para cada

$x \in A$, considerar a orientação α_x de E_x, relativamente à qual a base $W_{1x}, \ldots, W_{mx}$ é directa, tendo-se então que $W_1, \ldots, W_m$ é um campo de referenciais directo. □

III.2.11 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial orientável *de dimensão* 1, com $E_x \subset E$. Fixemos uma das orientações suaves de $\underline{E}$ e seja, para cada $x \in A$, $W_x \in E_x$ o *vector unitário positivo*, isto é, o único vector deste espaço vectorial de dimensão 1, que tem norma 1 e constitui uma base directa de E_x (cf. I.4.23). Tem-se então que $W = (W_x)_{x \in A}$ é um campo de referenciais de $\underline{E}$, o qual vai ser portanto um fibrado vectorial trivial.

Dem: Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Seja U um aberto de A, com $x_0 \in U$, tal que exista um campo de referenciais directo $Z = (Z_x)_{x \in A}$, de $\underline{E}_{/U}$ (se ele fosse retrógrado podíamos multiplicá-lo por -1). É então imediato que, para cada $x \in U$,

$$Z'_x = \frac{Z_x}{\|Z_x\|} = \frac{Z_x}{\sqrt{\langle Z_x, Z_x \rangle}}$$

é um vector de norma 1 deste espaço, constituindo uma base directa, ou seja, $Z'_x = W_x$. Deduzimos assim que a restrição de W a U é uma secção suave de $\underline{E}_{/U}$, pelo que o facto de a noção de aplicação suave ser local implica que W é uma secção suave de $\underline{E}$. □

III.2.12 **(Nota)** O resultado precedente é um fenómeno exclusivo dos fibrados vectoriais de dimensão 1. Por exemplo, se $S \subset \mathbb{R}^3$ é a superfície esférica, veremos em III.2.16 que o fibrado vectorial tangente $T(S)$ é orientável e, como já referimos, pode-se provar, embora com técnicas que não examinaremos neste texto, que este fibrado vectorial não é trivial.

III.2.13 **(Exemplo: O fibrado vectorial de Mőbius)** Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Sabemos que S é uma variedade sem bordo, com dimensão 1 e podemos considerar a aplicação suave $f\colon \mathbb{R} \to S$, definida por

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

a qual se verifica imediatamente ser uma submersão sobrejectiva. Consideremos agora a família $\underline{E} = (E_{(x,y)})_{(x,y) \in S}$ de subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$, que a cada $(x, y) \in S$, com $(x, y) = f(t)$, associa o subespaço vectorial gerado pelo vector não nulo

$$(\cos(\frac{t}{2}), \sin(\frac{t}{2})) \in \mathbb{R}^2$$

(cf. a figura 6).

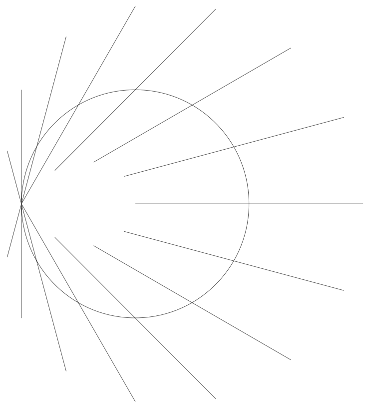

Figura 6

O facto de $E_{(x,y)}$ estar bem definido vem de que, se $s, t \in \mathbb{R}$ verificam $f(s) = f(t)$, então $s - t$ é múltiplo de 2π, pelo que $\frac{s}{2} - \frac{t}{2}$ é múltiplo de π, o que implica que $(\cos(s/2), \sin(s/2))$ e $(\cos(t/2), \sin(t/2))$ são iguais ou simétricos, em qualquer caso geram o mesmo subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Vamos agora verificar que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial de dimensão 1 não orientável, e portanto não trivial.

Para vermos que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial, basta, tendo em conta a caracterização destes dada na alínea b) de III.1.18 e a propriedade das submersões sobrejectivas referida em II.4.31, verificar que $f^*\underline{E}$ é um fibrado vectorial. Ora $f^*\underline{E}$ é mesmo um fibrado vectorial trivial, por admitir o campo de referenciais constituído por uma única secção suave, aquela que a cada t associa $(\cos(t/2), \sin(t/2))$.

Para vermos que $\underline{E}$ é não orientável, vamos supor que $\underline{E}$ admitia uma orientação suave α e chegar a um absurdo. Então $f^*\alpha$ era uma orientação suave de $f^*\underline{E}$, pelo que, uma vez que $\mathbb{R}$ é conexo, o campo de referenciais de $f^*\underline{E}$, constituído pela secção suave, que a t associa $(\cos(t/2), \sin(t/2))$, seria directo ou retrógrado. Mas isso é impossível, visto que $f(0) = f(2\pi)$ e que os vectores $(\cos(t/2), \sin(t/2))$, para $t = 0$ e $t = 2\pi$, são simétricos, constituindo assim bases com orientações opostas.

III.2.14 Sejam E e G espaços vectoriais reais de dimensão finita, $A \subset G$, e $\underline{\widehat{E}} = (\widehat{E}_x)_{x\in A}$ e $\underline{\tilde{E}} = (\tilde{E}_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $\widehat{E}_x, \tilde{E}_x \subset E$, munidos de orientações $(\widehat{\alpha}_x)_{x\in A}$ e $(\tilde{\alpha}_x)_{x\in A}$. Suponhamos que, para cada $x \in A$, $\widehat{E}_x \cap \tilde{E}_x = \{0\}$ e seja, para cada $x \in A$, $E_x = \widehat{E}_x \oplus \tilde{E}_x$ e α_x a orientação de E_x associada à soma directa (cf. I.4.18). Tem-se então:

a) $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ é também um fibrado vectorial.

b) Se duas das orientações $(\widehat{\alpha}_x)_{x\in A}$, $(\tilde{\alpha}_x)_{x\in A}$ e $(\alpha_x)_{x\in A}$ forem suaves, a terceira também é suave.

Dem: Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Sejam V' e V'' abertos de A, contendo x_0, tais que os fibrados vectoriais $\underline{\widehat{E}}_{/V'}$ e $\underline{\tilde{E}}_{/V''}$ sejam triviais. Sendo $V = V' \cap V''$, que é ainda um aberto de A, contendo x_0, podemos considerar campos de referenciais $W_1, \dots, W_m$ de $\underline{\widehat{E}}_{/V}$ e $W_{m+1}, \dots, W_n$ de $\underline{\tilde{E}}_{/V}$ e tem-se então que $W_1, \dots, W_m, W_{m+1}, \dots, W_n$ é um campo de referenciais de $(E_x)_{x \in V}$. Ficou assim provado que $\underline{E}_{/V}$ é um fibrado vectorial trivial, e portanto que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial. Reparemos, além disso, que, por definição da orientação associada à soma directa, tem-se, para cada $x \in V$,

$$\begin{aligned}&\alpha_x(W_{1x}, \dots, W_{mx}, W_{m+1x}, \dots, W_{nx}) =\\ &= \widehat{\alpha}_x(W_{1x}, \dots, W_{mx})\tilde{\alpha}_x(W_{m+1x}, \dots, W_{nx}).\end{aligned}$$

Suponhamos que as orientações $(\widehat{\alpha}_x)_{x \in A}$ e $(\tilde{\alpha}_x)_{x \in A}$ são suaves. Tendo em conta III.2.5 , podemos considerar abertos U' e U'' de A, contendo x_0 e contidos em V, tais que $\widehat{\alpha}_x(W_{1x}, \dots, W_{mx})$ seja constante em U' e que $\tilde{\alpha}_x(W_{m+1x}, \dots, W_{nx})$ seja constante em U'', de onde deduzimos que $\alpha_x(W_{1x}, \dots, W_{mx}, W_{m+1x}, \dots, W_{nx})$ é constante no aberto $U' \cap U''$ de A, que contém x_0, e portanto que $(\alpha_x)_{x \in A}$ é suave.
Analogamente, supondo que as orientações $(\alpha_x)_{x \in A}$ e $(\widehat{\alpha}_x)_{x \in A}$ são suaves, podemos considerar abertos U' e U'' de A, contendo x_0 e contidos em V, tais que $\alpha_x(W_{1x}, \dots, W_{mx}, W_{m+1x}, \dots, W_{nx})$ seja constante em U' e que $\widehat{\alpha}_x(W_{1x}, \dots, W_{mx})$ seja constante em U'', de onde deduzimos que $\tilde{\alpha}_x(W_{m+1x}, \dots, W_{nx})$ é constante no aberto $U' \cap U''$ de A, que contém x_0, e portanto que $(\tilde{\alpha}_x)_{x \in A}$ é suave.
Do mesmo modo se verifica que, se as orientações $(\alpha_x)_{x \in A}$ e $(\tilde{\alpha}_x)_{x \in A}$ são suaves, a orientação $(\widehat{\alpha}_x)_{x \in A}$ é também suave. □

III.2.15 **(Corolário)** Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ e $\underline{\widehat{E}} = (\widehat{E}_x)_{x \in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $\widehat{E}_x \subset E$, tais que, para cada $x \in A$, tenha lugar a soma directa $E = E_x \oplus \widehat{E}_x$. Tem-se então que $\underline{E}$ é orientável se, e só se, $\underline{\widehat{E}}$ é orientável. Em particular, no caso em que E é um espaço euclidiano, um fibrado vectorial $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$, com $E_x \subset E$, é orientável se, e só se, o fibrado vectorial $\underline{E}^\perp = (E_x^\perp)_{x \in A}$ é orientável.

III.2.16 **(Orientação canónica das esferas)** Sejam E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e seja $S \subset E$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1:

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Sabemos que, para cada $x \in S$, $T_x(S)$ é o conjunto dos vectores de E ortogonais a x, ou, o que é o mesmo, ortogonais ao subespaço vectorial gerado por x. Vemos assim que $T(S)^\perp$ é um fibrado vectorial trivial de dimensão 1, por admitir o campo de referenciais formado pela secção que a cada $x \in S$ associa o gerador x de $T_x(S)^\perp$. Em particular $T(S)^\perp$ é orientável e podemos considerar a orientação suave de $T(S)^\perp$ definida pela condição de x ser uma base directa de $T_x(S)^\perp$. Tendo em conta III.2.14, ficamos com uma orientação suave associada de S, a que daremos o nome de *orientação canónica*, definida a partir das somas directas $E = T_x(S)^\perp \oplus T_x(S)$, isto é, pela condição de uma base $u_1, \ldots, u_{n-1}$ de $T_x(S)$ ser directa se, e só se, a base $x, u_1, \ldots, u_{n-1}$ de E for directa.

§3. Derivação covariante e segunda forma fundamental.

III.3.1 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$.

Dada uma secção suave $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$, W é, em particular, uma aplicação suave de A em E, pelo que podemos, para cada $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$, considerar a derivada $DW_{x_0}(u)$, que será um elemento de E mas, em geral, não terá que pertencer à fibra E_{x_0}. Nas aplicações geométricas é importante ter algo que tenha a ver com a derivada referida mas que esteja ligado ao fibrado vectorial, no sentido que deve ser um elemento da fibra E_{x_0} no ponto em que se deriva. É assim natural apresentar a seguinte definição:

Se $W = (W_x)_{x\in A}$ é uma secção suave de $\underline{E}$, define-se, para cada $x_0 \in A$, a *derivada covariante de* W, *no ponto* x_0 como sendo a aplicação linear $\nabla W_{x_0}\colon T_{x_0}(A) \to E_{x_0}$ definida por

$$\nabla W_{x_0}(u) = \pi_{x_0}(DW_{x_0}(u)),$$

onde π_{x_0} é a projecção ortogonal de E sobre E_{x_0}.[67]

III.3.2 **(Exemplo)** Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $F \subset E$ um subespaço vectorial e consideremos o fibrado vectorial constante F_A, de fibra F. Dada uma secção suave $W = (W_x)_{x\in A}$ de F_A, tem-se que, para cada $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$, a derivada usual $DW_{x_0}(u)$ é um elemento de F (derivada duma aplicação suave de A em F). Concluímos portanto que, neste caso, a derivada covariante ∇W_{x_0} coincide com a derivada usual DW_{x_0}, não dependendo, em particular, do produto interno que se considera em E.

III.3.3 **(Exemplo)** Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Uma vez que $T_{(x,y)}(S)$ é constituído pelos vectores ortogonais a (x,y), podemos considerar uma secção suave W do fibrado vectorial tangente $T(S)$, definida por $W_{(x,y)} = (-y,x)$. Considerando o ponto $(1,0) \in S$ e o vector tangente $(0,1) \in T_{(1,0)}(S)$, vemos que $DW_{(1,0)}(0,1) = (-1,0)$, que

---

[67] Repare-se que não definimos a derivada covariante duma secção senão quando o espaço vectorial ambiente das fibras está munido de um produto interno. Essa derivada covariante dependerá, em geral, do produto interno fixado.

não pertence à fibra $T_{(1,0)}(S)$. Uma vez que $(-1,0)$ é ortogonal a $T_{(1,0)}(S)$, tem-se, para a derivada covariante, $\nabla W_{(1,0)}(0,1) = (0,0)$.

Os dois resultados que se seguem mostram que a derivação covariante verifica certas propriedades análogas às da derivação usual.

III.3.4 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Tem-se então, para cada $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$:

a) Se W e Z são secções suaves de $\underline{E}$ e se $c \in \mathbb{K}$,

$$\nabla(W+Z)_{x_0}(u) = \nabla W_{x_0}(u) + \nabla Z_{x_0}(u),$$
$$\nabla(cW)_{x_0}(u) = c\nabla W_{x_0}(u).$$

b) (Regra de Leibnitz) Se W é uma secção suave de $\underline{E}$ e se $f\colon A \to \mathbb{K}$ é uma aplicação suave,

$$\nabla(fW)_{x_0}(u) = Df_{x_0}(u)W_{x_0} + f(x_0)\nabla W_{x_0}(u).$$[68]

c) (Regra de Leibnitz) Se W e Z são secções suaves de $\underline{E}$, tem lugar uma aplicação suave $\langle W, Z\rangle\colon A \to \mathbb{K}$, definida por $x \mapsto \langle W_x, Z_x\rangle$, e

$$D\langle W, Z\rangle_{x_0}(u) = \langle \nabla W_{x_0}(u), Z_{x_0}\rangle + \langle W_{x_0}, \nabla Z_{x_0}(u)\rangle.$$

Dem: As propriedades bem conhecidas da derivação usual permitem-nos escrever

$$D(W+Z)_{x_0}(u) = DW_{x_0}(u) + DZ_{x_0}(u),$$
$$D(cW)_{x_0}(u) = cDW_{x_0}(u),$$
$$D(fW)_{x_0}(u) = Df_{x_0}(u)W_{x_0} + f(x_0)DW_{x_0}(u).$$

Aplicando π_{x_0} a ambos os membros de cada uma destas igualdades, obtemos as fórmulas das alíneas a) e b). Do mesmo modo, sabemos que

$$D\langle W, Z\rangle_{x_0}(u) = \langle DW_{x_0}(u), Z_{x_0}\rangle + \langle W_{x_0}, DZ_{x_0}(u)\rangle$$

e a fórmula na alínea c) vai ser uma consequência de que, uma vez que, por definição de projecção ortogonal, $DW_{x_0}(u) - \nabla W_{x_0}(u)$ é ortogonal a E_{x_0}, podemos escrever

$$\langle DW_{x_0}(u) - \nabla W_{x_0}(u), Z_{x_0}\rangle = 0,$$

ou seja,

[68]Também podemos olhar para f como uma secção suave do fibrado vectorial constante $\mathbb{K}_A$ e, desse ponto de vista, a derivada covariante $\nabla f_{x_0}(u)$ concide com a derivada usual $Df_{x_0}(u)$, pelo que a fórmula anterior pode ser reescrita, com um aspecto mais homogéneo, $\nabla(fW)_{x_0}(u) = \nabla f_{x_0}(u)W_{x_0} + f_{x_0}\nabla W_{x_0}(u)$.

$$\langle \nabla W_{x_0}(u), Z_{x_0} \rangle = \langle DW_{x_0}(u), Z_{x_0} \rangle,$$

e, analogamente,

$$\langle W_{x_0}, \nabla Z_{x_0}(u) \rangle = \langle W_{x_0}, DZ_{x_0}(u) \rangle. \qquad \square$$

III.3.5 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Sejam $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ e $f: \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Para cada secção suave $W = (W_x)_{x \in A}$ de $\underline{E}$, tem-se, para a correspondente secção f^*W de $f^*\underline{E}$,

$$\nabla(f^*W)_{y_0}(v) = \nabla W_{f(y_0)}(Df_{y_0}(v)),$$

quaisquer que sejam $y_0 \in \widehat{A}$ e $v \in T_{y_0}(\widehat{A})$.[69]

Dem: Pelo teorema da derivação da função composta, podemos escrever $D(f^*W)_{y_0}(v) = DW_{f(y_0)}(Df_{y_0}(v))$ e, aplicando a ambos os membros desta igualdade a projecção ortogonal $\pi_{f(y_0)}$ de E sobre $E_{f(y_0)}$ (que é a fibra de $f^*\underline{E}$ no ponto y_0), obtemos a igualdade do enunciado. $\square$

III.3.6 Seja $M \subset G$ uma variedade. Chama-se *campo vectorial* sobre M a uma secção $X = (X_x)_{x \in M}$ do fibrado vectorial tangente $T(M)$. Se E é um espaço euclidiano ou hermitiano, se $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ é um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, se $W = (W_x)_{x \in M}$ é uma secção suave de $\underline{E}$ e se $X = (X_x)_{x \in M}$ é um campo vectorial sobre M, obtemos uma nova secção $\nabla W(X)$ de $\underline{E}$, definida por

$$\nabla W(X)_x = \nabla W_x(X_x).$$

É usual notar também a secção $\nabla W(X)$ por $\nabla_X(W)$.

III.3.7 Nas condições anteriores, se W é uma secção suave de $\underline{E}$ e se X é um campo vectorial suave sobre M, então a secção $\nabla_X W = \nabla W(X)$ de $\underline{E}$ é também suave.

Dem: Uma vez que W é uma aplicação suave de M em E, podemos considerar um aberto U de G, com $M \subset U$, e um prolongamento suave $\widehat{W}: U \to E$ de W. Temos então uma aplicação suave $D\widehat{W}: U \to L(G; E)$, o que nos garante que é suave a aplicação de M em E, que a x associa $DW_x(X_x) = D\widehat{W}_x(X_x)$. Como se viu na alínea b) de III.1.18, é suave a aplicação de M em $L(E; E)$, que a x associa a projecção ortogonal π_x de E sobre E_x. Uma vez que $\nabla W_x(X_x) = \pi_x(DW_x(X_x))$, concluímos finalmente ser suave a aplicação de M em E, que a x associa $(\nabla_X W)_x = \nabla W_x(X_x)$. $\square$

[69]Lembrando que f^*W é a composição de W, que é uma aplicação de A em E, com $f: \widehat{A} \to A$, salta à vista a semelhança entre a fórmula precedente e a do teorema da derivação da função composta.

Se $W = (W_x)_{x \in A}$ é uma secção suave dum fibrado vectorial $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$, então a derivada covariante $\nabla W_{x_0}(u)$, tal como a derivada usual $DW_{x_0}(u)$, depende não só do valor da secção W no ponto x_0 como dos valores desta nos outros pontos de A. Veremos no entanto que a sua diferença $DW_{x_0}(u) - \nabla W_{x_0}(u)$ só depende de W através do valor W_{x_0}, sendo algo que está relacionado com a *forma* do fibrado vectorial $\underline{E}$, mais precisamente com o modo como as fibras variam de ponto para ponto. Uma maneira de estudar essa variação é estudar a derivada da aplicação π, que a cada $x \in A$, associa a projecção ortogonal π_x, de E sobre E_x.

III.3.8 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, e consideremos a aplicação suave $\pi = (\pi_x)_{x \in A}$, de A em $L(E;E)$, que a cada $x \in A$ associa a projecção ortogonal π_x, de E sobre E_x. Para cada $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$, tem-se então que a aplicação linear $D\pi_{x_0}(u) \in L(E;E)$ é autoadjunta e aplica E_{x_0} em $E_{x_0}^{\perp}$ e $E_{x_0}^{\perp}$ em E_{x_0}.

Dem: Tendo em conta I.2.26, a aplicação π, de A em $L(E;E)$, toma valores no subespaço vectorial $L_{aa}(E;E)$, constituído pelas aplicações lineares autoadjuntas. Concluímos daqui que a aplicação linear derivada $D\pi_{x_0}$ aplica $T_{x_0}(A)$ em $L_{aa}(E;E)$, o que mostra que $D\pi_{x_0}(u)$ é autoadjunta. Por outro lado, dado $w \in E$, tem-se, para cada $x \in A$,

$$\pi_x(\pi_x(w)) = \pi_x(w).$$

Derivemos ambos os membros desta identidade, como funções de x, no ponto x_0, na direcção de u: Obtemos

$$D\pi_{x_0}(u)(\pi_{x_0}(w)) + \pi_{x_0}(D\pi_{x_0}(u)(w)) = D\pi_{x_0}(u)(w).$$

No caso em que $w \in E_{x_0}$, vem $\pi_{x_0}(w) = w$ e a igualdade anterior dá-nos

$$D\pi_{x_0}(u)(w) + \pi_{x_0}(D\pi_{x_0}(u)(w)) = D\pi_{x_0}(u)(w),$$

ou seja, $\pi_{x_0}(D\pi_{x_0}(u)(w)) = 0$, o que mostra que $D\pi_{x_0}(u)(w)$ pertence a $E_{x_0}^{\perp}$. Do mesmo modo, no caso em que $w \in E_{x_0}^{\perp}$, tem-se $\pi_{x_0}(w) = 0$, pelo que a igualdade em questão dá-nos

$$\pi_{x_0}(D\pi_{x_0}(u)(w)) = D\pi_{x_0}(u)(w),$$

portanto $D\pi_{x_0}(u)(w) \in E_{x_0}$. □

III.3.9 **(Nota)** Em rigor, a demonstração anterior era dispensável: Se a aplicação suave $x \mapsto \pi_x$ toma valores na variedade de Grassmann $G(E)$, referida em II.5.13, a sua derivada em x_0 na direcção de u terá que ser tangente a $G(E)$ em π_{x_0} pelo que bastaria lembrar a caracterização dos espaços tangentes à variedade de Grassmann então apresentada. A caracterização matricial desses espaços tangentes nesse resultado também serviria como demonstração alternativa para o corolário seguinte.

III.3.10 **(Corolário)** Nas condições anteriores, a restrição da aplicação linear $D\pi_{x_0}(u)$ a E_{x_0}, considerada como aplicação linear de E_{x_0} em $E_{x_0}^{\perp}$, tem como aplicação linear adjunta a restrição de $D\pi_{x_0}(u)$ a $E_{x_0}^{\perp}$, considerada como aplicação linear de $E_{x_0}^{\perp}$ em E_{x_0}. Em particular, o conhecimento da aplicação linear $D\pi_{x_0}(u)\colon E \to E$ fica determinado pelo conhecimento da respectiva restrição a E_{x_0}.

Dem: O facto de $D\pi_{x_0}(u)\colon E \to E$ ser autoadjunta diz-nos que, quaisquer que sejam $w, w' \in E$, tem-se

$$\langle D\pi_{x_0}(u)(w), w'\rangle = \langle w, D\pi_{x_0}(u)(w')\rangle.$$

Em particular, esta igualdade verifica-se quaisquer que sejam $w \in E_{x_0}$ e $w' \in E_{x_0}^{\perp}$ pelo que, uma vez que se tem então $D\pi_{x_0}(u)(w) \in E_{x_0}^{\perp}$ e $D\pi_{x_0}(u)(w') \in E_{x_0}$, fica provada a primeira asserção do enunciado. A segunda asserção é agora uma consequência de que, se conhecermos a restrição de $D\pi_{x_0}(u)$ a E_{x_0}, ficamos a conhecer a sua restrição a $E_{x_0}^{\perp}$, como adjunta da primeira, e portanto ficamos a conhecer $D\pi_{x_0}(u)$, uma vez que E é soma directa de E_{x_0} e $E_{x_0}^{\perp}$. □

III.3.11 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Para cada $x_0 \in A$, define-se então a *segunda forma fundamental* de $\underline{E}$ no ponto x_0 como sendo a aplicação bilinear

$$h_{x_0}\colon T_{x_0}(A) \times E_{x_0} \to E_{x_0}^{\perp}$$

definida por

$$h_{x_0}(u, w) = D\pi_{x_0}(u)(w).$$

Repare-se que, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, esta aplicação é uma aplicação bilinear real com a propriedade suplementar de ser linear complexa na segunda variável.

III.3.12 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Tem-se então:

a) Se $\underline{E}$ é um fibrado vectorial constante, isto é, se existe $F \subset E$ tal que $E_x = F$, para cada $x \in A$, então, para cada $x \in A$, a segunda forma fundamental h_x é nula.

b) Reciprocamente, no caso em que a base A é uma variedade conexa, se, para cada $x \in A$, $h_x = 0$, então $\underline{E}$ é um fibrado vectorial constante.[70]

Dem: No caso em que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial constante, a aplicação $\pi = (\pi_x)_{x\in A}$, de A em $L(E; E)$ é constante pelo que, para cada $x \in A$ e $u \in T_x(A)$, $D\pi_x(u) = 0$, em particular, para cada $w \in E_x$, $h_x(u, w) = D\pi_x(u)(w) = 0$. Suponhamos, reciprocamente, que A é uma variedade

[70] Este resultado justifica assim a interpretação intuitiva da segunda forma fundamental como algo que descreve o modo como as fibras variam de ponto para ponto.

conexa e que, para cada $x \in A$, $h_x = 0$. Concluímos assim que, para cada $x \in A$ e $u \in T_x(A)$, a aplicação linear $D\pi_x(u): E \to E$ tem restrição nula a E_x, de onde se deduz, tendo em conta III.3.10, que ela tem também restrição nula a $E_x^\perp$, o que implica que $D\pi_x(u) = 0$. Vemos agora que a aplicação suave $\pi: A \to L(E; E)$, tendo derivada nula em todos os pontos, tem que ser constante, o que implica que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial constante. $\square$

III.3.13 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Sejam $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ e $f: \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Para cada $y \in \widehat{A}$, as segundas formas fundamentais

$$\widehat{h}_y: T_y(\widehat{A}) \times E_{f(y)} \to E_{f(y)}^\perp,$$
$$h_{f(y)}: T_{f(y)}(A) \times E_{f(y)} \to E_{f(y)}^\perp,$$

de $f^*\underline{E}$, no ponto y, e de $\underline{E}$, no ponto $f(y)$, verificam

$$\widehat{h}_y(v, w) = h_{f(y)}(Df_y(v), w).$$

Dem: Uma vez que a projecção ortogonal $\widehat{\pi}_y$, de E sobre $(f^*\underline{E})_y = E_{f(y)}$, é igual a $\pi_{f(y)}$, o resultado é uma consequência da definição e do teorema de derivação da função composta. $\square$

III.3.14 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Sejam $W = (W_x)_{x \in A}$ uma secção suave de $\underline{E}$, $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$. Tem-se então

$$\nabla W_{x_0}(u) = DW_{x_0}(u) - h_{x_0}(u, W_{x_0}),$$

onde $h_{x_0}: T_{x_0}(A) \times E_{x_0} \to E_{x_0}^\perp$ é a segunda forma fundamental de $\underline{E}$ no ponto x_0.[71]

Dem: O facto de W ser uma secção de $\underline{E}$ implica que, para cada $x \in A$, $W_x = \pi_x(W_x)$. Derivando ambos os membros desta identidade no ponto x_0 e na direcção de u, obtemos

$$DW_{x_0}(u) = D\pi_{x_0}(u)(W_{x_0}) + \pi_{x_0}(DW_{x_0}(u)) = h_{x_0}(u, W_{x_0}) + \nabla W_{x_0}(u). \quad \square$$

III.3.15 **(Corolário)** Nas condições anteriores, se $x_0 \in A$ é tal que $W_{x_0} = 0$, vem, para cada $u \in T_{x_0}(A)$, $\nabla W_{x_0}(u) = DW_{x_0}(u)$, em particular a derivada covariante $\nabla W_{x_0}(u)$ *não* depende do produto interno que se considera em E e a derivada usual $DW_{x_0}(u)$ pertence à fibra E_{x_0}.

Vamos agora estudar uma caracterização alternativa da segunda forma fundamental dum fibrado vectorial, apresentada no quadro da geometria do espaço total do fibrado vectorial.

---

[71] Fica assim justificada a afirmação, feita anteriormente, de que a diferença $DW_{x_0}(u) - \nabla W_{x_0}(u)$ só depende da secção W através do seu valor no ponto x_0.

III.3.16 **(Revisão sobre subespaços afins) a)** Lembremos que, se E é um espaço vectorial, real ou complexo, chama-se *subespaço afim* de E a um subconjunto $F \subset E$, tal que existe um subespaço vectorial $F_0 \subset E$ e um vector $x \in E$, tais que $F = x + F_0$.
b) Um subespaço vectorial F_0 nas condições da definição é único, visto que se verifica imediatamente que ele tem que ser igual ao conjunto $F - F$ das diferenças $y - z$, com $y, z \in F$; diz-se que ele é o *subespaço vectorial associado* ao subespaço afim F e à sua dimensão dá-se também o nome de *dimensão* do subespaço afim.
c) Já um elemento x nas condições da definição não será em geral único: Se F é um subespaço afim de subespaço vectorial associado F_0, verifica-se imediatamente que a igualdade $F = x + F_0$ é equivalente a $x \in F$.
d) É claro que todo o subespaço vectorial $F \subset E$ é também um subespaço afim de E, tendo o próprio F como subespaço vectorial associado. O que dissemos atrás mostra aliás que um subespaço afim F é subespaço vectorial se, e só se, $0 \in F$.

III.3.17 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $F \subset E$ um subespaço afim, com subespaço vectorial associado F_0. Para cada $x \in F$ tem-se então $\mathrm{t}_x(F) = \mathrm{t}_x^+(F) = T_x(F) = F_0$.
Dem: Sabemos que $F = x + F_0$ pelo que tem lugar um difeomorfismo $\varphi: F_0 \to F$, definido por $\varphi(y) = x + y$ (com inverso $z \mapsto z - x$), que aplica 0 em x e verifica $D\varphi_0(u) = u$, para cada $u \in T_0(F_0)$. Basta agora repararmos que $D\varphi_0$ é um isomorfismo de $T_0(F_0) = F_0$ sobre $T_x(F)$, que aplica $\mathrm{t}_0(F_0) = F_0$ sobre $\mathrm{t}_x(F)$ e $\mathrm{t}_0^+(F_0) = F_0$ sobre $\mathrm{t}_x^+(F)$. □

III.3.18 Se E é um espaço euclidiano ou hermitiano e se $F \subset E$ é um subespaço afim de subespaço vectorial associado F_0, então existe em F um, e um só, vector ortogonal a F_0.
Dem: Comecemos por provar a unicidade. Se x e y fossem dois vectores de F, que estivessem em $F_0^\perp$, $x - y$ seria um vector ao mesmo tempo em F_0 e em $F_0^\perp$, pelo que $x - y = 0$ e $x = y$. Quanto à existência, comecemos por tomar $x \in F$ arbitrário. Uma vez que tem lugar a soma directa $E = F_0 \oplus F_0^\perp$, existem $y \in F_0$ e $z \in F_0^\perp$, tais que $x = y + z$. Tem-se então que $z = x - y$ é um elemento de F, que está em $F_0^\perp$. □

III.3.19 Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, e consideremos o respectivo espaço total

$$\underline{E} = \{(x, w) \in G \times E \mid x \in A, w \in E_x\}.$$

Tem-se então:
a) $\underline{E}$ é fechado em $A \times E$;
b) Para cada $(x_0, w_0) \in \underline{E}$, $T_{(x_0, w_0)}(\underline{E})$ é um subespaço vectorial de $T_{x_0}(A) \times E$ e, para cada $u \in T_{x_0}(A)$, o conjunto dos vectores $z \in E$ tais que $(u, z) \in T_{(x_0, w_0)}(\underline{E})$ é um subespaço afim, cujo subespaço vectorial associado

é E_{x_0};
c) No caso em que E é um espaço euclidiano ou hermitiano, para cada $x_0 \in A$, $w_0 \in E_{x_0}$ e $u \in T_{x_0}(A)$, o valor da segunda forma fundamental $h_{x_0}(u, w_0)$ é o único vector de $E_{x_0}^{\perp}$ tal que

$$(u, h_{x_0}(u, w_0)) \in T_{(x_0,w_0)}(\underline{E}).$$

Dem: Fixemos em E um produto interno e notemos, para cada $x \in A$, $\pi_x \colon E \to E_x$ a projecção ortogonal. Sabemos que tem lugar uma aplicação suave, em particular contínua, $\pi = (\pi_x)_{x\in A}$, de A em $L(E; E)$. Uma vez que se tem

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \{(x, w) \in A \times E \mid \pi_x(w) = w\} = \\ &= \{(x, w) \in A \times E \mid \pi_x(w) - w = 0\},\end{aligned}$$

concluímos que $\underline{E}$ é fechado em $A \times E$. O facto de se ter $\underline{E} \subset A \times E$ implica evidentemente que

$$T_{(x_0,w_0)}(\underline{E}) \subset T_{(x_0,w_0)}(A \times E) = T_{x_0}(A) \times E.$$

Uma vez que, para cada $(x, w) \in \underline{E}$, $\pi_x(w) = w$, concluímos, por derivação de ambos os membros desta igualdade no ponto $(x_0, w_0) \in \underline{E}$, na direcção de um vector arbitrário $(u, z) \in T_{(x_0,w_0)}(\underline{E})$,

$$D\pi_{x_0}(u)(w_0) + \pi_{x_0}(z) = z,$$

portanto

$$z - h_{x_0}(u, w_0) = \pi_{x_0}(z) \in E_{x_0},$$

ou seja, $z \in h_{x_0}(u, w_0) + E_{x_0}$. Por outro lado, podemos considerar uma aplicação suave de $A \times E$ em $\underline{E}$, que a (x, w) associa $(x, \pi_x(w))$ pelo que, derivando esta aplicação em $(x_0, w_0) \in \underline{E}$ na direcção de um vector $(u, z') \in T_{x_0}(A) \times E$ arbitrário, concluímos que

$$(u, D\pi_{x_0}(u)(w_0) + \pi_{x_0}(z')) \in T_{(x_0,w_0)}(\underline{E}).$$

Em particular, se $u \in T_{x_0}(A)$ e $z' \in E_{x_0}$, sai

$$(u, h_{x_0}(u, w_0) + z') = (u, D\pi_{x_0}(u)(w_0) + \pi_{x_0}(z')) \in T_{(x_0,w_0)}(\underline{E}).$$

Ficou assim provado que, para cada $u \in T_{x_0}(A)$ e $w_0 \in E_{x_0}$, o conjunto dos $z \in E$ tais que $(u, z) \in T_{(x_0,w_0)}(\underline{E})$ é igual a $h_{x_0}(u, w_0) + E_{x_0}$, sendo portanto um subespaço afim de E, cujo subespaço vectorial associado é E_{x_0}, subespaço afim esse que contém $h_{x_0}(u, w_0)$. Já sabemos que $h_{x_0}(u, w_0) \in E_{x_0}^{\perp}$ e o facto de este ser o único elemento do referido espaço afim que pertence a $E_{x_0}^{\perp}$ é uma consequência de III.3.18. □

III.3.20 **(Corolário)** Sejam $A \subset G$, E um espaço vectorial de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, e consideremos o respectivo espaço total

$$\underline{E} = \{(x, w) \in G \times E \mid x \in A, w \in E_x\}.$$

Tem-se então:
a) Para cada $x \in A$, $T_{(x,0)}(\underline{E}) = T_x(A) \times E_x$;
b) Para cada $x_0 \in A$, a condição de se ter $h_{x_0} = 0$ não depende do produto interno que se escolha em E e é equivalente à condição de se ter, para cada $w \in E_{x_0}$, $T_{(x_0,w)}(\underline{E}) = T_{x_0}(A) \times E_{x_0}$ (podemos então dizer que x_0 é um *ponto de estacionaridade* do fibrado vectorial $\underline{E}$). Quando ela se verificar, tem-se, para cada secção suave $W = (W_x)_{x \in A}$ de $\underline{E}$, $\nabla W_{x_0} = DW_{x_0}$, em particular, a derivada covariante em x_0 *não depende* do produto interno que se considera em E e a derivada usual nesse ponto toma valores na fibra E_{x_0}.
c) Em geral, fixado um produto interno em E, para $w \in E_{x_0}$, o espaço vectorial tangente $T_{(x_0,w)}(\underline{E})$ pode decompor-se numa soma directa

$$T_{(x_0,w)}(\underline{E}) = \mathcal{H}_{x_0,w} \oplus (\{0\} \times E_x),$$

onde $\mathcal{H}_{x_0,w}$ (a que se costuma dar o nome de *subespaço horizontal* associado ao produto interno) é a imagem da aplicação linear injectiva de $T_{x_0}(M)$ em $T_{(x_0,w)}(\underline{E})$ que a u associa $(u, h_{x_0}(u, w))$.
Dem: Pelo resultado precedente, fixado um produto interno em E, $T_{(x_0,w)}(\underline{E})$ é o conjunto dos pares (u, z), tais que $u \in T_{x_0}(A)$ e $z \in h_{x_0}(u, w) + E_{x_0}$ (subespaço afim de espaço vectorial associado E_{x_0}, contendo o elemento $h_{x_0}(u, w)$), em particular os elementos de $T_{(x_0,w)}(\underline{E})$ são exactamente os que se podem escrever como soma de um elemento da forma $(u, h_{x_0}(u, w))$ com um elemento de $\{0\} \times E_{x_0}$. Tem-se assim $T_{(x_0,w)}(\underline{E}) = \mathcal{H}_{x_0,w} + (\{0\} \times E_x)$ e esta soma é directa, uma vez que os dois subespaços têm evientemente $(0, 0)$ como único elemento comum. Se $w = 0$, vem $h_{x_0}(u, 0) = 0$, pelo que $T_{(x_0,0)}(\underline{E}) = T_{x_0}(A) \times E_{x_0}$. No caso em que $h_{x_0} = 0$, tem-se, pela mesma razão, para cada $w \in E_{x_0}$, $T_{(x_0,w)}(\underline{E}) = T_{x_0}(A) \times E_{x_0}$. Reciprocamente, se esta igualdade é verificada, para cada $w \in E_{x_0}$, concluímos, de se ter $(u, h_{x_0}(u, w)) \in T_{(x_0,w)}(\underline{E})$, que $h_{x_0}(u, w)$ pertence ao mesmo tempo a E_{x_0} e a $E_{x_0}^{\perp}$, pelo que $h_{x_0}(u, w) = 0$, ou seja, $h_{x_0} = 0$. A condição $h_{x_0} = 0$, sendo equivalente à de se ter $T_{(x_0,w)}(\underline{E}) = T_{x_0}(A) \times E_{x_0}$, para cada $w \in E_{x_0}$, não vai depender do produto interno que se considera em E. O facto de, para um ponto x_0 de estacionaridade, se ter $\nabla W_{x_0} = DW_{x_0}$ resulta da fórmula $\nabla W_{x_0}(u) = DW_{x_0}(u) - h_{x_0}(u, W_{x_0})$. □

III.3.21 **(Corolário)** Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano, $E' \subset E$ um subespaço vectorial e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E'$. Para cada $x \in A$, a segunda forma fundamental h_x *não depende* de se considerar E ou E' como espaço ambiente das fibras sendo, em particular, uma aplicação bilinear de $T_x(A) \times E_x$ em E'.
Dem: Notando h_x a segunda forma fundamental quando se considera E' como espaço ambiente das fibras, para cada $w \in E_x$ e $u \in T_x(A)$, $h_x(u, w)$

vai ser um vector de E', em particular de E, ortogonal a E_x e tal que $(u, h_x(u,w)) \in T_{(x,w)}(\underline{E})$ pelo que, tendo em conta III.3.18, $h_x(u,w)$ coincide com o valor da segunda forma fundamental, quando se considera E como espaço ambiente das fibras (temos dois vectores ortogonais a E_x, pertencentes a um mesmo subespaço afim de E de subespaço vectorial associado E_x). □

O corolário seguinte é utilizado com muita frequência para deterninar o valor das segundas formas fundamentais.

III.3.22 **(Corolário)** Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Dados $x \in A$, $w \in E_x$ e $(u, z) \in T_{(x,w)}(\underline{E})$, tem-se então que o valor da segunda forma fundamental $h_x(u, w)$ é a projecção ortogonal de z sobre $E_x^\perp$.
Dem: Uma vez que $(u, h_x(u,w)) \in T_{(x,w)}(\underline{E})$, concluímos que se tem $z - h_x(u,w) \in E_x$, bastando agora lembrar que $h_x(u,w) \in E_x^\perp$. □

III.3.23 **(Propriedade de simetria do fibrado vectorial tangente)** Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset G$ uma variedade e consideremos o fibrado vectorial tangente $T(M)$, assim como o respectivo espaço total, notado também $T(M)$, que é uma parte de $M \times G \subset G \times G$. Tem-se então:
a) Dados $x_0 \in M$, $u, v \in T_{x_0}(M)$ e $z \in G$, tem-se $(u,z) \in T_{(x_0,v)}(T(M))$ se, e só se, $(v, z) \in T_{(x_0,u)}(T(M))$;
b) Fixado um produto interno em G, para cada $x_0 \in M$ a segunda forma fundamental $h_{x_0}\colon T_{x_0}(M) \times T_{x_0}(M) \to T_{x_0}(M)^\perp$ é uma aplicação bilinear simétrica.
Dem: Dados $x_0 \in M$ e $u, v \in T_{x_0}(M)$, sabemos que tanto o conjunto dos $z \in G$, tais que $(u,z) \in T_{(x_0,v)}(T(M))$, como o conjunto dos $z \in G$, tais que $(v,z) \in T_{(x_0,u)}(T(M))$, são subespaços afins de G, tendo $T_{x_0}(M)$ como subespaço vectorial associado. Para demonstrar a asserção de a), basta assim mostrar que estes dois subespaços afins têm um elemento comum. Consideremos então um sector A dum espaço vectorial F, de dimensão finita, um aberto U de A, com $0 \in U$, um aberto V de M, com $x_0 \in V$, e um difeomorfismo $f\colon U \to V$, tal que $f(0) = x_0$. Sejam $\widehat{U}$ um aberto de F, contendo U, e $\widehat{f}\colon \widehat{U} \to G$ um prolongamento suave de f. Uma vez que Df_0 é um isomorfismo de $F = T_0(A)$ sobre $T_{x_0}(M)$, podemos considerar $u', v' \in F$, tais que $Df_0(u') = u$ e $Df_0(v') = v$. Considerando a aplicação suave de U em $T(M)$, definida por

$$y \mapsto (f(y), Df_y(v')) = (f(y), D\widehat{f}_y(v')),$$

obtemos, por derivação no ponto 0, na direcção de u',

$$(u, D^2\widehat{f}_0(u', v')) = (Df_0(u'), D^2\widehat{f}_0(u', v')) \in T_{(x_0,v)}(T(M)).$$

Por simetria dos papéis de u e v, também $(v, D^2\widehat{f}_0(v', u'))$ pertence a $T_{(x_0,u)}(T(M))$, o que, tendo em conta a simetria da derivada de segunda ordem $D^2\widehat{f}_0$, implica que o vector $D^2\widehat{f}_0(u', v') = D^2\widehat{f}_0(v', u')$ pertence à intersecção dos referidos subespaços afins. A demonstração de a) está assim terminada. Quanto a b), sabemos que $h_{x_0}(u, v)$ e $h_{x_0}(v, u)$ são elementos do referido espaço afim, ambos pertencentes ao complementar ortogonal do subespaço vectorial associado $T_{x_0}(M)$ pelo que, tendo em conta III.3.18, concluímos que eles são iguais. □

III.3.24 Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset G$ uma variedade e X, Y dois campos vectoriais suaves sobre M, isto é, duas secções suaves do fibrado vectorial tangente $T(M)$. Em particular X e Y são aplicações suaves de M em G, pelo que faz sentido considerar as aplicações de M em G, que a $x \in M$ associam respectivamente $DY_x(X_x)$ e $DX_x(Y_x)$, aplicações essas que não serão, em geral, campos vectoriais sobre M (comparar com o que se disse em III.3.1). Tem no entanto lugar um campo vectorial suave sobre M, $[X, Y]$, chamado *parêntesis de Lie* dos campos vectoriais X e Y, definido por

$$[X, Y]_x = DY_x(X_x) - DX_x(Y_x).$$

Além disso, se considerarmos um produto interno em G, tem-se a seguinte caracterização alternativa do parêntesis de Lie:

$$[X, Y]_x = \nabla Y_x(X_x) - \nabla X_x(Y_x).$$

Dem: Fixemos um produto interno em G. Sabemos que se tem então

$$\begin{aligned}\nabla Y_x(X_x) &= DY_x(X_x) - h_x(X_x, Y_x),\\ \nabla X_x(Y_x) &= DX_x(Y_x) - h_x(Y_x, X_x),\end{aligned}$$

pelo que, subtraindo membro a membro as igualdades precedentes e tendo em conta a simetria da aplicação bilinear h_x, obtemos

$$[X, Y]_x = DY_x(X_x) - DX_x(Y_x) = \nabla Y_x(X_x) - \nabla X_x(Y_x).$$

Ficou assim provado que $[X, Y]$, sendo a diferença de dois campos vectoriais suaves, é também um campo vectorial suave. □

III.3.25 Sejam $M \subset G$ uma variedade, F um espaço vectorial de dimensão finita e $f \colon M \to F$ uma aplicação suave. Para cada campo vectorial $X = (X_x)_{x\in M}$ sobre M, tem lugar uma nova aplicação $Df(X)$, de M em F, definida por

$$Df(X)_x = Df_x(X_x),$$

aplicação essa que notaremos também $D_X f$. Reparar que estas observações se podem enquadrar no que foi dito em III.3.6, na medida em que uma aplicação $f \colon M \to F$ não é mais do que uma secção do fibrado vectorial constante F_M, a derivada usual não sendo mais que a derivada covariante, relativa ao fibrado vectorial constante. É claro que, como caso particular do

que se viu em III.3.7, no caso em que não só a aplicação $f: M \to F$ é suave como o mesmo acontece ao campo vectorial X, podemos garantir que a aplicação $D_X f: M \to F$ é também suave.
Uma notação alternativa usada frequentemente em vez de $D_X f$ é $X \cdot f$. Preferimos a primeira por tornar mais claro o parentesco com a derivação covariante de secções.

III.3.26 Sejam $M \subset G$ uma variedade, F um espaço vectorial de dimensão finita e $f: M \to F$ uma aplicação suave. Dados os campos vectoriais suaves $X = (X_x)_{x \in M}$ e $Y = (Y_x)_{x \in M}$ sobre M, com o respectivo parêntesis de Lie $[X, Y]$, tem-se então

$$D_{[X,Y]} f = D_X D_Y f - D_Y D_X f.$$ [72]

Dem: Sejam $\widehat{U}$ um aberto de G, contendo M, e $\widehat{f}: \widehat{U} \to F$ um prolongamento suave de f. Tem-se, para cada $x \in M$,

$$(D_Y f)_x = Df_x(Y_x) = D\widehat{f}_x(Y_x),$$

pelo que

$$(D_X D_Y f)_x = D^2\widehat{f}_x(X_x, Y_x) + D\widehat{f}_x(DY_x(X_x)).$$

Analogamente se tem

$$(D_Y D_X f)_x = D^2\widehat{f}_x(Y_x, X_x) + D\widehat{f}_x(DX_x(Y_x)),$$

pelo que, subtraindo membro a membros as duas igualdades e tendo em conta a simetria da aplicação bilinear $D^2\widehat{f}_x: G \times G \to F$ e o facto de se ter $DY_x(X_x) - DX_x(Y_x) = [X, Y]_x \in T_x(M)$, obtemos

$$\begin{aligned}(D_X D_Y f)_x - (D_Y D_X f)_x &= D\widehat{f}_x(DY_x(X_x) - DX_x(Y_x)) = \\ &= Df_x([X, Y]_x) = (D_{[X,Y]} f)_x.\end{aligned}$$ □

III.3.27 Chama-se *álgebra de Lie* a um espaço vectorial E, em que está definida uma aplicação bilinear de $E \times E$ em E, notada $(u, v) \mapsto [u, v]$, verificando as propriedades seguintes:
a) $[u, v] = -[v, u]$; em particular, $[u, u] = 0$;
b) $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$.
À igualdade em b) costuma-se dar o nome de *identidade de Jacobi*.

III.3.28 Seja $M \subset G$ uma variedade e seja $\mathcal{X}(M)$ o espaço vectorial dos campos vectoriais suaves sobre M. Tem-se então que $\mathcal{X}(M)$, com o parêntesis de Lie definido em III.3.24, é uma álgebra de Lie.

---

[72] Repare-se que a fórmula com que definimos o parêntesis de Lie $[X, Y]$ pode ser obtida como o caso particular da fórmula precedente, em que se toma para f a inclusão de M em G.

Dem: É trivial que, dados os campo$s$ vectorais suaves X, Y sobre M, tem-se $[Y, X] = -[X, Y]$. Sejam agora X, Y, Z três campos vectoriais sobre M. Podemos então escrever

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z] &= D_{[X,Y]}Z - D_Z[X,Y] = \\ &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_Z(D_X Y - D_Y X) = \\ &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_Z D_X Y + D_Z D_Y X,\end{aligned}$$

e, por permutação circular dos papéis de X, Y e Z,

$$\begin{aligned}[[Y,Z],X] &= D_Y D_Z X - D_Z D_Y X - D_X D_Y Z + D_X D_Z Y, \\ [[Z,X],Y] &= D_Z D_X Y - D_X D_Z Y - D_Y D_Z X + D_Y D_X Z.\end{aligned}$$

Somando as três igualdades anteriores, obtemos finalmente

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0. \qquad \square$$

Vamos terminar esta secção com uma aplicação da geometria do espaço total dos fibrados vectoriais ao estudo do comportamento do espaço ambiente "próximo" duma subvariedade sem bordo.

III.3.29 **(Vizinhanças tubulares)** Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade sem bordo e consideremos o fibrado vectorial normal $T(M)^\perp = (T_x(M)^\perp)_{x\in M}$. Existe então uma aplicação suave $\varphi\colon M \to]0,1[$ tal que:

a) Notando Ω o aberto do espaço total de $T(M)^\perp$, contendo $M \times \{0\}$,

$$\Omega = \{(x,w) \in T(M)^\perp \mid \|w\| < \varphi(x)\},$$

tem lugar um difeomorfismo f de Ω sobre um aberto U de E, contendo M, definido por $f(x,w) = x + w$, difeomorfismo que verifica $f(x,0) = x$;

b) Para cada $(x,w) \in \Omega$, x é o único ponto de M a distância mínima do ponto $x + w \in U$.

Nas condições anteriores, diz-se que U é a *vizinhança tubular* de M definida pela função suave φ.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Vamos começar por mostrar que, para cada $a \in M$, existe $0 < r_a < 1$ verificando as seguintes propriedades:

α**)** Sendo Ω_a o aberto do espaço total $T(M)^\perp$, contendo $(a,0)$,

$$\Omega_a = \{(x,w) \in T(M)^\perp \mid \|x-a\| < r_a \wedge \|w\| < r_a\},$$

tem lugar um difeomorfismo $f_{(a)}$ de Ω_a sobre um aberto U_a de E, com $a \in U_a$, definido por $f_{(a)}(x,w) = x + w$;

β**)** Para cada $(x,w) \in \Omega_a$, x é o único ponto de M a distância mínima do ponto $x + w \in U_a$.

Subdem: Consideremos a aplicação suave $\overline{f}: T(M)^{\perp} \to E$ definida por $\overline{f}(x,w) = x + w$. Sabemos que $T(M)^{\perp}$ é uma variedade sem bordo e que $T_{(a,0)}(T(M)^{\perp}) = T_a(M) \times T_a(M)^{\perp}$ (cf. III.1.27 e III.3.20) pelo que a aplicação linear derivada

$$D\overline{f}_{(a,0)}: T_a(M) \times T_a(M)^{\perp} \to E,$$

que está definida por $(u,v) \mapsto u + v$, é um isomorfismo. Podemos assim aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de um aberto $\widehat{\Omega}_a$ de $T(M)^{\perp}$, contendo $(a,0)$ tal que a restrição de $\overline{f}$ seja um difeomorfismo de $\widehat{\Omega}_a$ sobre um aberto $\widehat{U}_a$ de E. Seja C_a uma vizinhança compacta de a em M e fixemos $0 < R_a < 4$ tal que, sempre que $(x,w) \in T(M)^{\perp}$ verifica $\|x - a\| < R_a$ e $\|w\| < R_a$ se tenha $x \in C_a$ e $(x,w) \in \widehat{\Omega}_a$. Vamos verificar que $r_a = \frac{1}{4} R_a$ verifica as condições pedidas.
A propriedade α) resulta de que Ω_a é um aberto de $T(M)^{\perp}$ contido em $\widehat{\Omega}_a$ e contendo $(a,0)$ e portanto a restrição $f_{(a)}$ de $\overline{f}$ é um difeomorfismo de Ω_a sobre um aberto U_a de E, que contém $a = \overline{f}(a,0)$.
Provemos então a propriedade β), fixando $(x,w) \in \Omega_a$ e notando $y = x + w$. Comecemos por mostrar a existência de um ponto $\widehat{x} \in M$ a distância mínima de y. Consideremos o conjunto $\widehat{C}_a = \{x' \in M \mid \|x' - a\| \leq 3r_a\}$ que contém x, é fechado em M e contido em C_a, logo fechado em C_a e portanto é compacto. A função contínua $M \to \mathbb{R}$, $x' \mapsto \|y - x'\|$ restrita ao compacto $\widehat{C}_a$ atinge o seu mínimo num certo $\widehat{x} \in \widehat{C}_a$, tendo-se, é claro,

$$\|y - \widehat{x}\| \leq \|y - x\| = \|w\| < r_a.$$

O que se passa é que $\widehat{x}$ não é só um minimizante para a restrição da função a $\widehat{C}_a$, é mesmo um minimizante da função em todo o M, podendo mesmo dizer-se que, se $x' \in M$ verificasse $\|y - x'\| \leq \|y - \widehat{x}\|$ vinha $\|y - x'\| < r_a$ portanto

$$\|x' - a\| \leq \|x' - y\| + \|y - x\| + \|x - a\| < 3r_a,$$

donde $x' \in \widehat{C}_a$ o que mostra não só que $\widehat{x}$ é um minimizante da distância a y em todo o M como que qualquer um desses minimizantes tem que estar em $\widehat{C}_a$. Para terminarmos a prova de a) vamos considerar que $\widehat{x}$ é um minimizante qualquer em M da distância a y, lembrar que tem que ser $\widehat{x} \in \widehat{C}_a$ e mostrar que é necessariamente $\widehat{x} = x$. Ora, uma vez que a função suave $\varphi: M \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x') = \|y - x'\|^2$ também atinge um mínimo em $\widehat{x}$, a sua derivada nesse ponto tem que ser 0, portanto, para cada $u \in T_{\widehat{x}}(M)$

$$0 = D\varphi_{\widehat{x}}(u) = -2\,\langle y - \widehat{x}, u\rangle,$$

o que implica que $y - \widehat{x} \in T_{\widehat{x}}(M)^{\perp}$. Uma vez que

$$\|y-\widehat{x}\| \leq \|y-x\| = \|w\| < r_a,$$

vemos agora que (x,w) e $(\widehat{x}, y-\widehat{x})$ são dois elementos de $T(M)^\perp$ em $\widehat{\Omega}_a$ com $\overline{f}(x,w) = y = \overline{f}(\widehat{x}, y-\widehat{x})$ pelo que, por a restrição de $\overline{f}$ ser injectiva sai, em particular, $x = \widehat{x}$, como queríamos.

2) Notemos $\widehat{\Omega}$ o aberto de $T(M)^\perp$, contendo $M\times\{0\}$, união dos Ω_a, com $a\in M$, e $\widehat{U}$ o aberto de E, contendo M, união dos U_a, com $a\in M$. Tem então lugar uma aplicação sobrejectiva

$$\widehat{f}\colon \widehat{\Omega} \to \widehat{U}, \quad \widehat{f}(x,w) = x+w,$$

que é suave por ter restrições suaves $f_{(a)}$ aos abertos Ω_a de união $\widehat{\Omega}$. Além disso, para cada $(x,w)\in\widehat{\Omega}$, x é o único ponto de M a distância mínima de $\widehat{f}(x,w)$ e $w = \widehat{f}(x,w) - x$, o que mostra que a aplicação $\widehat{f}$ é injectiva, e portanto uma bijecção de $\widehat{\Omega}$ sobre $\widehat{U}$, sendo mesmo um difeomorfismo de $\widehat{\Omega}$ sobre $\widehat{U}$ uma vez que a inversa é suave, por ter restrições suaves, iguais a $f_{(a)}^{-1}$ aos abertos U_a de união $\widehat{U}$.

3) Vamos provar a existência de uma aplicação suave $\varphi\colon M\to]0,1[$ tal que o aberto $\Omega = \{(x,w)\in T(M)^\perp \mid \|w\| < \varphi(x)\}$ de $T(M)^\perp$, contendo $M\times\{0\}$, esteja contido no aberto $\widehat{\Omega}$ referido em 2). Será então trivial que se verificam as condições a) e b) no enunciado.

Subdem: Para cada $a\in M$ seja $V_a = \{x\in M \mid \|x-a\| < r_a\}$, que é um aberto de M, contendo a. Consideremos uma partição da unidade associada à cobertura aberta de M pelos conjuntos V_a, portanto uma família localmente finita de aplicação suaves $\varphi_a\colon M\to[0,1]$ com φ_a nula fora de V_a e, para cada $x\in M$, $\sum\limits_{a\in M}\varphi_a(x) = 1$ (cf. II.3.11). Vamos ver que a aplicação suave $\varphi\colon M\to\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \sum_{a\in M}\varphi_a(x)\,r_a$$

toma valores em $]0,1[$ e verifica as condições pretendidas.

Sejam $x\in M$ e $w\in T_x(A)^\perp$ com $\|w\| < \varphi(x)$. Apenas para um número finito de índices a (pelo menos um) tem-se $\varphi_a(x)\neq 0$ e podemos chamar a_0 a um desses índices para os quais r_a seja mínimo e a_1 a um daqueles para os quais r_a seja máximo. Tem-se então

$$\varphi(x) = \sum_{a\in M}\varphi_a(x)\,r_a \geq \sum_{a\in M}\varphi_a(x)\,r_{a_0} = r_{a_0} > 0$$
$$\varphi(x) = \sum_{a\in M}\varphi_a(x)\,r_a \leq \sum_{a\in M}\varphi_a(x)\,r_{a_1} = r_{a_1} < 1$$

e, tem-se $x\in V_{a_1}$ e $\|w\| < \varphi(x) \leq r_{a_1}$, portanto $(x,w)\in\Omega_{a_1}\subset\widehat{\Omega}$. □

III.3.30 **(Corolário)** Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $U \supset M$ uma vizinhança tubular de M, definida por uma aplicação suave $\varphi: M \to]0,1[$. Tem-se então:

a) Tem lugar uma submersão $\rho: U \to M$, definida pela condição de $\rho(y)$ ser o único ponto de M à distância mínima de y, a qual é uma *retracção*, no sentido que $\rho(x) = x$, para cada $x \in M$.

b) M é um *retracto por deformação forte* de U, isto é, existe uma aplicação suave $H: [0,1] \times U \to U$ tal que $H(1,x) = x$, $H(0,x) \in M$ e, para cada $t \in [0,1]$ e $x \in M$, $H(t,x) = x$.

Dem: Nas notações do enunciado precedente, consideremos as aplicações suaves $\rho: U \to M$ e $h: U \to E$, definidas por $f^{-1}(y) = (\rho(y), h(y))$, a primeira das quais, pela alínea b) desse resultado, tem a interpretação na alínea a) do enunciado. Definindo $H(t,y) = \rho(y) + th(y)$ e reparando que, para cada $x \in M$, $f^{-1}(x) = (x,0)$, ou seja, $\rho(x) = x$ e $h(x) = 0$, fica justificada a alínea b) do enunciado, assim como o facto de ρ ser uma retracção. Resta-nos mostrar que a aplicação suave ρ é mesmo uma submersão. Uma vez que ρ é a composta do difeomorfismo $f^{-1}: U \to \Omega$ com a restrição da primeira projecção $T(M)^{\perp} \to M$, ficamos reduzidos a mostrar que esta restrição é uma submersão, isto é, que, para cada $(x,w) \in T(M)^{\perp}$, a restrição da primeira projecção $T_{(x,w)}(T(M)^{\perp}) \to T_x(M)$ é uma aplicação linear sobrejectiva e isso resulta de, para cada $u \in T_x(M)$, existir $z \in E$ tal que $(u,z) \in T_{(x,w)}(T(M)^{\perp})$. □

III.3.31 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade sem bordo. Sejam $\widehat{E}$ um espaço vectorial de dimensão finita, $\widehat{A} \subset \widehat{E}$ um subconjunto arbitrário e $g: \widehat{A} \to M$ uma aplicação suave. Existe então um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{E}$, com $\widehat{A} \subset \widehat{U}$ e uma aplicação suave $\widehat{g}: \widehat{U} \to M$ tal que $\widehat{g}_{/\widehat{A}} = g$. [73]

Dem: Tendo em conta II.3.10, sabemos que existe um aberto $\overline{U}$ de $\widehat{E}$, com $\widehat{A} \subset \overline{U}$, e uma aplicação suave $\overline{g}: \overline{U} \to E$ tal que $\overline{g}_{/\widehat{A}} = g$; o problema é que nada nos diz que $\overline{g}$ tome valores em M. Consideremos, no entanto, uma vizinhança tubular $U \supset M$ de M, com a correspondente retracção suave $\rho: U \to M$, nas condições da alínea a) do resultado precedente. Sendo $\widehat{U}$ o aberto de $\widehat{E}$, contendo $\widehat{A}$, constituído pelos $x \in \overline{U}$ tais que $\overline{g}(x) \in U$, podemos considerar a aplicação suave $\widehat{g}: \widehat{U} \to M$ definida por $\widehat{g}(x) = \rho(\overline{g}(x))$, a qual tem restrição a $\widehat{A}$ igual a g. □

[73] Ao contrário do que sucede com o problema do prolongamento de aplicações suaves com valores em E, em que sabemos que, quando $\widehat{M}$ é fechado em $\widehat{E}$, podemos obter um prolongamento a $\widehat{E}$, no caso presente, em que pretendemos prolongamentos com valores na subvariedade M, isso, em geral, não é possível. Pensar, por exemplo, no caso em que pretendemos estender a $\mathbb{R}$ a aplicação identidade de $\{-1,1\}$, de forma a tomar valores em $\{-1,1\}$.

Repare-se que, como é evidente, se uma aplicação suave $\varphi: M \to]0,1[$ define uma vizinhança tubular U da variedade sem bordo $M \subset E$, qualquer aplicação suave $\psi: M \to]0,1[$ tal que $\psi(x) \leq \varphi(x)$, para cada $x \in M$, define também uma vizinhança tubular $V \subset U$ de M. Um caso particular importante é aquele em que a variedade M é compacta e não vazia, caso em que, sendo $r > 0$ o mínimo de φ em M, pode-se considerar a vizinhança tubular definida pela função constante de valor r. Nesse caso, o corolário seguinte aponta para uma caracterização importante da vinhança tubular.

III.3.32 **(Corolário)** Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade sem bordo, compacta e não vazia. Existe então $0 < r < 1$ tal que a função $\psi: M \to]0,1[$ de valor constante r define uma vizinhança tubular U_r e, qualquer que seja r nessas condições, U_r é o conjunto dos $y \in E$ tais que $d(y, M) < r$.

Dem: Como já referimos, sendo $\varphi: M \to]0,1[$ uma aplicação suave que defina uma vizinhança tubuluar de M, podemos tomar para r o mínimo de φ e então a função de valor constante r também define uma vizinhança tubular U_r, que vai ser constituída pelos pontos da forma $y = x + w$, com $x \in M$, $w \in T_x(M)^\perp$ e $\|w\| < r$. Para cada $y \in U_r$, tem-se, na decomposição precedente, $\|y - x\| = \|w\| < r$, o que mostra que $d(y, M) < r$. Reciprocamente, suponhamos que $y \in E$ é tal que $d(y, M) < r$. O facto de M ser compacta implica que a função suave $g: M \to [0, +\infty[$, $g(x) = \|y - x\|^2$ atinge o seu mínimo num ponto $x_0 \in M$, tendo-se $g(x_0) = d(y, M)^2 < r^2$. Tem-se então $2\langle y - x_0, u\rangle = Dg_{x_0}(u) = 0$, para todo o $u \in T_{x_0}(M)$, ou seja, $w_0 = y - x_0 \in T_{x_0}(M)^\perp$ e vem $\|w_0\| < r$ e $y = x_0 + w_0$, o que mostra que $y \in U_r$. □

Na figura 7 estão representadas vizinhanças tubulares de duas subvariedades sem bordo do plano, uma compacta (uma circunferência) e outra não compacta (uma semicircunferência).

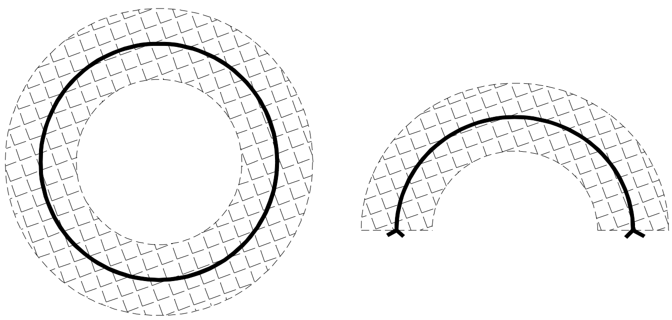

Figura 7

Em ambos os casos as vizinhanças estão associadas a uma função constante r e, apesar disso, no caso não compacto, a vizinhança tubular está contida estritamente no conjunto dos pontos a distância menor que r.

§4. Aplicação ao estudo elementar das curvas.

III.4.1 Seja E um espaço vectorial real de dimensão finita. Vamos chamar *curvas* de E às variedades $M \subset E$ com dimensão 1.

III.4.2 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva. Dado $x \in M$, o espaço vectorial tangente $T_x(M)$ tem dimensão 1, pelo que possui dois, e só dois, vectores de norma 1, um simétrico do outro; escolhamos um deles e notêmo-lo $\vec{t}_x$ (lembrar que escolher um daqueles dois vectores de norma 1 equivale a escolher uma orientação de $T_x(M)$, aquela para a qual ele constitui uma base directa — dizemos que aquele vector é a *tangente unitária positiva*, relativamente à orientação em questão). Uma vez que uma aplicação bilinear fica determinada se conhecermos as imagens dos pares constituídos por elementos duma base, vemos que a segunda forma fundamental $h_x\colon T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ fica conhecida se conhecermos o vector

$$\vec{k}_x = h_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x) \in T_x(M)^\perp.$$

Dizemos que $\vec{k}_x$ é o *vector curvatura* da curva M no ponto x (repare-se que ele não depende da escolha que fizemos do vector de norma 1 de $T_x(M)$).

III.4.3 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva, suavemente orientada. Tem então lugar um campo vectorial suave $\vec{t} = (\vec{t}_x)_{x\in M}$, que a cada $x \in M$ associa a tangente unitária positiva, isto é, o único vector de $T_x(M)$, que tem norma 1 e constitui uma base directa daquele espaço. Para cada $x \in M$, o vector curvatura $\vec{k}_x$ é então dado por

$$\vec{k}_x = D\vec{t}_x(\vec{t}_x).$$

Dem: O facto de ter lugar um campo vectorial suave $\vec{t}$, definido no enunciado, é uma consequência de III.2.11. Reparemos agora que, uma vez que, para cada $x \in M$, $\langle \vec{t}_x, \vec{t}_x \rangle = 1$, obtemos, por derivação de ambos os membros em x e na direcção de $\vec{t}_x$,

$$2\langle D\vec{t}_x(\vec{t}_x), \vec{t}_x \rangle = \langle D\vec{t}_x(\vec{t}_x), \vec{t}_x \rangle + \langle \vec{t}_x, D\vec{t}_x(\vec{t}_x) \rangle = 0,$$

donde $\langle D\vec{t}_x(\vec{t}_x), \vec{t}_x \rangle = 0$, portanto $D\vec{t}_x(\vec{t}_x) \in T_x(M)^\perp$. Deduzimos agora que tem lugar uma aplicação suave de M no espaço total $T(M)$ do fibrado vectorial tangente, que a x associa $(x, \vec{t}_x)$. Derivando em x na direcção de $\vec{t}_x$, obtemos

$$(\vec{t}_x, D\vec{t}_x(\vec{t}_x)) \in T_{(x,\vec{t}_x)}(T(M)),$$

o que, pela caracterização da segunda forma fundamental dada em III.3.19 c), implica que $D\vec{t}_x(\vec{t}_x) = h_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x) = \vec{k}_x$. □

Repare-se que esta fórmula para o cálculo do vector de curvatura pressupõe que a variedade M, de dimensão 1, esteja suavemente orientada pelo que ela apenas parece poder ser aplicada às curvas orientáveis. A fórmula pode no entanto ser sempre aplicada pelas razões seguintes:
a) Pode-se provar, embora a demonstração não seja elementar, que toda a variedade de dimensão 1 é orientável;
b) Mesmo desconhecendo o resultado referido, toda a variedade é localmente orientável, no sentido que cada ponto x pertence a um aberto que é orientável (basta considerar um aberto onde a restrição do fibrado tangente seja trivial) e, no caso duma curva, é evidente que o vector de curvatura em x coincide com o vector de curvatura daquele aberto no mesmo ponto.
Existe um método alternativo de determinação do vector curvatura que, apesar de ter um aspecto mais complexo que o do que decorre da proposição precedente conduz frequentemente na prática a cálculos mais simples.

III.4.4 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade de dimensão 1 e $X = (X_x)_{x \in M}$ uma secção suave de $T(M)$ tal que, para cada $x \in M$, $X_x \neq 0$. Notando $\pi_x^\perp$ a projecção ortogonal de E sobre o complementar ortogonal de $T_x(M)$, tem-se então

$$\vec{k}_x = \frac{1}{\|X_x\|^2}\, \pi_x^\perp(DX_x(X_x)).$$[74]

Dem: Tal como atrás, podemos considerar uma aplicação suave de M para o espaço total do fibrado vectorial tangente $T(M)$, que a cada x associa (x, X_x) pelo que, por derivação, vemos que $(X_x, DX_x(X_x)) \in T_{(x,X_x)}(T(M)$. Tendo em conta III.3.22, concluímos que

$$h_x(X_x, X_x) = \pi_x^\perp(DX_x(X_x)),$$

bastando agora reparar que se pode escolher para tangente unitária positiva

[74] É claro que um caso particular deste resultado é aquele em que se toma para X_x um vector tangente unitário, caso em que caímos na situação estudada em III.4.3, com o *bónus* de não termos que calcular a projecção ortogonal. A razão por que pode ser útil este resultado está em que é frequentemente possível obter secções não unitárias de $T(M)$ com expressões mais simples que as correspondentes secções unitárias, que se obtêm daquelas dividindo pelas respectivas normas.

$\vec{t}_x = X_x/\|X_x\|$, pelo que

$$\vec{k}_x = h_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x) = \frac{1}{\|X_x\|^2}\, h_x(X_x, X_x). \qquad \square$$

III.4.5 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 1. É então suave a aplicação $\vec{k}$, de M em E, que a cada $x \in M$ associa o vector curvatura $\vec{k}_x$.

Dem: Seja $x_0 \in M$ arbitrário. Seja U um aberto de M, com $x_0 \in U$, tal que $T(M)_{/U}$ seja um fibrado vectorial trivial, em particular orientável. Escolhendo uma das orientações suaves de $T(M)_{/U}$, sabemos que tem lugar uma aplicação suave de U em E, que a cada x associa o vector $\vec{t}_x \in T_x(M)$, que tem norma 1 e constitui uma base directa deste espaço. O facto de, para cada $x \in U$, se ter $\vec{k}_x = D\vec{t}_x(\vec{t}_x)$ implica agora que a restrição da aplicação $\vec{k}$ a U é suave (se quisermos ser mais precisos, começamos por considerar um prolongamento suave da aplicação $(\vec{t}_x)_{x\in U}$ a um aberto de E) pelo que o facto de a noção de aplicação suave ser local implica que $\vec{k}$ é uma aplicação suave. $\square$

Tanto a definição, em conjunto com as observações que a precederam, como o resultado anterior, mostram que o vector curvatura está intimamente relacionado com o modo como a curva *curva*, isto é com o modo como varia o respectivo espaço vectorial tangente. Somos por isso levados a pensar que as únicas curvas com vector curvatura identicamente nulo são aquelas que estão contidas numa recta afim. Vamos ver que é isso que acontece com as curvas conexas, para o que começamos por estabelecer um lema, que teremos ocasião de utilizar pelo menos duas vezes.

III.4.6 **(Lema)** Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, $F_0 \subset E$ um subespaço vectorial, $M \subset G$ uma variedade e $f\colon M \to E$ uma aplicação suave. Tem-se então:

a) Se $f(M)$ está contido nalgum subespaço afim de E, com subespaço vectorial associado F_0, então, para cada $x \in M$, $Df_x(T_x(M)) \subset F_0$.

b) Reciprocamente, se a variedade M é conexa e se, para cada $x \in M$, $Df_x(T_x(M)) \subset F_0$, então $f(M)$ está contido nalgum subespaço afim de E, com subespaço vectorial associado F_0.

Dem: Se F é um subespaço afim, de subespaço vectorial associado F_0, tal que $f(M) \subset F$, tem-se, tendo em conta III.3.17,

$$Df_x(T_x(M)) \subset T_{f(x)}(F) = F_0,$$

para cada $x \in M$. Suponhamos, reciprocamente, que M é uma variedade conexa, tal que, para cada $x \in M$, $Df_x(T_x(M)) \subset F_0$. Seja $\pi_0\colon E \to F_0$ a projecção ortogonal, relativamente a um certo produto interno de E.

Podemos então considerar a aplicação suave $g: M \to E$, definida por $g(x) = f(x) - \pi_0(f(x))$. Para cada $x \in M$, tem-se $Dg_x = 0$, visto que, para cada $u \in T_x(M)$, vem $Df_x(u) \in F_0$, donde

$$Dg_x(u) = Df_x(u) - \pi_0(Df_x(u)) = 0.$$

Concluímos assim que g é uma aplicação de valor constante y_0, o que mostra que, para cada $x \in M$,

$$f(x) = y_0 + \pi_0(f(x)) \in y_0 + F_0,$$

e portanto $f(M)$ está contido no subespaço afim $y_0 + F_0$, de subespaço vectorial associado F_0. □

Nas aplicações do lema anterior é frequente a situação particular em que $G = E$ e $f: M \to E$ é a inclusão. Nesse caso as propriedades que se relacionam são o facto de M estar contido num subespaço afim de subespaço vectorial associado F_0 e o facto de se ter $T_x(M) \subset F_0$, para cada $x \in M$.

III.4.7 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva e notemos, para cada $x \in M$, $\vec{k}_x$ o vector de curvatura de M em x. Tem-se então:

a) Se M está contido numa *recta afim* (subespaço afim de E de dimensão 1), então, para cada $x \in M$, $\vec{k}_x = 0$.

b) Reciprocamente, se a curva M é conexa e se, para cada $x \in M$, $\vec{k}_x = 0$, então M está contido numa recta afim.

Dem: Suponhamos que F é um subespaço afim de dimensão 1 de E, de subespaço vectorial associado F_0, tal que $M \subset F$. Tem-se então, para cada $x \in M$, $T_x(M) \subset F_0$, donde $T_x(M) = F_0$, pelo que $T(M)$ é um fibrado vectorial constante. Concluímos daqui que, para cada $x \in M$, $h_x = 0$, em particular, $\vec{k}_x = h_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x) = 0$. Suponhamos, reciprocamente, que M é uma curva conexa, tal que, para cada $x \in M$, $\vec{k}_x = 0$. Tem-se assim $h_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x) = 0$ pelo que, uma vez que $\vec{t}_x$ é uma base de $T_x(M)$, $h_x = 0$. Mais uma vez por III.3.12, podemos concluir que $T(M)$ é um fibrado vectorial constante, cuja fibra vai ser um espaço vectorial F_0 de dimensão 1, e o resultado precedente vai-nos garantir então que M está contido nalgum subespaço afim de subespaço vectorial associado F_0. □

III.4.8 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva e notemos, para cada $x \in M$, $\vec{k}_x$ o vector curvatura de M. Chama-se *curvatura* de M no ponto x à norma

$$k_x = \|\vec{k}_x\|$$

do vector curvatura. Se a curvatura de M num ponto x é não nula, chama-se *plano osculador* de M no ponto x ao subespaço vectorial de E gerado pelos vectores $\vec{t}_x$ e $\vec{k}_x$ (estes vectores são linearmente independentes, por serem ortogonais e não nulos), subespaço que não depende, evidentemente, da escolha do vector tangente unitário $\vec{t}_x$. Ainda neste caso, define-se a *normal principal* da curva M no ponto x como sendo o vector de norma 1

$$\vec{n}_x = \frac{\vec{k}_x}{\|\vec{k}_x\|} = \frac{\vec{k}_x}{k_x}.$$

É claro que $\vec{t}_x, \vec{n}_x$ é então uma base ortonormada do plano osculador.

III.4.9 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva, com curvatura não nula em cada $x \in M$, e notemos, para cada $x \in M$, F_x o plano osculador a M no ponto x. Tem-se então:

a) É suave a aplicação $\vec{n}$, de M em E, que a cada $x \in M$ associa a normal principal $\vec{n}_x$;

b) A família $\underline{F} = (F_x)_{x \in M}$ é um fibrado vectorial, a que daremos o nome de *fibrado vectorial osculador* de M.

Dem: Uma vez que sabemos que é suave a aplicação que a cada x associa o vector curvatura $\vec{k}_x$, a suavidade da aplicação $\vec{n}$ é uma consequência imediata do facto de se ter $\vec{n}_x = \vec{k}_x / \|\vec{k}_x\|$. Dado $x_0 \in M$ arbitrário, podemos escolher um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que $T(M)_{/U}$ seja um fibrado vectorial trivial, em particular orientável. Sabemos que tem então lugar uma aplicação suave de U em E, que a cada $x \in U$ associa o vector unitário $\vec{t}_x$ de $T_x(M)$, que constitui um base directa deste espaço, bastando agora reparar que as aplicações que a cada $x \in U$ associam $\vec{t}_x$ e $\vec{k}_x$, respectivamente, vão constituir um campo de referenciais para $\underline{F}_{/U}$. □

III.4.10 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva, com curvatura não nula em cada ponto, e sejam $\underline{F} = (F_x)_{x \in M}$ o respectivo fibrado osculador e, para cada $x \in M$, $\widehat{h}_x : T_x(M) \times F_x \to F_x^{\perp}$, a segunda forma fundamental de $\underline{F}$ no ponto x. Dados $x \in M$ e uma orientação de $T_x(M)$, define-se o *vector torção* de M no ponto x (relativamente à orientação escolhida), como sendo o vector

$$\vec{\tau}_x = \widehat{h}_x(\vec{t}_x, \vec{n}_x),$$

onde $\vec{t}_x$ é a tangente unitária positiva e $\vec{n}_x$ a normal principal. É claro que, se trocarmos a orientação escolhida em $T_x(M)$, o vector torção correspondente vem multiplicado por -1.[75]

[75]Em rigor, para definirmos o vector torção num ponto x_0 de M não é necessário exigir que a curvatura seja não nula em todos os pontos, bastando que ela seja não nula em x_0. Com efeito, deduz-se então, por continuidade, que ela é ainda não nula em todos os pontos dum certo aberto U de M, contendo x_0, e pode-se substituir nas considerações precedentes a curva M pela curva U.

III.4.11 Nas condições anteriores, o vector torção $\vec{\tau}_x$ pertence a $F_x^{\perp}$, sendo portanto ortogonal a $\vec{t}_x$ e a $\vec{n}_x$. A

$$\tau_x = \|\vec{\tau}_x\|$$

dá-se o nome de *torção* da curva X no ponto x (esta já *não* depende da orientação que se escolheu para $T_x(M)$). No caso em que a torção de M no ponto x não é nula, define-se a *binormal principal* de M no ponto x, relativamente à orientação escolhida em $T_x(M)$, como sendo o vector

$$\vec{b}_x = \frac{\vec{\tau}_x}{\|\vec{\tau}_x\|} = \frac{\vec{\tau}_x}{\tau_x}$$

(mais uma vez, este vector vem multiplicado por -1, se trocarmos a orientação escolhida de $T_x(M)$). Repare-se que, nas condições anteriores, $\vec{t}_x, \vec{n}_x, \vec{b}_x$ é um sistema ortonormado de vectores de E.

Tal como acontecia com o vector curvatura, o vector torção vai determinar completamente a segunda forma fundamental $\widehat{h}$ do fibrado osculador. No entanto esse facto é agora menos evidente, na medida em que, embora $\vec{t}_x$ seja uma base de $T_x(M)$, $\vec{n}_x$ não é uma base do plano osculador F_x. Para determinar a segunda forma fundamental teríamos *a priori* de conhecer também o valor $\widehat{h}_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x)$. O resultado que se segue mostra que esse valor é sempre nulo, o que justifica a nossa afirmação inicial. Demonstramos ao mesmo tempo uma fórmula alternativa para a torção, no mesmo espírito que o da fórmula para a curvatura apresentada em III.4.3.

III.4.12 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva com curvatura não nula em cada ponto e notemos $\widehat{h}$ a segunda forma fundamental do fibrado osculador $\underline{F} = (F_x)_{x \in M}$. Seja $x_0 \in M$, escolhamos uma orientação de $T_{x_0}(M)$ e consideremos os correspondentes tangente unitária positiva $\vec{t}_{x_0}$ e vector torção $\vec{\tau}_{x_0}$. Tem-se então

$$\begin{aligned}
&\widehat{h}_{x_0}(\vec{t}_{x_0}, \vec{t}_{x_0}) = 0,\\
&\vec{\tau}_{x_0} = \widehat{h}_{x_0}(\vec{t}_{x_0}, \vec{n}_{x_0}) = k_{x_0}\vec{t}_{x_0} + D\vec{n}_{x_0}(\vec{t}_{x_0}).
\end{aligned}$$

Dem: Eventualmente substituindo M por um aberto $U \subset M$, com $x_0 \in U$, tal que $T(M)_{/U}$ seja trivial, podemos já supor que $T(M)$ é trivial, em particular orientável, escolher uma orientação suave de $T(M)$ que em x_0 tome o valor dado e considerar as correspondentes tangentes unitárias positivas $\vec{t}_x$.
Derivando ambos os membros da identidade $\langle \vec{n}_x, \vec{n}_x \rangle = 1$ no ponto x e na direcção de $\vec{t}_x$, obtemos

$$2\langle D\vec{n}_x(\vec{t}_x), \vec{n}_x \rangle = \langle D\vec{n}_x(\vec{t}_x), \vec{n}_x \rangle + \langle \vec{n}_x, D\vec{n}_x(\vec{t}_x) \rangle = 0,$$

portanto

$$\langle D\vec{n}_x(\vec{t}_x), \vec{n}_x\rangle = 0.$$

Do mesmo modo, derivando ambos os membros da identidade $\langle \vec{n}_x, \vec{t}_x\rangle = 0$ no ponto x e na direcção de $\vec{t}_x$ e tendo em conta que

$$D\vec{t}_x(\vec{t}_x) = \vec{k}_x = k_x\vec{n}_x,$$

obtemos

$$\langle D\vec{n}_x(\vec{t}_x), \vec{t}_x\rangle + \langle \vec{n}_x, k_x\vec{n}_x\rangle = 0,$$

portanto

$$\langle D\vec{n}_x(\vec{t}_x), \vec{t}_x\rangle = -k_x.$$

Uma vez que, para cada $x \in M$, $\vec{t}_x \in F_x$, portanto $(x, \vec{t}_x) \in \underline{F}$, obtemos, por derivação em x na direcção de $\vec{t}_x$,

$$(\vec{t}_x, \vec{k}_x) = (\vec{t}_x, D\vec{t}_x(\vec{t}_x)) \in T_{(x,\vec{t}_x)}(\underline{F}),$$

pelo que, tendo em conta III.3.22, e o facto de se ter $\vec{k}_x \in F_x$, concluímos que $\widehat{h}_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x) = 0$. Analogamente, uma vez que, para cada $x \in M$, $\vec{n}_x \in F_x$, portanto $(x, \vec{n}_x) \in \underline{F}$, obtemos, por derivação em x na direcção de $\vec{t}_x$,

$$(\vec{t}_x, D\vec{n}_x(\vec{t}_x)) \in T_{(x,\vec{n}_x)}(\underline{F}).$$

Mais uma vez pelo mesmo resultado, concluímos que $\vec{\tau}_x = \widehat{h}_x(\vec{t}_x, \vec{n}_x)$ é a projecção ortogonal de $D\vec{n}_x(\vec{t}_x)$ sobre $F_x^{\perp}$, pelo que, uma vez que $\vec{t}_x, \vec{n}_x$ é uma base ortonormada de F_x,

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_x &= D\vec{n}_x(\vec{t}_x) - \langle D\vec{n}_x(\vec{t}_x), \vec{t}_x\rangle\vec{t}_x - \langle D\vec{n}_x(\vec{t}_x), \vec{n}_x\rangle\vec{n}_x = \\ &= D\vec{n}_x(\vec{t}_x) + k_x\vec{t}_x.\end{aligned}$$ □

Tal como acontecia com o vector curvatura, o vector torção pode frequentemente ser determinado com cálculos menos pesados, a partir do resultado que apresentamos a seguir:

III.4.13 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma curva com curvatura não nula em cada ponto e $Y = (Y_x)_{x\in M}$ uma secção suave do fibrado osculador $(F_x)_{x\in M}$ tal que, para cada $x \in M$, $Y_x \notin T_x(M)$. Seja $x_0 \in M$, escolhamos uma orientação de $T_{x_0}(M)$ e consideremos os correspondentes tangente unitária positiva $\vec{t}_{x_0}$, normal principal $\vec{n}_{x_0}$ e vector torção $\vec{\tau}_{x_0}$. Notando $\widehat{\pi}_{x_0}^{\perp}$ a projecção ortogonal de E sobre o complementar ortogonal do plano osculador F_{x_0}, tem-se então

$$\vec{\tau}_{x_0} = \frac{1}{\langle Y_{x_0}, \vec{n}_{x_0}\rangle}\,\widehat{\pi}^{\perp}_{x_0}(DY_{x_0}(\vec{t}_{x_0})).$$

Dem: Podemos considerar uma aplicação suave de M para o espaço total $\underline{F}$ do fibrado osculador, que a x associa (x, Y_x) pelo que, por derivação em x_0 na direcção de $\vec{t}_{x_0}$, concluímos que $(\vec{t}_{x_0}, DY_{x_0}(\vec{t}_{x_0})) \in T_{(x_0,Y_{x_0})}(\underline{F})$. Tendo em conta III.3.22, tem-se, para a segunda forma fundamental $\widehat{h}$ do fibrado osculador,

$$\widehat{h}_{x_0}(\vec{t}_{x_0}, Y_{x_0}) = \widehat{\pi}^{\perp}_{x_0}(DY_{x_0}(\vec{t}_{x_0})).$$

Reparemos agora que, uma vez que $Y_{x_0} \in F_{x_0}$ e $\vec{t}_{x_0}$ e $\vec{n}_{x_0}$ constituem uma base ortonormada deste espaço, tem-se

$$Y_{x_0} = \langle Y_{x_0}, \vec{t}_{x_0}\rangle\,\vec{t}_{x_0} + \langle Y_{x_0}, \vec{n}_{x_0}\rangle\,\vec{n}_{x_0}$$

pelo que, tendo em conta III.4.12,

$$\widehat{h}_{x_0}(\vec{t}_{x_0}, Y_{x_0}) = \langle Y_{x_0}, \vec{t}_{x_0}\rangle\,\widehat{h}_{x_0}(\vec{t}_{x_0}, \vec{t}_{x_0}) + \langle Y_{x_0}, \vec{n}_{x_0}\rangle\,\widehat{h}_{x_0}(\vec{t}_{x_0}, \vec{n}_{x_0}) = \langle Y_{x_0}, \vec{n}_{x_0}\rangle\,\vec{\tau}_{x_0}$$

o que implica o resultado. □

Como complemento do resultado precedente, mostramos em seguida como na prática se pode determinar uma secção $(Y_x)_{x\in M}$ do fibrado osculador, nas condições da hipótese.

III.4.14 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade de dimensão 1 e $X = (X_x)_{x\in M}$ uma secção suave de $T(M)$ tal que, para cada $x \in M$, $X_x \neq 0$. Sendo, para cada $x \in M$, $Y_x = DX_x(X_x)$, tem-se que M tem curvatura não nula em x se, e só se, $Y_x \notin T_x(M)$ e, nesse caso, Y_x pertence ao plano osculador F_x.
Dem: Lembrando que

$$\vec{k}_x = \frac{1}{\|X_x\|^2}\,\pi^{\perp}_x(DX_x(X_x)),$$

vemos que $\vec{k}_x = 0$ se, e só se, $DX_x(X_x) \in T_x(M)$. Podemos também escrever

$$\begin{aligned} DX_x(X_x) &= \pi_x(DX_x(X_x)) + \pi^{\perp}_x(DX_x(X_x)) = \\ &= \pi_x(DX_x(X_x)) + \|X_x\|^2\,\vec{k}_x, \end{aligned}$$

com $\pi_x(DX_x(X_x)) \in T_x(M) \subset F_x$ e $\|X_x\|^2\,\vec{k}_x \in F_x$, o que mostra que $DX_x(X_x) \in F_x$. □

Do mesmo modo que vimos atrás que a não nulidade do vector curvatura estava ligada ao facto de uma curva não ser rectilínea, vamos agora ver que a nulidade do vector torção em todos os pontos corresponde ao facto de uma curva ser plana.

III.4.15 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva com curvatura não nula em cada ponto. Tem-se então:

a) Se M está contido num *plano afim* de E (isto é, num subespaço afim de dimensão 2 de E) então, para cada $x \in M$, $\vec{\tau}_x = 0$.

b) Se a curva M é conexa e se, para cada $x \in M$, $\vec{\tau}_x = 0$, então M está contido num plano afim de E.

Dem: Fixemos uma orientação em cada $T_x(M)$. Seja G um subespaço afim de dimensão 2 de E, com subespaço vectorial associado G_0, tal que $M \subset G$. Para cada $x \in M$, tem-se então $T_x(M) \subset G_0$, em particular $\vec{t}_x \in G_0$. Raciocinando em abertos onde o fibrado vectorial tangente seja trivial, em particular orientável, e escolhendo as tangentes unitárias $\vec{t}_x$ associadas a uma das orientações suaves, concluímos que $\vec{k}_x = D\vec{t}_x(\vec{t}_x) \in G_0$. Resulta daqui que, para cada $x \in M$, o plano osculador F_x, sendo gerado por $\vec{t}_x$ e $\vec{k}_x$, vai estar contido em G_0, e ser portanto igual a G_0. Conclui-se então que o fibrado osculador $\underline{F} = (F_x)_{x \in M}$ é constante, o que implica que, para cada $x \in M$, a sua segunda forma fundamental $\widehat{h}_x$ é nula, em particular $\vec{\tau}_x = \widehat{h}_x(\vec{t}_x, \vec{n}_x) = 0$.

Suponhamos, reciprocamente, que a curva M é conexa e que, para cada $x \in M$, $\vec{\tau}_x = 0$, portanto que, sendo $\widehat{h}_x \colon T_x(M) \times F_x \to F_x^\perp$ a segunda forma fundamental do fibrado osculador, tem-se $\widehat{h}_x(\vec{t}_x, \vec{n}_x) = 0$. Pelo resultado precedente, tem-se também $\widehat{h}_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x) = 0$ pelo que, uma vez que $\vec{t}_x, \vec{n}_x$ é uma base de F_x e $\vec{t}_x$ é uma base de $T_x(M)$, $\widehat{h}_x = 0$. Podemos agora aplicar III.3.12 para garantir que o fibrado osculador $\underline{F} = (F_x)_{x \in M}$ é um fibrado vectorial constante, de fibra G_0, subespaço vectorial de dimensão 2 de E. Em particular tem-se, para cada $x \in M$, $\vec{t}_x \in G_0$, donde $T_x(M) \subset G_0$ o que, tendo em conta III.4.6, implica que M está contido nalgum subespaço afim, de subespaço vectorial associado G_0. □

III.4.16 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma curva. Vamos chamar *parametrização* de M a um difeomorfismo $f \colon J \to M$, em que J é um intervalo de $\mathbb{R}$ (que vai ser automaticamente uma variedade de dimensão 1, e portanto não se reduz a um único elemento).

Note-se que nem todas as curvas admitem uma parametrização; por exemplo uma circunferência não admite, como se reconhece se repararmos que não existe nenhuma variedade sem bordo, de dimensão 1, compacta e não vazia em $\mathbb{R}$ (num elemento de módulo máximo de uma tal variedade o cone tangente não seria $\mathbb{R}$). No entanto, tendo em conta a definição de variedade, constatamos imediatamente que, se M é uma curva e $x_0 \in M$, existe um aberto U de M (que é, em particular, uma curva), com $x_0 \in U$, e que admite uma parametrização, cujo domínio pode ser tomado da forma $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ou $[0, \varepsilon[$, conforme x_0 esteja em $\partial_0(M)$ ou em $\partial_1(M)$.

III.4.17 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma curva, admitindo uma parametrização $f: J \to M$. Tem então lugar uma aplicação suave $f': J \to E$, que a cada $t \in J$ associa o vector $f'(t) = Df_t(1)$, e fica definida uma orientação suave de M, a que daremos o nome de *orientação associada à parametrização*, definida pela condição de, para cada $t \in J$, o vector $f'(t)$ ser uma base directa de $T_{f(t)}(M)$.

Dem: O facto de f ser um difeomorfismo de J sobre M implica que, para cada $t \in J$, Df_t é um isomorfismo de $T_t(J) = \mathbb{R}$ sobre $T_{f(t)}(M)$, pelo que $f'(t) = Df_t(1)$ é uma base de $T_{f(t)}(M)$ e fica bem definida uma orientação deste espaço vectorial, pela condição de esta base ser directa. Considerando um prolongamento de f a um aberto de $\mathbb{R}$, contendo J, constatamos que é suave a aplicação de J em E, que a t associa $f'(t)$, pelo que, por composição com o difeomorfismo f^{-1}, obtemos uma aplicação suave de M em E, que a x associa $f'(f^{-1}(x))$, a qual vai constituir um campo de referenciais directo de $T(M)$. Ficou assim provada a suavidade da orientação de M. □

III.4.18 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais que um elemento e $f: J \to E$ uma aplicação suave tal que, para um certo $t_0 \in J$, $f'(t_0) \neq 0$. Tem-se então que a aplicação linear $Df_{t_0}: \mathbb{R} \to E$ é injectiva, por aplicar 1 em $f'(t_0)$, e, tendo em conta uma das consequências do teorema da imersão (cf. II.6.25), podemos concluir a existência de um aberto J' de J, com $t_0 \in J'$, aberto esse que se pode já supor ser um intervalo, tal que a restrição de f a J' seja um difeomorfismo de J' sobre $f(J')$. Conclui-se então que $f(J')$ é uma curva, admitindo a restrição de f como parametrização.

III.4.19 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva, admitindo uma parametrização $f: J \to M$, e consideremos sobre M a orientação associada. Tem-se então que, para cada $t \in J$, a tangente unitária positiva em $T_{f(t)}(M)$ é dada por

$$\vec{t}_{f(t)} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

e o vector curvatura em $f(t)$ é igual ao produto de $\frac{1}{\|f'(t)\|^2}$ pela projecção ortogonal de $f''(t)$ sobre o complementar ortogonal de $T_{f(t)}(M)$, sendo portanto dado por

$$\begin{aligned}\vec{k}_{f(t)} &= \frac{1}{\|f'(t)\|^2}(f''(t) - \langle f''(t), \vec{t}_{f(t)}\rangle \vec{t}_{f(t)}) = \\ &= \frac{1}{\|f'(t)\|^4}(\|f'(t)\|^2 f''(t) - \langle f''(t), f'(t)\rangle f'(t)).\end{aligned}$$

Dem: É claro que $f'(t)/\|f'(t)\|$ é um vector de norma 1 de $T_{f(t)}(M)$, constituindo uma base directa deste espaço, pelo que ele é precisamente a tangente unitária positiva em $f(t)$. Uma vez que, para cada $t \in J$,

$f'(t) \in T_{f(t)}(M)$, portanto $(f(t), f'(t))$ pertence ao espaço total $T(M)$ do fibrado tangente, obtemos, por derivação, que

$$(f'(t), f''(t)) \in T_{(f(t),f'(t))}(T(M)),$$

pelo que, tendo em conta III.3.22, $h_{f(t)}(f'(t), f'(t))$ vai ser a projecção ortogonal de $f''(t)$ sobre $T_{f(t)}(M)^{\perp}$. O resultado é agora uma consequência de se ter $f'(t) = \|f'(t)\|\vec{t}_{f(t)}$, portanto

$$h_{f(t)}(f'(t), f'(t)) = \|f'(t)\|^2 h_{f(t)}(\vec{t}_{f(t)}, \vec{t}_{f(t)}) = \|f'(t)\|^2 \vec{k}_{f(t)},$$

e de $\vec{t}_{f(t)} = f'(t)/\|f'(t)\|$ ser uma base ortonormada de $T_{f(t)}(M)$. □

III.4.20 **(Corolário)** Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva, admitindo uma parametrização $f\colon J \to M$. Tem-se então:
a) M tem curvatura nula no ponto $f(t)$ se, e só se, os vectores $f'(t)$ e $f''(t)$ são linearmente dependentes.
b) Se a curvatura de M em $f(t)$ é não nula, então o plano osculador nesse ponto é o gerado por $f'(t)$ e $f''(t)$.
Dem: A curvatura é nula se, e só se, a projecção ortogonal de $f''(t)$ sobre $T_{f(t)}(M)^{\perp}$ é nula, ou seja, se, e só se, $f''(t) \in T_{f(t)}(M)$. Supondo que a curvatura em $f(t)$ é não nula, concluímos do resultado precedente que tanto $\vec{t}_{f(t)}$ como $\vec{k}_{f(t)}$ pertencem ao plano gerado por $f'(t)$ e $f''(t)$, pelo que o plano osculador, gerado por aqueles dois vectores, vai estar contido no plano gerado por $f'(t)$ e $f''(t)$, e portanto ser igual a este último. □

III.4.21 **(Corolário)** Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma curva e $x_0 \in M$ tal que $\vec{k}_{x_0} \neq 0$. Existe então um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U \setminus \{x_0\}$,

$$\langle x - x_0, \vec{k}_{x_0} \rangle > 0$$

(a curva *curva* na direcção do vector curvatura, na vizinhança de x_0).
Dem: Se necessário substituindo M por um aberto de M, contendo x_0, o que não altera evidentemente o vector curvatura em x_0, podemos já supor que a curva admite uma parametrização $f\colon J \to M$ (cf. III.4.16). Seja $t_0 \in J$ o definido pela condição $f(t_0) = x_0$. Seja $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por

$$\varphi(t) = \langle f(t) - x_0, \vec{k}_{x_0} \rangle.$$

Tem-se $\varphi(t_0) = 0$ e $\varphi'(t) = \langle f'(t), \vec{k}_{x_0} \rangle$, e portanto, em particular, $\varphi'(t_0) = \langle f'(t_0), \vec{k}_{x_0} \rangle = 0$, visto que $f'(t_0) \in T_{x_0}(M)$ e $\vec{k}_{x_0}$ é ortogonal a este subespaço vectorial. Continuando a derivar, temos $\varphi''(t) = \langle f''(t), \vec{k}_{x_0} \rangle$, em particular, $\varphi''(t_0) = \langle f''(t_0), \vec{k}_{x_0} \rangle$. Mas, tendo em conta III.4.19, tem-se

$$f''(t_0) = \|f'(t_0)\|^2\vec{k}_{x_0} + \langle f''(t_0), \vec{t}_{f(t_0)}\rangle \vec{t}_{f(t_0)},$$

donde, tendo mais uma vez em conta o facto de $\vec{t}_{f(t_0)}$ ser ortogonal a $\vec{k}_{x_0}$,

$$\varphi''(t_0) = \|f'(t_0)\|^2\langle \vec{k}_{x_0}, \vec{k}_{x_0}\rangle > 0,$$

o que mostra que φ tem um mínimo relativo estrito em t_0. Por outras palavras, existe um aberto J' de J, com $t_0 \in J'$, tal que, para cada $t \in J' \setminus \{t_0\}$, $\varphi(t) > 0$, e basta agora tomar para U o aberto $f(J')$ de M. □

III.4.22 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva, com curvatura não nula em cada ponto, admitindo uma parametrização $f\colon J \to M$, e consideremos sobre M a orientação associada. Tem-se então, notando $\widehat{h}$ a segunda forma fundamental do fibrado osculador $\underline{F} = (F_x)_{x\in M}$,

$$\widehat{h}_{f(t)}(f'(t), f''(t)) = \|f'(t)\|^3 k_{f(t)}\vec{\tau}_{f(t)}.$$

Deduzimos daqui que o vector torção $\vec{\tau}_{f(t)}$ em $f(t)$ é igual ao produto de

$$\frac{1}{k_{f(t)}\|f'(t)\|^3}$$

pela projecção ortogonal de $f'''(t)$ sobre o complementar ortogonal do plano osculador $F_{f(t)}$, sendo assim dado por

$$\vec{\tau}_{f(t)} = \frac{1}{k_{f(t)}\|f'(t)\|^3}(f'''(t) - \langle f'''(t), \vec{t}_{f(t)}\rangle\vec{t}_{f(t)} - \langle f'''(t), \vec{n}_{f(t)}\rangle\vec{n}_{f(t)}).$$

Dem: Tendo em conta III.4.19, tem-se $f'(t) = \|f'(t)\|\vec{t}_{f(t)}$ e

$$f''(t) = \|f'(t)\|^2\vec{k}_{f(t)} + \langle f''(t), \vec{t}_{f(t)}\rangle\vec{t}_{f(t)},$$

pelo que, uma vez que $\vec{k}_{f(t)} = k_{f(t)}\vec{n}_{f(t)}$ e que, por III.4.10 e III.4.12,

$$\widehat{h}_{f(t)}(\vec{t}_{f(t)}, \vec{t}_{f(t)}) = 0,$$
$$\widehat{h}_{f(t)}(\vec{t}_{f(t)}, \vec{n}_{f(t)}) = \vec{\tau}_{f(t)},$$

obtemos

$$\widehat{h}_{f(t)}(f'(t), f''(t)) = \|f'(t)\|\,\widehat{h}_{f(t)}(\vec{t}_{f(t)}, f''(t)) =$$
$$= \|f'(t)\|^3\,\widehat{h}_{f(t)}(\vec{t}_{f(t)}, \vec{k}_{f(t)}) = \|f'(t)\|^3\,k_{f(t)}\vec{\tau}_{f(t)},$$

o que estabelece a primeira relação do enunciado. Atendendo agora a que, para cada $t \in J$, $f''(t) \in F_{f(t)}$, e portanto $(f(t), f''(t)) \in \underline{F}$, obtemos, por derivação, $(f'(t), f'''(t)) \in T_{(f(t),f''(t))}(\underline{F})$, donde, atendendo a III.3.22, $\widehat{h}_{f(t)}(f'(t), f''(t))$ é a projecção ortogonal de $f'''(t)$ sobre o complementar ortogonal da $F_{f(t)}$, o que prova a segunda afirmação do enunciado. A última conclusão é agora uma consequência de $\vec{t}_{f(t)}, \vec{n}_{f(t)}$ ser uma base ortonormada de $F_{f(t)}$. □

III.4.23 **(Corolário)** Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva, com curvatura não nula em cada ponto, admitindo uma parametrização $f\colon J \to M$, e consideremos sobre M a orientação associada. Tem-se então:
a) M tem torção nula no ponto $f(t)$ se, e só se, os vectores $f'(t), f''(t), f'''(t)$ são linearmente dependentes.
b) Se a torção em $f(t)$ for não nula, então o subespaço vectorial de dimensão 3 de E, gerado pelos vectores $\vec{t}_{f(t)}, \vec{k}_{f(t)}, \vec{\tau}_{f(t)}$,[76] é também gerado pelos vectores $f'(t), f''(t), f'''(t)$.
Dem: A torção é nula se, e só se, a projecção ortogonal de $f'''(t)$ sobre $F_{f(t)}^{\perp}$ é nula, isto é, se, e só se, $f'''(t) \in F_{f(t)}$. No caso em que a torção é não nula, já sabemos que $\vec{t}_{f(t)}$ e $\vec{k}_{f(t)}$ pertencem ao subespaço vectorial gerado por $f'(t), f''(t)$, e portanto também ao gerado por $f'(t), f''(t), f'''(t)$ e o resultado precedente mostra-nos que $\vec{\tau}_{f(t)}$ pertence a este mesmo subespaço vectorial. □

A curvatura e a torção de uma curva em cada um dos seus pontos é sempre, por definição, um número real maior ou igual a 0. Vamos agora referir dois contextos em que faz sentido falar de grandezas, iguais em valor absoluto à curvatura e à torção, respectivamente, mas que podem ser também negativas. Essas grandezas, que se definem de maneira trivial a partir das outras já estudadas, têm um papel importante nalgumas situações, como, por exemplo, no estudo das hipersuperfícies que faremos na próxima secção.

III.4.24 **(A curvatura sinalizada)** Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva e seja $x \in M$, com o correspondente vector curvatura $\vec{k}_x$. Suponhamos que se fixou, de alguma maneira, um vector de norma 1, $\vec{n}_{+x}$, tal que $\vec{k}_x \in \mathbb{R}\vec{n}_{+x}$ (dizemos então que $\vec{n}_{+x}$ é a *normal positiva* de M no ponto x). Define-se então a *curvatura sinalizada* de M no ponto x (relativamente à escolha da normal positiva) como sendo o número real k_{+x}, definido pela igualdade

$$\vec{k}_x = k_{+x}\vec{n}_{+x},$$

ou, o que é equivalente,

$$k_{+x} = \langle \vec{k}_x, \vec{n}_{+x} \rangle.$$

É claro que se tem

[76] Trata-se de uma espécie de *espaço osculador* de ordem superior.

$$k_x = \|\vec{k}_x\| = |k_{+x}|.$$

Como exemplos de escolha da normal positiva, que é usual fazer-se, temos:
a) A curvatura de M no ponto x é não nula e toma-se para normal positiva a normal principal $\vec{n}_x$, de M em x. Nesse caso a curvatura sinalizada é simplesmente a curvatura, sendo portanto estritamente positiva.
b) E é um espaço vectorial orientado de dimensão 2 e a variedade M está orientada. Nesse caso é usual tomar para normal positiva em x o único vector $\vec{n}_{+x} \in E$, que tem norma 1, é ortogonal a $\vec{t}_x$ e faz com que $\vec{t}_x, \vec{n}_{+x}$ seja uma base directa de E (reparar que o subespaço vectorial ortogonal a $T_x(M)$ tem dimensão 1). Neste caso a curvatura sinalizada será positiva quando M *curvar no sentido directo* e será negativa quando M *curvar no sentido retrógrado*.

III.4.25 **(A torção sinalizada)** Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva orientada, com curvatura diferente de 0 em cada ponto. Seja $\vec{\tau}_x$ o vector torção num certo ponto $x \in M$, e suponhamos que se fixou, de alguma maneira, um vector $\vec{b}_{+x}$ de norma 1, tal que $\vec{\tau}_x \in \mathbb{R}\vec{b}_{+x}$ (dizemos então que $\vec{b}_{+x}$ é a *binormal positiva* de M no ponto x). Define-se então a *torção sinalizada* de M no ponto x (relativamente à escolha da binormal positiva) como sendo o número real τ_{+x} definido por

$$\vec{\tau}_x = \tau_{+x}\vec{b}_{+x},$$

ou, o que é equivalente, por

$$\tau_{+x} = \langle \vec{\tau}_x, \vec{b}_{+x} \rangle.$$

É claro que se tem

$$\tau_x = \|\vec{\tau}_x\| = |\tau_{+x}|.$$

Como exemplos de escolha da binormal positiva, que é costume fazer-se, temos os seguintes:
a) A torção de M no ponto x é não nula e toma-se para binormal positiva a binormal principal. Nesse caso a torção sinalizada é simplesmente a torção, e portanto é estritamente positiva.
b) E é um espaço vectorial orientado de dimensão 3. Nesse caso é usual tomar para binormal positiva no ponto x o único vector $\vec{b}_{+x} \in E$, que tem norma 1, é ortogonal a $\vec{t}_x$ e a $\vec{n}_x$ e faz com que $\vec{t}_x, \vec{n}_x, \vec{b}_{+x}$ seja uma base directa.

§5. Hipersuperfícies. Aplicação linear de Weingarten.

III.5.1 Seja E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$. Chamam-se *hipersuperfícies* de E às variedades $M \subset E$ de dimensão $n-1$. Se $M \subset E$ é uma hipersuperfície, para cada $x \in M$, $T_x(M)^{\perp}$ é um espaço vectorial de dimensão 1 pelo que existem neste espaço dois, e só dois, vectores de norma 1, vectores a que se dá o nome de *normais unitárias* a M em x.

III.5.2 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma hipersuperfície, $x \in M$ e $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias a M no ponto x. A projecção ortogonal $\pi_x: E \to T_x(M)$ está então definida por

$$\pi_x(w) = w - \langle w, \vec{n}_x \rangle \vec{n}_x.$$

Dem: Basta atender a que a projecção ortogonal de w sobre $T_x(M)$ é igual à diferença entre w e a projecção ortogonal de w sobre $T_x(M)^{\perp}$. □

III.5.3 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma hipersuperfície, $x \in M$ e $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias no ponto x. Notando $\pi_y: E \to T_y(M)$ as projecções ortogonais, sabemos que, para cada $u \in T_x(M)$, $D\pi_x(u): E \to E$ é uma aplicação linear autoadjunta, que aplica $T_x(M)$ em $T_x(M)^{\perp}$ e $T_x(M)^{\perp}$ em $T_x(M)$; em particular, tem-se $D\pi_x(u)(\vec{n}_x) \in T_x(M)$. Podemos assim considerar uma aplicação linear

$$\lambda_x: T_x(M) \to T_x(M),$$

definida por

$$\lambda_x(u) = D\pi_x(u)(\vec{n}_x),$$

aplicação a que daremos o nome de *aplicação linear de Weingarten* da hipersuperfície M no ponto x, associada à escolha da normal unitária $\vec{n}_x$. É claro que, se alterarmos a escolha da normal unitária, a aplicação linear de Weingarten correspondente vem multiplicada por -1.

Tal como acontecia com a curvatura e a torção, no caso das curvas, a não nulidade da aplicação linear de Weingarten vai estar ligada ao facto de a hipersuperfície não estar contida num hiperplano.

III.5.4 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$ e $M \subset E$ uma hipersuperfície. Tem-se então:

a) Se a variedade M está contida nalgum *hiperplano afim* de E (isto é, nalgum subespaço afim de dimensão $n-1$), a aplicação linear de Weingarten $\lambda_x: T_x(M) \to T_x(M)$ é nula, para cada $x \in M$.

b) Se a variedade M é conexa e se, para cada $x \in M$, a aplicação linear de Weingarten $\lambda_x: T_x(M) \to T_x(M)$ é nula, então M está contido nalgum hiperplano afim de E.

Dem: Suponhamos que F é um hiperplano afim de E, com subespaço vectorial associado F_0, tal que $M \subset F$. Para cada $x \in M$, tem-se então $T_x(M) \subset F_0$ pelo que, uma vez que temos espaços vectoriais com a mesma dimensão, $T_x(M) = F_0$. Resulta daqui que a aplicação que a $x \in M$ associa a projecção ortogonal π_x, de E sobre $T_x(M)$, é constante e portanto, para cada $x \in M$ e $u \in T_x(M)$,

$$\lambda_x(u) = D\pi_x(u)(\vec{n}_x) = 0,$$

ou seja, $\lambda_x = 0$. Suponhamos, reciprocamente, que a variedade M é conexa e que $\lambda_x = 0$, para cada $x \in M$. O facto de $\vec{n}_x$ ser uma base de $T_x(M)^\perp$ implica que, para cada $x \in M$ e $u \in T_x(M)$, a restrição de $D\pi_x(u): E \to E$ a $T_x(M)^\perp$ é nula pelo que, tendo em conta III.3.10, a sua restrição a $T_x(M)$, sendo adjunta daquela, é também nula; concluímos daqui que, para cada $x \in M$ e $u \in T_x(M)$, $D\pi_x(u) = 0$. O facto de M ser uma variedade conexa implica agora que a aplicação que a x associa π_x é constante, ou seja, que existe um hiperplano F_0 de E tal que, para cada $x \in M$, $T_x(M) = F_0$. O lema III.4.6 garante-nos, finalmente que a variedade M está contida nalgum subespaço afim F, de subespaço vectorial F_0. □

Examinamos em seguida um resultado que relaciona a aplicação linear de Weingarten com a segunda forma fundamental h do fibrado vectorial tangente e a segunda forma fundamental $\widehat{h}$ do fibrado vectorial normal.

III.5.5 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma hipersuperfície, $x \in M$, $h_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ a segunda forma fundamental de M no ponto x e $h_x^\perp: T_x(M) \times T_x(M)^\perp \to T_x(M)$ a segunda forma fundamental do fibrado vectorial normal $T(M)^\perp$ nesse ponto. Se $\vec{n}_x$ é uma das normais unitárias em x e se $\lambda_x: T_x(M) \to T_x(M)$ é a correspondente aplicação linear de Weingarten, tem-se então que

$$\langle \lambda_x(u), v\rangle = \langle \vec{n}_x, h_x(u,v)\rangle, \quad h_x(u,v) = \langle \lambda_x(u), v\rangle \overrightarrow{n}_x,$$

em particular, a aplicação linear λ_x é autoadjunta, e

$$\lambda_x(u) = -h_x^\perp(u, \vec{n}_x).$$

Dem: Uma vez que a aplicação linear $D\pi_x(u): E \to E$ é autoadjunta, para cada $u \in T_x(M)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle \lambda_x(u), v\rangle &= \langle D\pi_x(u)(\vec{n}_x), v\rangle = \\ &= \langle \vec{n}_x, D\pi_x(u)(v)\rangle = \langle \vec{n}_x, h_x(u,v)\rangle,\\ h_x(u,v) &= \langle h_x(u,v), \overrightarrow{n}_x\rangle \overrightarrow{n}_x = \langle \lambda_x(u), v\rangle \overrightarrow{n}_x,\end{aligned}$$

e o facto de λ_x ser autoadjunta resulta agora de que, como se viu em III.3.23, h_x é uma aplicação bilinear simétrica. Quanto à segunda fórmula, sendo $\pi_x^\perp$ a projecção ortogonal de E sobre $T_x(M)^\perp$, tem-se $\pi_x^\perp = Id - \pi_x$, pelo que

$$\lambda_x(u) = D\pi_x(u)(\vec{n}_x) = -D\pi_x^\perp(u)(\vec{n}_x) = -h_x^\perp(u, \vec{n}_x). \qquad \square$$

III.5.6 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma hipersuperfície, tal que exista uma secção suave $\vec{n} = (\vec{n}_x)_{x\in M}$ de $T(M)^\perp$, com $\|\vec{n}_x\| = 1$, para cada $x \in M$,[77] e consideremos as correspondentes aplicações lineares de Weingarten $\lambda_x : T_x(M) \to T_x(M)$. Tem-se então

$$\lambda_x(u) = -D\vec{n}_x(u).$$

Dem: Uma vez que $\pi_x(w) = w - \langle w, \vec{n}_x\rangle\vec{n}_x$, obtemos

$$D\pi_x(u)(w) = -\langle w, D\vec{n}_x(u)\rangle\vec{n}_x - \langle w, \vec{n}_x\rangle D\vec{n}_x(u),$$

donde, em particular,

$$\lambda_x(u) = D\pi_x(u)(\vec{n}_x) = -\langle \vec{n}_x, D\vec{n}_x(u)\rangle\vec{n}_x - \langle \vec{n}_x, \vec{n}_x\rangle D\vec{n}_x(u).$$

Mas, de se ter, para cada x, $\langle \vec{n}_x, \vec{n}_x\rangle = 1$, obtemos $2\langle D\vec{n}_x(u), \vec{n}_x\rangle = 0$, por derivação, pelo que a fórmula anterior dá-nos

$$\lambda_x(u) = -D\vec{n}_x(u). \qquad \square$$

Analogamente aos métodos descritos em III.4.4, para a determinação do vector curvatura de uma curva, e em III.4.13, para a determinação do respectivo vector torção, apresentamos em seguida um método alternativo de determinação da aplicação linear de Weingarten e da segunda forma fundamental, que conduz frequentemente a cálculos menos morosos.

III.5.7 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma hipersuperfície e suponhamos que $(Z_x)_{x\in M}$ é uma secção suave de $T(M)^\perp$ tal que $Z_x \neq 0$, para cada $x \in M$. Escolhamos, para cada $x \in M$, $\vec{n}_x = Z_x/\|Z_x\|$ como normal unitária e seja $\lambda_x : T_x(M) \to T_x(M)$ a correspondente aplicação linear de Weingarten. Notando π_x a projecção ortogonal de E sobre $T_x(M)$, tem-se então

$$\lambda_x(u) = -\frac{1}{\|Z_x\|}\,\pi_x(DZ_x(u)).$$

Além disso, a segunda forma fundamental $h_x : T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ está definida por

---

[77] Tendo em conta III.2.11 e III.2.14, a existência de uma tal secção suave $\vec{n}$ é equivalente ao facto de a variedade M ser orientável. É claro que toda a variedade é localmente orientável, pelo que esta caracterização pode ser sempre utilizada localmente.

$$h_x(u,v) = -\frac{1}{\|Z_x\|^2}\,\langle DZ_x(u), v\rangle Z_x.$$

Dem: Podemos considerar a aplicação suave de M no espaço total $T(M)^\perp$, que a x associa (x, Z_x), e derivando-a em x na direcção de u, concluímos que $(u, DZ_x(u)) \in T_{(x,Z_x)}(T(M)^\perp)$. Tendo em conta III.3.22, vemos que, para a segunda forma fundamental $h_x^\perp$ do fibrado vectorial normal, tem-se

$$h_x^\perp(u, Z_x) = \pi_x(DZ_x(u))$$

pelo que, para obtermos a fórmula para a aplicação linear de Weingarten, basta repararmos que, por III.5.5,

$$\lambda_x(u) = -h_x^\perp(u, \vec{n}_x) = -\frac{1}{\|Z_x\|}\,h_x^\perp(u, Z_x).$$

Quanto à segunda forma fundamental, o facto de se ter $h_x(u,v) \in T_x(M)^\perp$ e de $\vec{n}_x$ ser uma base ortonormada deste espaço vectorial, permite-nos escrever,

$$\begin{aligned} h_x(u,v) &= \langle h_x(u,v), \vec{n}_x\rangle \vec{n}_x = \langle \lambda_x(u), v\rangle \frac{Z_x}{\|Z_x\|} = \\ &= -\frac{1}{\|Z_x\|^2}\langle \pi_x(DZ_x(u)), v\rangle Z_x, \end{aligned}$$

e a fórmula do enunciado resulta de se ter

$$\langle DZ_x(u), v\rangle - \langle \pi_x(DZ_x(u)), v\rangle = \langle DZ_x(u) - \pi_x(DZ_x(u)), v\rangle = 0,$$

por ser $DZ_x(u) - \pi_x(DZ_x(u)) \in T_x(M)^\perp$ e $v \in T_x(M)$. □

No caso em que o espaço ambiente E tem dimensão 2, as hipersuperfícies de E são simplesmente as curvas. O resultado seguinte mostra-nos o que vai ser, neste caso particular, a aplicação linear de Weingarten.

III.5.8 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão 2 e $M \subset E$ uma curva, que é portanto uma hipersuperfície de E. Seja $x \in M$, escolhamos uma das normais unitárias $\vec{n}_{+x}$, e seja $\lambda_x\colon T_x(M) \to T_x(M)$ a correspondente aplicação linear de Weingarten. Sejam $\vec{k}_x$ o vector curvatura e k_{+x} a curvatura sinalizada, definida por $\vec{k}_x = k_{+x}\vec{n}_{+x}$. Tem-se então, para cada $u \in T_x(M)$,

$$\lambda_x(u) = k_{+x}u.$$

Dem: Sendo $\vec{t}_x$ um dos vectores unitários de $T_x(M)$, que é portanto uma base ortonormada deste espaço, podemos escrever

$$\lambda_x(\vec{t}_x) = \langle \lambda_x(\vec{t}_x), \vec{t}_x \rangle \vec{t}_x = \langle \vec{n}_{+x}, h_x(\vec{t}_x, \vec{t}_x) \rangle \vec{t}_x = \langle \vec{n}_{+x}, \vec{k}_x \rangle \vec{t}_x =$$
$$= \langle \vec{n}_{+x}, k_{+x} \vec{n}_{+x} \rangle \vec{t}_x = k_{+x} \langle \vec{n}_{+x}, \vec{n}_{+x} \rangle \vec{t}_x = k_{+x} \vec{t}_x,$$

de onde deduzimos que, para cada $u \in T_x(M)$, tem-se $u = a\vec{t}_x$, e portanto

$$\lambda_x(u) = a\lambda_x(\vec{t}_x) = ak_{+x}\vec{t}_x = k_{+x}u. \qquad \square$$

III.5.9 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$ e $M \subset E$ uma hipersuperfície. Sejam $x \in M$ e $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias a M no ponto x. Para cada vector $u \in T_x(M)$, com $\|u\| = 1$, define-se o *vector curvatura normal* de M, no ponto x e na direcção de u, como sendo o vector

$$h_x(u, u) \in T_x(M)^\perp,$$

onde $h_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ é a segunda forma fundamental de $T(M)$ no ponto x. Uma vez que $h_x(u, u) \in T_x(M)^\perp = \mathbb{R}\vec{n}_x$, podemos considerar a componente do vector $h_x(u, u)$ em $\vec{n}_x$, que é igual a

$$\langle \vec{n}_x, h_x(u, u) \rangle,$$

e dizemos que este número real é a *curvatura normal sinalizada* de M, no ponto x e na direcção de u, relativamente à escolha da normal unitária positiva $\vec{n}_x$. É claro que, se trocássemos a escolha da normal unitária positiva $\vec{n}_x$, a curvatura normal sinalizada viria multiplicada por -1. Repare-se que, tendo em conta III.5.5, a curvatura normal sinalizada de M no ponto x, na direcção de u, é também dada por

$$\langle \lambda_x(u), u \rangle,$$

onde $\lambda_x: T_x(M) \to T_x(M)$ é a aplicação linear de Weingarten.

III.5.10 É claro que, no caso particular em que o espaço euclidiano ambiente E tem dimensão 2, vão existir dois, e só dois vectores de norma 1 em $T_x(M)$ e o vector curvatura normal na direcção de qualquer desses vectores é precisamente o vector curvatura da curva M nesse ponto. Do mesmo modo, feita a escolha de uma normal unitária $\vec{n}_{+x}$, a curvatura normal sinalizada correspondente vai ser a curvatura sinalizada de M, definida na secção anterior.

III.5.11 **(Interpretação geométrica das curvaturas normais)** Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$ e $M \subset E$ uma hipersuperfície, que vamos supor sem bordo. Sejam $x_0 \in M$ e $\vec{n}_{+x_0}$ uma das normais unitárias a M no ponto x_0. Seja ainda $u \in T_{x_0}(M)$, com $\|u\| = 1$.
Consideremos o subespaço vectorial P_0, de dimensão 2, de E, gerado por $\vec{n}_{+x_0}$ e u, que é portanto um plano vectorial contendo o espaço vectorial normal $T_{x_0}(M)^\perp$, e seja $P = x_0 + P_0$ o correspondente plano afim, passando por x_0, que é uma variedade sem bordo, de dimensão 2, tendo em cada ponto espaço vectorial tangente igual a P_0.

Consideremos a intersecção $M' = M \cap P$ da hipersuperfície M com o plano afim P. Tem-se então que M' é uma variedade de dimensão 1 no ponto x_0 e com $T_{x_0}(M') = T_{x_0}(M) \cap P_0$ e o vector curvatura normal, $h_{x_0}(u,u)$, de M em x_0 na direcção de u é o vector curvatura de M' em x_0.[78] Do mesmo modo, podemos escolher $\vec{n}_{+x_0}$ como normal unitária positiva de M' em x_0 e então a curvatura normal sinalizada de M em x_0 na direcção de u vai ser a curvatura sinalizada de M' em x_0, relativamente a esta escolha.

Dem: Seja $\pi_0^\perp$ a projecção ortogonal de E sobre $P_0^\perp$ e seja $\varphi: M \to P_0^\perp$ a aplicação suave definida por $\varphi(x) = \pi_0^\perp(x - x_0)$. Para cada $v \in P_0^\perp$, tem-se, em particular, v ortogonal a $\vec{n}_{+x_0}$, e portanto $v \in T_{x_0}(M)$, e vem então $D\varphi_{x_0}(v) = \pi_0^\perp(v) = v$. Concluímos assim que $D\varphi_{x_0}: T_{x_0}(M) \to P_0^\perp$ é uma aplicação linear sobrejectiva pelo que, uma vez que M' é o conjunto dos $x \in M$ tais que $x - x_0 \in P_0$, isto é, tais que $\varphi(x) = 0$, deduzimos de II.4.32 que M' é uma variedade de dimensão $(n-1)-(n-2) = 1$ no ponto x_0 e que $T_{x_0}(M')$ é o conjunto $v \in T_{x_0}(M)$ tais que $\pi_0^\perp(v) = 0$, isto é, tais que $v \in P_0$.[79] Em particular, $u \in T_{x_0}(M')$, e portanto u é um dos dois vectores tangentes unitários de M' em x_0.

Notemos h_{x_0} a segunda forma fundamental de M em x_0 e h'_{x_0} a de M' nesse ponto (ou, mais precisamente, a de um aberto conveniente de M', contendo x_0, que seja uma curva). Uma vez que o espaço total $T(P)$ está contido em $P \times P_0$, concluímos que

$$T_{(x_0,u)}(T(P)) \subset T_{(x_0,u)}(P \times P_0) = P_0 \times P_0,$$

pelo que o facto de se ter

$$(u, h'_{x_0}(u,u)) \in T_{(x_0,u)}(T(M')) \subset T_{(x_0,u)}(T(P))$$

implica que $h'_{x_0}(u,u) \in P_0$. Uma vez que $h'_{x_0}(u,u)$ é ortogonal a $T_{x_0}(M')$, em particular ortogonal a u, concluímos que $h'_{x_0}(u,u) \in \mathbb{R}\vec{n}_{+x}$, por outras palavras, $h'_{x_0}(u,u) \in T_{x_0}(M)^\perp$. Por outro lado o facto de se ter $M' \subset M$ implica que $T(M') \subset T(M)$, pelo que se tem também $(u, h'_{x_0}(u,u)) \in T_{(x_0,u)}(T(M))$ e portanto a caracterização da segunda forma fundamental de M dada na alínea c) de III.3.19 garante que se tem $h_{x_0}(u,u) = h'_{x_0}(u,u)$. □

Uma questão que se põe naturalmente é a de estudar o modo como as curvaturas normais sinalizadas no ponto x_0 variam em função do vector unitário u em $T_x(M)$. É isso que fazemos em seguida, começando por

---

[78] Em rigor estamos a fazer um pequeno abuso de linguagem: Apenas definimos vector curvatura de uma curva e apenas podemos garantir que M' é uma variedade de dimensão 1 em x_0, e portanto também num certo aberto $\widehat{M}'$ de M', contendo x_0. É ao vector curvatura da curva $\widehat{M}'$ em x_0 que nos estamos a referir.

[79] Esta conclusão também podia ter sido obtida a partir do teorema de transversalidade II.4.38.

relembrar a noção de valor próprio de uma aplicação linear e algumas das suas propriedades elementares.

III.5.12 Lembremos que, se F é um espaço vectorial e se $\lambda: F \to F$ é uma aplicação linear, diz-se que um escalar a é um *valor próprio* de λ se existe $x \in F \setminus \{0\}$ tal que $\lambda(x) = ax$; o conjunto dos vectores $x \in F$, que verificam a igualdade anterior, é então um subespaço vectorial de F, cujos elementos se chamam *vectores próprios* de λ, relativamente ao valor próprio a .[80]

III.5.13 Sejam F um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$ e $\lambda: F \to F$ uma aplicação linear autoadjunta. Seja S $\subset F$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1,

$$S = \{x \in F \mid \|x\| = 1\},$$

e seja $\varphi: S \to \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por

$$\varphi(u) = \langle \lambda(u), u \rangle.$$

Tem-se então que um vector $u \in S$ é um vector próprio de λ se, e só se, $D\varphi_u: T_u(S) \to \mathbb{R}$ é a aplicação linear nula e, nesse caso, o valor próprio correspondente é $\varphi(u)$. Em particular, λ admite pelo menos um valor próprio $a \in \mathbb{R}$, a saber o valor máximo (ou mínimo) da aplicação φ sobre o conjunto compacto S.

Dem: Como já vimos, S é uma variedade sem bordo, admitindo, em cada $u \in S$, o espaço vectorial tangente $T_u(S)$ constituído pelos vectores $w \in F$ tais que $\langle u, w \rangle = 0$. Dados $u \in S$ e $w \in T_u(S)$, tem-se

$$D\varphi_u(w) = \langle \lambda(w), u \rangle + \langle \lambda(u), w \rangle = 2\langle \lambda(u), w \rangle.$$

Concluímos daqui que $D\varphi_u = 0$ se, e só se, $\langle \lambda(u), w \rangle = 0$, para cada w tal que $\langle u, w \rangle = 0$, isto é, se, e só se, $\lambda(u)$ é ortogonal ao complementar ortogonal do subespaço vectorial gerado por u, condição que é equivalente à de se ter $\lambda(u) \in \mathbb{R}u$, isto é, à de u ser um vector próprio de λ. Sendo então a o valor próprio correspondente, tem-se $\lambda(u) = au$, donde

$$\varphi(u) = \langle au, u \rangle = a\langle u, u \rangle = a,$$

o que conclui a demonstração da primeira afirmação do enunciado. Para terminar basta agora reparar que, uma vez que S é compacta e não vazia, vai existir $u \in S$ onde φ tome o valor máximo (respectivamente mínimo) e que, para esse u, tem-se então $D\varphi_u = 0$. □

III.5.14 **(Corolário)** Sejam F um espaço euclidiano de dimensão n e $\lambda: F \to F$ uma aplicação linear autoadjunta. Existe então uma base ortonormada

[80] Repare-se que 0 é um vector próprio mas que, por definição, cada valor próprio admite um vector próprio não nulo.

$w_1, \ldots, w_n$ de F formada por vectores próprios de λ, tendo-se portanto $\lambda(w_j) = a_j w_j$, com $a_j \in \mathbb{R}$.

Dem: A demonstração faz-se por indução na dimensão n de F. Se $n = 0$, o resultado é trivial, bastando tomar para base a família vazia de vectores. Supondo que o resultado é válido quando F tem dimensão n, vejamos o que sucede no caso em que F tem dimensão $n+1$. Pelo resultado precedente, F admite um vector próprio $w_{n+1} \neq 0$, com valor próprio a_{n+1}, podendo já supor-se que $\|w_{n+1}\| = 1$, se necessário substituindo w_{n+1} por $w_{n+1}/\|w_{n+1}\|$. Seja $\widehat{F}$ o subespaço vectorial de F, com dimensão n, complementar ortogonal do subespaço vectorial $\mathbb{R}w_{n+1}$, gerado por w_{n+1}. Para cada $x \in \widehat{F}$, tem-se

$$\langle \lambda(x), w_{n+1} \rangle = \langle x, \lambda(w_{n+1}) \rangle = a_{n+1} \langle x, w_{n+1} \rangle = 0,$$

o que mostra que $\lambda(x) \in \widehat{F}$. A restrição de λ a $\widehat{F}$ é então uma aplicação linear autoadjunta de $\widehat{F}$ em $\widehat{F}$ pelo que, pela hipótese de indução, podemos considerar uma base ortonormada $w_1, \ldots, w_n$ de $\widehat{F}$, com $\lambda(w_j) = a_j w_j$, sendo trivial que $w_1, \ldots, w_{n+1}$ é uma base ortonormada de F, constituída por vectores próprios de λ. □

III.5.15 Nas condições do corolário anterior, é fácil constatar que $x \in F$ verifica uma igualdade $\lambda(x) = ax$ se, e só se, x é combinação linear de alguns dos vectores w_j, com os correspondentes a_j todos iguais a a. Em particular, os únicos valores próprios de λ são os números reais $a_1, \ldots, a_n$.

Estamos agora em condições de aplicar as observações precedentes ao estudo das curvaturas normais de uma hipersuperfície.

III.5.16 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma hipersuperfície, $x \in M$, $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias a M no ponto x e $\lambda_x\colon T_x(M) \to T_x(M)$ a correspondente aplicação linear de Weingarten, que sabemos ser autoadjunta. Chamam-se *curvaturas principais* de M no ponto x (associadas à escolha da normal unitária $\vec{n}_x$) aos valores próprios de λ_x; aos vectores próprios correspondentes, que tenham norma 1, daremos o nome de *vectores tangentes principais*, chamando-se *direcções principais* às respectivas direcções ou, o que é equivalente, às rectas vectoriais geradas por aqueles vectores.

Se trocarmos a escolha da normal unitária $\vec{n}_x$, sabemos que a correspondente aplicação linear de Weingarten vem multiplicada por -1, de onde se deduz trivialmente que as curvaturas principais vêm também multiplicadas por -1 e que os vectores tangentes principais e as direcções principais não são alteradas.

Se nos lembrarmos que a curvatura normal sinalizada de M no ponto x, na direcção do vector $u \in T_x(M)$, com $\|u\| = 1$, é dada por $\langle \lambda_x(u), u \rangle$, concluímos, do que se viu em III.5.13, que, se a curvatura normal sinalizada na direcção de u for máxima ou mínima (relativamente aos diferentes vectores de norma 1 de $T_x(M)$), então u é um vector tangente principal e que, em geral, se u é um vector tangente principal, a curvatura principal correspondente é igual à curvatura normal sinalizada na direcção de u.

III.5.17 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n+1$, $M \subset E$ uma hipersuperfície, $x \in M$ e $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias a M no ponto x. Tendo em conta o que vimos em III.5.14, o espaço vectorial tangente $T_x(M)$ admite uma base ortonormada $w_1, \ldots, w_n$, constituída por vectores tangentes principais, com as correspondentes curvaturas principais $k_1, \ldots, k_n$ iguais às curvaturas normais sinalizadas nas respectivas direcções.

Tendo em conta o que se disse em III.5.15, $k_1, \ldots, k_n$ são as únicas curvaturas principais de M no ponto x e, além disso, no caso em que aqueles n números reais são todos distintos (isto é quando M admite em x n curvaturas principais distintas), os únicos vectores tangentes principais vão ser os x_j e os $-x_j$, havendo, em consequência, n, e só n, direcções principais, as quais vão ser ortogonais duas a duas.

Dá-se o nome de *pontos umbílicos* de M aos pontos $x \in M$ que não admitem mais do que uma curvatura principal ou, o que é equivalente, àqueles onde todas as direcções são principais.

III.5.18 É claro que, no caso em que o espaço euclidiano ambiente E tem dimensão 2, a hipersuperfície $M \subset E$ vai ser uma curva e vai ter em cada ponto x uma única curvatura principal, igual à curvatura sinalizada k_{+x}, a direcção principal correspondente sendo o próprio $T_x(M)$ (cf. III.5.8).

III.5.19 No caso em que o espaço euclidiano ambiente E tem dimensão 3, uma hipersuperfície $M \subset E$ é uma variedade de dimensão 2, sendo portanto aquilo a que se chama usualmente uma *superfície*. Neste caso, e dentro do espírito do que dissemos em III.5.17, dado $x \in M$ e escolhida uma normal unitária $\vec{n}_x$, duas situações são possíveis:

a) x é um ponto umbílico de M e portanto todas as direcções são principais e com uma mesma curvatura principal, que vai ser portanto a curvatura normal sinalizada associada a qualquer vector tangente unitário $u \in T_x(M)$.

b) M admite em x duas curvaturas principais distintas $k_1 < k_2$; essas curvaturas principais são então as curvaturas normais sinalizadas mínima e máxima (é costume referi-las simplesmente como a *curvatura mínima* e a *curvatura máxima*) e cada uma delas possui uma única direcção principal, ou seja, dois, e só dois, vectores tangentes principais, um simétrico do outro. Estas duas direcções são ortogonais entre si e todas as curvaturas normais sinalizadas correspondentes a vectores tangente unitários u com direcção distinta destas vão estar estritamente entre k_1 e k_2 (se ela fosse igual a uma destas duas, então teríamos também um vector tangente principal). É claro que, se trocássemos a escolha da normal unitária $\vec{n}_x$, a nova curvatura máxima ia ser simétrica da antiga curvatura mínima e a nova curvatura mínima ia ser simétrica da antiga curvatura máxima.

No caso de termos um ponto umbílico, também podemos falar de curvatura máxima e curvatura mínima, considerando que ambas coincidem com a

curvatura normal sinalizada constante.
É costume definir na teoria da superfícies duas grandezas associadas às curvaturas principais: A primeira, a *curvatura média* é simplesmente a média $\frac{k_1+k_2}{2}$ entre a curvatura mínima e a curvatura máxima; a segunda a que se costuma dar o nome de *curvatura de Gauss* é o produto $k_1 k_2$ das curvaturas mínima e máxima. Esta última vai ter, apesar da aparente artificialidade da sua definição, e como veremos nas próximas secções, um interesse geométrico muito especial. Repare-se, desde já, que quando trocamos a escolha da normal unitária $\vec{n}_x$, a curvatura média vem multiplicada por -1 mas a curvatura de Gauss não é alterada.

Vamos terminar esta secção com o estudo da noção de ponto focal que, como veremos, está intimamente ligada, no caso das hipersuperfícies, às curvaturas principais.

III.5.20 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão n e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m. Podemos então considerar o fibrado vectorial normal $T(M)^\perp$, que é um fibrado vectorial de dimensão $n-m$, pelo que o seu espaço total,

$$T(M)^\perp = \{(x,w) \in E \times E \mid x \in M, w \in T_x(M)^\perp\},$$

é uma variedade de dimensão $m + (n-m) = n$ (cf. III.1.27). Consideremos a aplicação suave $\varphi: T(M)^\perp \to E$ definida por $\varphi(x,w) = x + w$, para a qual se tem evidentemente

$$D\varphi_{(x,w)}(u,z) = u + z,$$

para cada $(u,z) \in T_{(x,w)}(T(M)^\perp)$.
No caso em que $w = 0$, tem-se, por III.3.20,

$$T_{(x,0)}(T(M)^\perp) = T_x(M) \times T_x(M)^\perp,$$

pelo que o facto de ter lugar a soma directa $E = T_x(M) \oplus T_x(M)^\perp$ implica que a aplicação linear $D\varphi_{(x,0)}: T_x(M) \times T_x(M)^\perp \to E$, que está definida por $(u,z) \mapsto u + z$, vai ser um isomorfismo.
Vamos dizer que um vector $w \in T_x(M)^\perp$ é uma *normal focalizante* de M no ponto x se a aplicação linear

$$D\varphi_{(x,w)}: T_{(x,w)}(T(M)^\perp) \to E$$

não for um isomorfismo e diremos então que $x + w$ é um *ponto focal* de M no ponto x. O que dissemos atrás mostra-nos portanto que 0 nunca é uma normal focalizante.

III.5.21 **(Nota)** No caso em que a variedade M não tem bordo, sabemos que a variedade $T(M)^\perp$ também não tem bordo pelo que, tendo em conta o teorema da função inversa, dizer que $w \in T_x(M)^\perp$ é uma normal focalizante em x equivale a dizer que não existe uma vizinhança aberta de (x,w) em $T(M)^\perp$ onde a restrição de φ seja um difeomorfismo sobre um aberto de E. Intuitivamente, podemos pensar nos pontos focais de M em x como sendo aqueles em que existe a possibilidade de se concentrarem as normais em pontos próximos de x.[81]

III.5.22 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n+1$, $M \subset E$ uma hipersuperfície, $x \in M$ e $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias a M no ponto x. Tem-se então que as normais focalizantes de M no ponto x são os vectores da forma $\frac{1}{a}\vec{n}_x$, com o número real a igual a uma das curvaturas principais não nulas de M em x. Em particular, não pode haver mais que n normais focalizantes de M em x.

Dem: Seja $w \in T_x(M)^\perp$, portanto $w = b\vec{n}_x$, para um certo $b \in \mathbb{R}$. Dizer que w é uma normal focalizante em x é dizer que a aplicação linear $D\varphi_{(x,w)}\colon T_{(x,w)}(T(M)^\perp) \to E$, definida por $(u,z) \mapsto u+z$, não é um isomorfismo pelo que, uma vez que se trata de uma aplicação linear entre dois espaços vectoriais com a mesma dimensão $n+1$, isso é ainda equivalente a dizer que existe um elemento não nulo $(u,z) \in T_{(x,w)}(T(M)^\perp)$ tal que $u+z=0$. Dito de outro modo, dizer que w é uma normal focalizante equivale a dizer que existe $u \in T_x(M)$, não nulo, tal que $(u,-u)$ esteja em $T_{(x,w)}(T(M)^\perp)$. Mas, se $u \in T_x(M)$, vem também $-u \in T_x(M) = T_x(M)^{\perp\perp}$ pelo que, tendo em conta a caracterização da segunda forma fundamental apresentada na alínea c) de III.3.19, concluímos que o facto de $(u,-u)$ estar em $T_{(x,w)}(T(M)^\perp)$ é equivalente ao facto de se ter $-u = h^\perp_x(u,w)$, onde $h^\perp_x$ é a segunda forma fundamental do fibrado vectorial $T(M)^\perp$. Tendo em conta a caracterizção de λ_x em III.5.5, vemos que dizer que $w = b\vec{n}_x$ é uma normal focalizante em x é equivalente a dizer que existe $u \neq 0$ em $T_x(M)$ tal que se tenha

$$u = -bh^\perp_x(u,\vec{n}_x) = b\lambda_x(u),$$

o que exprime precisamente o facto de se ter $b \neq 0$ e de $\frac{1}{b}$ ser um valor próprio da aplicação linear de Weingarten λ_x. □

III.5.23 Vejamos o que se passa no caso particular em que E tem dimensão 2 e em que $M \subset E$ é uma curva, portanto também uma hipersuperfície. Sejam $x \in M$, $\vec{n}_{+x}$ uma normal unitária a M no ponto x, $\vec{k}_x$ o vector curvatura e k_{+x} a curvatura sinalizada, definida por $\vec{k}_x = k_{+x}\vec{n}_{+x}$. Tem-se então que a existência de um ponto focal de M em x é equivalente à condição de se ter $\vec{k}_x \neq 0$ e, nesse caso, esse ponto focal é único, sendo igual a

[81] Se imaginarmos que em cada ponto x de X existem lançadores de alfinetes apontando em todas as direcções ortogonais a $T_x(X)$, podemos dizer que os pontos focais são aqueles em que não é muito cómodo ficarmos colocados.

$$x + \frac{1}{k_{+x}}\vec{n}_{+x} = x + \frac{\vec{k}_x}{k_{+x}^2}.$$

A este ponto focal costuma-se dar o nome de *centro de curvatura* de M no ponto x e à sua distância a x, igual a $1/k_x$, dá-se o nome de *raio de curvatura* de M em x.

III.5.24 **(Exemplo)** Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$ e seja $S_r \subset E$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio $r > 0$,

$$S_r = \{x \in E \mid \langle x, x\rangle = r^2\},$$

conjunto que, como sabemos, é uma variedade sem bordo de dimensão $n-1$, tendo em cada ponto x o espaço vectorial tangente $T_x(S_r)$ constituído pelos vectores $u \in E$ tais que $\langle u, x\rangle = 0$. Para cada $x \in S_r$, escolhamos $\vec{n}_x = \frac{x}{r}$ como normal unitária positiva. Tendo em conta III.5.6, vemos que a aplicação linear de Weingarten $\lambda_x: T_x(S_r) \to T_x(S_r)$ está definida por

$$\lambda_x(u) = -D\vec{n}_x(u) = -\frac{u}{r}.$$

Esta igualdade mostra-nos que cada ponto $x \in S_r$ é um ponto umbílico, tendo $-1/r$ como única curvatura principal. A segunda forma fundamental $h_x: T_x(S_r) \times T_x(S_r) \to T_x(S_r)^\perp$ pode ser determinada agora por aplicação de III.5.5:

$$h_x(u, w) = \langle h_x(u, w), \vec{n}_x\rangle\vec{n}_x = \langle \lambda_x(w), u\rangle\vec{n}_x = -\frac{1}{r^2}\langle w, u\rangle x.$$

§6. Tensor de curvatura.

III.6.1 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Para cada $x \in A$, notemos $\pi_x: E \to E_x$ a projecção ortogonal e $h_x: T_x(A) \times E_x \to E_x^\perp$ segunda forma fundamental de $\underline{E}$ em x. Para cada x existe então uma aplicação trilinear

$$R_x: T_x(A) \times T_x(A) \times E_x \to E_x,$$

a que daremos o nome de *tensor de curvatura* de $\underline{E}$ no ponto x, definida por

$$R_x(u, v, w) = D\pi_x(v)(h_x(u, w)) - D\pi_x(u)(h_x(v, w)).$$

No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, esta aplicação é mesmo linear complexa na terceira variável.

Dem: Sabemos que a aplicação linear $D\pi_x(v): E \to E$ aplica $E_x^\perp$ em E_x, de onde se deduz que $D\pi_x(v)(h_x(u, w))$ pertence a E_x. Por simetria dos papéis de u e v, vemos também que $D\pi_x(u)(h_x(v,w)) \in E_x$, o que mostra que $R_x(u,v,w) \in E_x$. É evidente que R_x, como aplicação

$$T_x(A) \times T_x(A) \times E_x \to E_x,$$

é uma aplicação trilinear. □

III.6.2 Nas condições anteriores, o tensor de curvatura de $\underline{E}$ no ponto x é *antissimétrico* nas duas primeiras variáveis, isto é, verifica a igualdade

$$R_x(u,v,w) = -R_x(v,u,w).$$

Em particular, tomando $u = v$,

$$R_x(u,u,w) = 0.$$

e portanto, no caso em que $T_x(A)$ tem dimensão 1, o tensor de curvatura R_x é identicamente nulo.

Dem: A antissimetria de R_x nas duas primeiras variáveis é uma consequência imediata da definição, sendo também trivial que essa antissimetria implica a fórmula $R_x(u,u,w) = 0$. Por fim, supondo que $T_x(A)$ tem dimensão 1, podemos considerar uma base u_0 de $T_x(A)$ e então, dados $u, v \in T_x(A)$ e $w \in E_x$, tem-se $u = au_0$ e $v = bu_0$, portanto

$$R_x(u,v,w) = abR_x(u_0,u_0,w) = 0.$$ □

Para cada $x \in A$, $u, v \in T_x(A)$ e $w \in E_x$, $R_x(u,v,w)$ é um elemento de E_x, que fica portanto determinado se conhecermos os produtos internos $\langle R_x(u,v,w), z\rangle$, para todo o $z \in E_x$. O resultado que apresentamos em seguida estabelece uma fórmula importante para este produto interno.

III.6.3 **(Fórmula de Gauss)** Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, e notemos h_x as segundas formas fundamentais e R_x os tensores de curvatura. Dados $x \in A$, $u, v \in T_x(A)$ e $w, z \in E_x$, tem-se então

$$\langle R_x(u,v,w), z\rangle = \langle h_x(u,w), h_x(v,z)\rangle - \langle h_x(v,w), h_x(u,z)\rangle.$$

Dem: O facto de $D\pi_x(v)\colon E \to E$ ser uma aplicação linear autoadjunta permite-nos escrever

$$\begin{aligned}\langle D\pi_x(v)(h_x(u,w)), z\rangle &= \langle h_x(u,w), D\pi_x(v)(z)\rangle = \\ &= \langle h_x(u,w), h_x(v,z)\rangle\end{aligned}$$

e portanto também, por simetria dos papéis de u e v,

$$\langle D\pi_x(u)(h_x(v,w)), z\rangle = \langle h_x(v,w), h_x(u,z)\rangle.$$

O resultado é assim uma consequência da definição do tensor de curvatura, se subtrairmos as igualdades precedentes membro a membro. □

III.6.4 **(Corolário)** Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Seja $E' \subset E$ um subespaço vectorial contendo todas as fibras E_x. Tem-se então que o tensor de curvatura R_x é o mesmo quer ser considere E ou E' como espaço ambiente das fibras.

Dem: Para verificar que $R_x(u, v, w)$ é o mesmo nas duas situações, basta verificar que isso acontece ao respectivo produto interno por um elemento $z \in E_x$ arbitrário e isso é uma consequência da fórmula de Gauss, tendo em conta III.3.21. □

III.6.5 **(Corolário)** Nas condições precedentes, tem-se, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\langle R_x(u, v, w), z\rangle = -\langle R_x(u, v, z), w\rangle,$$

em particular, tomando $w = z$,

$$\langle R_x(u, v, w), w\rangle = 0.$$

Em consequência, no caso em que a fibra E_x tem dimensão 1, o tensor de curvatura R_x é identicamente nulo.

Dem: A primeira afirmação é uma consequência trivial da fórmula para $\langle R_x(u, v, w), z\rangle$ obtida no resultado precedente e a segunda afirmação é claramente uma consequência da primeira. Por fim, e tal como na demonstração de III.6.2, no caso em que E_x tem dimensão 1 podemos considerar uma base w_0 de E_x e, dados $w, z \in E_x$, tem-se $w = aw_0$ e $z = bw_0$, pelo que

$$\langle R_x(u, v, w), z\rangle = ab\langle R_x(u, v, w_0), w_0\rangle = 0$$

e o facto de z ser um vector arbitrário da fibra E_x implica que $R_x(u, v, w) = 0$. □

Repare-se que, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, a conclusão do corolário precedente seria

$$\langle R_x(u, v, w), z\rangle = -\overline{\langle R_x(u, v, z), w\rangle}$$

pelo que, fazendo $w = z$, apenas concluiríamos que $\langle R_x(u, v, w), w\rangle$ é imaginário puro.

III.6.6 Se o fibrado vectorial $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ é constante, isto é, se todas as fibras E_x são iguais a um mesmo subespaço vectorial F de E, então o tensor de curvatura R_x é identicamente nulo.

Dem: Basta atender a que a aplicação que a x associa a projecção ortogonal π_x é constante, pelo que tem derivada nula. □

III.6.7 Seja E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$ e consideremos a hiper-superfície esférica de centro 0 e raio $r > 0$,

$$S_r = \{x \in E \mid \langle x, x\rangle = r^2\}.$$

Vimos no exemplo III.5.24 que a segunda forma fundamental

$$h_x : T_x(S_r) \times T_x(S_r) \to T_x(S_r)^\perp$$

está definida por

$$h_x(u, w) = -\frac{1}{r^2}\langle w, u\rangle x,$$

pelo que, aplicando a fórmula de Gauss, obtemos, para o tensor de curvatura

$$R_x : T_x(S_r) \times T_x(S_r) \times T_x(S_r) \to T_x(S_r),$$

$$\begin{aligned}\langle R_x(u, v, w), z\rangle &= \langle h_x(u, w), h_x(v, z)\rangle - \langle h_x(v, w), h_x(u, z)\rangle = \\ &= \frac{1}{r^2}(\langle w, u\rangle\langle z, v\rangle - \langle w, v\rangle\langle z, u\rangle) = \\ &= \Big\langle \frac{1}{r^2}(\langle w, u\rangle v - \langle w, v\rangle u)\,,\, z\Big\rangle,\end{aligned}$$

o que, tendo em conta o facto de o primeiro factor deste último produto interno estar em $T_x(S_r)$, implica que

$$R_x(u, v, w) = \frac{1}{r^2}(\langle w, u\rangle v - \langle w, v\rangle u).$$

Constatamos, em particular, que, no caso em que $n \geq 3$, R_x não é nulo, mais precisamente, para cada $w \neq 0$ em $T_x(S_r)$, existem u, v tais que $R_x(u, v, w) \neq 0$, por exemplo $u = w$ e v não nulo e ortogonal a u (o espaço vectorial tangente tem dimensão $n - 1 \geq 2$).

III.6.8 Sejam $A \subset G$, $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ e $f : \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Sejam E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, e notemos R e $\widehat{R}$ os tensores de curvatura de $\underline{E}$ e do fibrado vectorial imagem recíproca $f^*\underline{E}$, respectivamente. Tem-se então, para cada $y \in \widehat{A}$, $u, v \in T_y(\widehat{A})$ e $w \in (f^*\underline{E})_y = E_{f(y)}$,

$$\widehat{R}_y(u, v, w) = R_{f(y)}(Df_y(u), Df_y(v), w).$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da definição, desde que se utilize o teorema de derivação da função composta e a fórmula para a segunda forma fundamental $\widehat{h}$ de $f^*\underline{E}$, obtida em III.3.13. □

Lembremos que a derivada covariante de secções dum fibrado vectorial, definida em III.3.1, vai jogar o mesmo papel que a derivada usual, no quadro das funções com valores num espaço vectorial, isto é, das secções dum fibrado vectorial constante. O resultado que se segue mostra que a curvatura aparece como um factor correctivo para que o análogo da fórmula apresentada em III.3.26 seja válido no quadro da derivação covariante. Vamos utilizar as notações introduzidas em III.3.6.

III.6.9 Sejam $M \subset G$ uma variedade[82], E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, e seja, para cada $x \in M$,

$$R_x : T_x(M) \times T_x(M) \times E_x \to E_x$$

o respectivo tensor de curvatura. Se W é uma secção de $\underline{E}$ e se X e Y são dois campos vectoriais sobre M, notemos $R(X, Y, W)$ a secção de $\underline{E}$, que a cada $x \in M$ associa $R_x(X_x, Y_x, W_x)$. Dados os campos vectoriais suaves X e Y sobre M e a secção suave W de $\underline{E}$, tem-se então

$$\nabla_{[X,Y]} W = \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W + R(X, Y, W).$$

Dem: Seja $\widehat{W}$ um prolongamento suave de W a um aberto de G contendo M. Uma vez que se tem

$$(\nabla_Y W)_x = \nabla W_x(Y_x) = \pi_x(DW_x(Y_x)) = \pi_x(D\widehat{W}_x(Y_x)),$$

obtemos, pela regra de Leibnitz,

$$\begin{aligned} D(\nabla_Y W)_x(X_x) = D\pi_x(X_x)(DW_x(Y_x)) + \\ + \pi_x(D^2\widehat{W}_x(X_x, Y_x)) + \pi_x(D\widehat{W}_x(DY_x(X_x))) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (\nabla_X \nabla_Y W)_x &= \pi_x(D(\nabla_Y W)_x(X_x)) = \\ &= \pi_x(D\pi_x(X_x)(DW_x(Y_x))) + \\ &\quad + \pi_x(D^2\widehat{W}_x(X_x, Y_x)) + \pi_x(D\widehat{W}_x(DY_x(X_x))). \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} (\nabla_Y \nabla_X W)_x &= \pi_x(D\pi_x(Y_x)(DW_x(X_x))) + \\ &\quad + \pi_x(D^2\widehat{W}_x(Y_x, X_x)) + \pi_x(D\widehat{W}_x(DX_x(Y_x))). \end{aligned}$$

Tendo em conta a simetria da aplicação bilinear $D^2\widehat{W}_x$ e uma vez que

$$\begin{aligned} (\nabla_{[X,Y]} W)_x &= \pi_x(DW_x(DY_x(X_x) - DX_x(Y_x))) = \\ &= \pi_x(D\widehat{W}_x(DY_x(X_x))) - \pi_x(D\widehat{W}_x(DX_x(Y_x))), \end{aligned}$$

obtemos, a partir das três igualdades anteriores,

$$\begin{aligned} (\nabla_{[X,Y]} W)_x = (\nabla_X \nabla_Y W)_x - (\nabla_Y \nabla_X W)_x + \\ + \pi_x(D\pi_x(Y_x)(DW_x(X_x))) - \pi_x(D\pi_x(X_x)(DW_x(Y_x))). \end{aligned}$$

[82]A razão por que exigimos aqui que a base seja uma variedade está em que só nesse quadro definimos o parêntesis de Lie de dois campos vectoriais suaves.

Tendo em conta a definição do tensor de curvatura, vemos que, para demonstrar o nosso resultado, será suficiente verificarmos que se tem

$$\pi_x(D\pi_x(Y_x)(DW_x(X_x))) = D\pi_x(Y_x)(h_x(X_x, W_x)),$$
$$\pi_x(D\pi_x(X_x)(DW_x(Y_x))) = D\pi_x(X_x)(h_x(Y_x, W_x)),$$

bastando demonstrar a primeira fórmula, visto que a segunda se obtém a partir desta por troca dos papéis dos campos vectoriais X e Y. Ora, tendo em conta a caracterização da derivada covariante dada em III.3.14, tem-se

$$DW_x(X_x) = \nabla W_x(X_x) + h_x(X_x, W_x),$$

com $\nabla W_x(X_x) \in E_x$ e $h_x(X_x, W_x) \in E_x^\perp$, pelo que, uma vez que $D\pi_x(Y_x)$ aplica E_x em $E_x^\perp$ e $E_x^\perp$ em E_x, sai

$$\begin{aligned} D\pi_x(Y_x)(DW_x(X_x)) = D\pi_x(Y_x)(\nabla W_x(X_x)) &+ \\ + D\pi_x(Y_x)(h_x(X_x, W_x)),& \end{aligned}$$

com $D\pi_x(Y_x)(\nabla W_x(X_x)) \in E_x^\perp$ e $D\pi_x(Y_x)(h_x(X_x, W_x)) \in E_x$, o que implica que a segunda parcela do segundo membro é a projecção ortogonal sobre E_x do primeiro membro da igualdade. □

Sabemos que, numa variedade conexa, as funções que têm derivada nula em todos os pontos são exactamente as funções constantes. Em geral, quando a variedade domínio pode não ser conexa, as suas componentes conexas são abertas, logo variedades pelo que as funções que têm derivada nula são aquelas que são constantes sobre cada componente conexa, ou, o que é equivalente, as que são localmente constantes. Se em vez de funções tivermos secções dum fibrado vectorial, com as fibras contidas num espaço euclidiano, não haverá muitas esperanças de ter secções interessantes que sejam constantes, ou localmente constantes, uma vez que as fibras variam de ponto para ponto. É natural tentar portanto apresentar uma noção de secção que seja, tanto quanto possível, localmente constante. São essas as secções paralelas que definimos em seguida.

III.6.10 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Diz-se que uma secção suave $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$ é *paralela* se, quaisquer que sejam $x \in A$ e $u \in T_x(A)$, tem-se $\nabla W_x(u) = 0$. É claro que as secções localmente constantes, por exemplo a secção identicamente nula, são paralelas, por terem derivada identicamente nula e, em consequência, também derivada covariante identicamente nula.

III.6.11 **(Exemplo)** Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual e seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a circunferência de centro 0 e raio 1,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Podemos então considerar uma secção suave W do fibrado vectorial tangente $T(S) = (T_{(x,y)}(S))_{(x,y)\in S}$, definida por

$$W_{(x,y)} = (-y, x).$$

Não se trata, evidentemente, de uma secção constante, mas é, no entanto, uma secção paralela. Com efeito, uma vez que $W_{(x,y)}$ gera o espaço vectorial tangente $T_{(x,y)}(S)$, tudo o que temos que verificar é que se tem $\nabla W_{(x,y)}(W_{(x,y)}) = 0$ e isso é uma consequência de se ter, para a derivada usual, $DW_{(x,y)}(W_{(x,y)}) = (-x, -y)$, que é ortogonal ao espaço vectorial tangente.

Poderíamos ser levados a pensar, por analogia com o que se passa com as secções de derivada nula dos fibrados vectoriais constantes, que, fixado w numa certa fibra E_x dum fibrado vectorial $\underline{E}$, existisse sempre uma secção paralela de $\underline{E}$ que, no ponto x, tomasse o valor w, e que, no caso em que a base M fosse uma variedade conexa, tal secção seria única. A afirmação de unicidade é verdadeira, embora só possa ser estabelecida depois de se estudarem as equações diferenciais ordinárias sobre as variedades. Já quanto à existência, e salvo certos casos particulares que estudaremos mais tarde, ela não pode ser garantida. O tensor de curvatura é como vamos ver, uma obstrução à existência de secções paralelas.

III.6.12 Sejam $M \subset G$ uma variedade, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset E$. Sejam $x_0 \in M$ e $w \in E_{x_0}$, tais que exista uma secção paralela $W = (W_x)_{x\in M}$ de $\underline{E}$, com $W_{x_0} = w$. Tem-se então que $R_{x_0}(u, v, w) = 0$, quaisquer que sejam $u, v \in T_{x_0}(M)$.[83]

Dem: Aplicando III.1.20 ao fibrado vectorial tangente $T(M)$, podemos considerar secções suaves X e Y de $T(M)$, tais que $X_{x_0} = u$ e $Y_{x_0} = v$. O facto de W ser uma secção paralela implica que se tem $\nabla_X\nabla_Y W = 0$, $\nabla_Y\nabla_X W = 0$ e $\nabla_{[X,Y]}W = 0$, pelo que a fórmula estabelecida em III.6.9 implica que $R(X, Y, W) = 0$, em particular, tomando o valor em x_0, $R_{x_0}(u, v, w) = 0$. □

No caso em que o fibrado vectorial com que trabalhamos é o fibrado tangente a uma variedade, o tensor de curvatura verifica ainda as seguintes identidades.

III.6.13 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade. Tem-se então que o tensor de curvatura R_x do fibrado tangente $T(M)$ (dizemos também que R_x é o *tensor de curvatura* de M) verifica

[83] Não espanta portanto que os exemplos que já obtivémos de secções paralelas, as secções constentes de um fibrado vectorial constante e uma secção do fibrado tangente duma circunferência, tenham aparecido em situações em que o tensor de curvatura é nulo.

$$\langle R_x(u,v,w),z\rangle = \langle R_x(w,z,u),v\rangle,$$

quaisquer que sejam $u,v,w,z \in T_x(M)$, assim como a *identidade de Jacobi*

$$R_x(u,v,w) + R_x(v,w,u) + R_x(w,u,v) = 0,$$

quaisquer que sejam $u,v,w \in T_x(M)$.

Dem: A primeira identidade é uma consequência imediata da fórmula de Gauss para $\langle R_x(u,v,w),z\rangle$ (cf. III.6.3), se tivermos em conta a simetria da segunda forma fundamental h_x. A mesma fórmula permite-nos escrever, quaisquer que sejam os vectores $u,v,w,z \in T_x(M)$,

$$\begin{aligned}&\langle R_x(u,v,w) + R_x(v,w,u) + R_x(w,u,v), z\rangle =\\ &= \langle h_x(u,w),h_x(v,z)\rangle - \langle h_x(v,w),h_x(u,z)\rangle + \langle h_x(v,u),h_x(w,z)\rangle -\\ &- \langle h_x(w,u),h_x(v,z)\rangle + \langle h_x(w,v),h_x(u,z)\rangle - \langle h_x(u,v),h_x(w,z)\rangle = 0,\end{aligned}$$

onde tivemos mais uma vez em conta a simetria da aplicação bilinear h_x. A arbitrariedade de $z \in T_x(M)$ implica então a segunda identidade do enunciado. □

No caso em que M é uma curva, cada espaço vectorial tangente $T_x(M)$ tem dimensão 1 pelo que, como vimos atrás, o tensor de curvatura R_x do fibrado tangente é identicamente nulo. O resultado que apresentamos em seguida, e que é de importância central na teoria das superfícies, mostra que, quando M é uma superfície num espaço euclidiano de dimensão 3, o conhecimento do tensor de curvatura é equivalente ao conhecimento da curvatura de Gauss, definida em III.5.19.

III.6.14 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão n e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $n-1$. Seja $x \in M$, para o qual se escolheu uma das normais unitárias $\overrightarrow{n}_x$ e a correspondente aplicação linear de Weingarten $\lambda_x\colon T_x(M) \to T_x(M)$. Tem-se então, para $u,v,w \in T_x(M)$,

$$R_x(u,v,w) = \langle w,\lambda_x(u)\rangle\lambda_x(v) - \langle w,\lambda_x(v)\rangle\lambda_x(u).$$

No caso em que $n = 3$, sendo k_x a curvatura de Gauss de M em x,

$$R_x(u,v,w) = k_x(\langle w,u\rangle v - \langle w,v\rangle u),$$

em particular, a curvatura de Gauss k_x é igual a $\langle R_x(u,v,u),v\rangle$, qualquer que seja a base ortonormada u,v de $T_x(M)$.

Dem: Qualquer quer seja $z \in T_x(M)$, podemos escrever, tendo em conta III.6.3 e III.5.5,

$$\begin{aligned}\langle R_x(u,v,w),z\rangle &= \langle h_x(u,w),h_x(v,z)\rangle - \langle h_x(v,w),h_x(u,z)\rangle =\\ &= \langle \lambda_x(u),w\rangle\langle\lambda_x(v),z\rangle - \langle\lambda_x(v),w\rangle\langle\lambda_x(u),z\rangle =\\ &= \langle\langle\lambda_x(u),w\rangle\lambda_x(v) - \langle\lambda_x(v),w\rangle\lambda_x(u)\,,\,z\rangle,\end{aligned}$$

donde, tendo em conta a arbitrariedade de $z \in T_x(M)$,

$$R_x(u,v,w) = \langle w, \lambda_x(u)\rangle \lambda_x(v) - \langle w, \lambda_x(v)\rangle \lambda_x(u)$$

(cf. I.2.9).
Suponhamos agora que $n = 3$ e consideremos uma base ortonormada w_1, w_2 de $T_x(M)$, constituída por vectores tangentes principais, tendo-se portanto $\lambda_x(w_1) = k_1 w_1$ e $\lambda_x(w_2) = k_2 w_2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais correspondentes. A curvatura de Gauss é assim definida por $k_x = k_1 k_2$. Tem-se então

$$\begin{aligned} R_x(w_1,w_2,w) &= \langle w, \lambda_x(w_1)\rangle \lambda_x(w_2) - \langle w, \lambda_x(w_2)\rangle \lambda_x(w_1) = \\ &= k_1 k_2 (\langle w, w_1\rangle w_2 - \langle w, w_2\rangle w_1), \end{aligned}$$

que não é mais do que a fórmula a demonstrar no caso particular em que $u = w_1$ e $v = w_2$. Sendo agora u, v arbitrários, vem

$$u = a_1 w_1 + a_2 w_2, \quad v = b_1 w_1 + b_2 w_2,$$

portanto, lembrando as propriedades do tensor de curvatura em III.6.2,

$$\begin{aligned} R_x(u,v,w) &= a_1 b_1 R_x(w_1,w_1,w) + a_1 b_2 R_x(w_1,w_2,w) + \\ &\quad + a_2 b_1 R_x(w_2,w_1,w) + a_2 b_2 R_x(w_2,w_2,w) = \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) R_x(w_1,w_2,w) = \\ &= k_x (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\langle w, w_1\rangle w_2 - \langle w, w_2\rangle w_1). \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} \langle w,u\rangle v - \langle w,v\rangle u &= a_1 b_1 \langle w,w_1\rangle w_1 + a_1 b_2 \langle w,w_1\rangle w_2 + \\ &\quad + a_2 b_1 \langle w,w_2\rangle w_1 + a_2 b_2 \langle w,w_2\rangle w_2 - \\ &\quad - b_1 a_1 \langle w,w_1\rangle w_1 - b_1 a_2 \langle w,w_1\rangle w_2 - \\ &\quad - b_2 a_1 \langle w,w_2\rangle w_1 - b_2 a_2 \langle w,w_2\rangle w_2 = \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\langle w,w_1\rangle w_2 - \langle w,w_2\rangle w_1), \end{aligned}$$

o que, comparado com a conclusão anterior, dá

$$R_x(u,v,w) = k_x(\langle w,u\rangle v - \langle w,v\rangle u).$$

Em particular, se u, v é uma base ortonormada de $T_x(M)$, vemos que se tem $R_x(u,v,u) = k_x v$, e portanto $\langle R_x(u,v,u), v\rangle = k_x$. □

§7. Invariância por isometria. Teorema Egrégio.

Quando temos duas variedades $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$, e um difeomorfismo $f: M \to \widehat{M}$, pode-se, em geral, definir de modo natural uma correspondência biunívoca associada entre estruturas geométricas dum certo tipo sobre M e estruturas geométricas do mesmo tipo sobre $\widehat{M}$. Entre as estruturas geométricas mais simples a que se podem aplicar estas observações estão os campos vectoriais. Antes de definirmos o método de associar a um campo vectorial sobre M um campo vectorial sobre $\widehat{M}$, começamos por tratar uma situação mais geral em que não precisamos de nos colocar no quadro dos difeomorfismos.

III.7.1 Sejam $M \subset E$, $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Dados os campos vectoriais $X = (X_x)_{x \in M}$, sobre M, e $\widehat{X} = (\widehat{X}_y)_{y \in \widehat{M}}$, sobre $\widehat{M}$, diz-se que X e $\widehat{X}$ são *f-relacionados* se se tem, para cada $x \in M$, $\widehat{X}_{f(x)} = Df_x(X_x)$.

III.7.2 **(Functorialidade)** Sejam $M \subset E$, $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $\tilde{M} \subset \tilde{E}$ três variedades e $f: M \to \widehat{M}$ e $g: \widehat{M} \to \tilde{M}$ duas aplicações suaves. Sejam $X = (X_x)_{x \in M}$, $\widehat{X} = (\widehat{X}_y)_{y \in \widehat{M}}$ e $\tilde{X} = (\tilde{X}_z)_{z \in \tilde{M}}$ campos vectoriais tais que X e $\widehat{X}$ sejam f-relacionados e $\widehat{X}$ e $\tilde{X}$ sejam g-relacionados. Tem-se então que X e $\tilde{X}$ são $(g \circ f)$-relacionados. Além disso, X e X são Id_M-relacionados.
Dem: Trata-se de uma consequência imediata de $D(Id_M)_x$ ser a identidade de $T_x(M)$ e de se ter $D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x$. □

III.7.3 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f: M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo. Se $X = (X_x)_{x \in M}$ é um campo vectorial sobre M, existe um, e um só, campo vectorial $\widehat{X} = (\widehat{X}_y)_{y \in \widehat{M}}$ sobre $\widehat{M}$, tal que X e $\widehat{X}$ sejam f-relacionados, tendo-se então que $\widehat{X}$ e X são f^{-1}-relacionados. Além disso, se X fosse suave, o mesmo ia acontecer a $\widehat{X}$.
Dem: A unicidade de $\widehat{X}$ resulta de que, a existir um campo vectorial nessas condições, não poderia deixar de se ter

$$\widehat{X}_y = \widehat{X}_{f(f^{-1}(y))} = Df_{f^{-1}(y)}(X_{f^{-1}(y)}),$$

para cada $y \in \widehat{M}$. Quanto à existência, podemos definir, para cada $y \in \widehat{M}$, $\widehat{X}_y \in T_y(\widehat{M})$ pela igualdade acima, tendo-se então que $\widehat{X} = (\widehat{X}_y)_{y \in \widehat{M}}$ é um campo vectorial sobre $\widehat{M}$ e a igualdade

$$\widehat{X}_{f(x)} = Df_x(X_x),$$

obtida por substituição naquela de y por $f(x)$, mostra que X e $\widehat{X}$ são f-relacionados. Supondo que X é suave, podemos considerar um aberto U de E, contendo M, e uma aplicação suave $\overline{f}\colon U \to \widehat{E}$, prolongando f; tem-se então que $D\overline{f}\colon U \to L(E;\widehat{E})$ é uma aplicação suave, pelo que a identidade

$$\widehat{X}_y = D\overline{f}_{f^{-1}(y)}(X_{f^{-1}(y)})$$

e a suavidade de f^{-1} mostram-nos que o campo vectorial $\widehat{X}$ sobre $\widehat{M}$ é também suave. Para terminar, podemos considerar o campo vectorial Y sobre M tal que $\widehat{X}$ e Y sejam f^{-1}-relacionados, tendo-se então que X e Y são campos vectoriais Id_M-relacionados sobre M, o que implica que se tem $X = Y$. □

III.7.4 Nas condições precedentes diz-se que $\widehat{X}$ é o campo vectorial sobre $\widehat{M}$ que *corresponde* ao campo vectorial X sobre M por meio do difeomorfismo $f\colon M \to \widehat{M}$ (ou que $\widehat{X}$ é obtido a partir de X por *transporte* por meio de f).

III.7.5 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Sejam X e Y dois campos vectoriais suaves sobre M e $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ dois campos vectoriais suaves sobre $\widehat{M}$ tais que X e $\widehat{X}$ sejam f-relacionados e que Y e $\widehat{Y}$ sejam f-relacionados. Tem-se então que os parêntesis de Lie $[X,Y]$ e $[\widehat{X},\widehat{Y}]$ são também f-relacionados.

Dem: Sejam U um aberto de E, com $M \subset U$, e $\overline{f}\colon U \to E$ um prolongamento suave de f. Para cada $x \in M$, tem-se

$$\widehat{Y}_{f(x)} = Df_x(Y_x) = D\overline{f}_x(Y_x),$$

pelo que, derivando ambos os membros no ponto x, na direcção de $X_x \in T_x(M)$, obtemos

$$D\widehat{Y}_{f(x)}(Df_x(X_x)) = D^2\overline{f}_x(X_x,Y_x) + D\overline{f}_x(DY_x(X_x)),$$

ou seja,

$$D\widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{X}_{f(x)}) = D^2\overline{f}_x(X_x,Y_x) + D\overline{f}_x(DY_x(X_x)).$$

Trocando os papéis de X e Y, tem-se também

$$D\widehat{X}_{f(x)}(\widehat{Y}_{f(x)}) = D^2\overline{f}_x(Y_x,X_x) + D\overline{f}_x(DX_x(Y_x)),$$

pelo que, subtraindo membro a membro as duas igualdades anteriores e tendo em conta a simetria de $D^2\overline{f}_x$, obtemos

$$\begin{aligned}[\widehat{X},\widehat{Y}]_{f(x)} &= D\widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{X}_{f(x)}) - D\widehat{X}_{f(x)}(\widehat{Y}_{f(x)}) = \\ &= D\overline{f}_x(DY_x(X_x) - DX_x(Y_x)) = \\ &= Df_x([X,Y]_x).\end{aligned}$$

□

III.7.6 **(Corolário)** Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f\colon M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo. Dados os campos vectoriais suaves X e Y, sobre M, com os correspondentes campos vectoriais $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$, sobre $\widehat{M}$, tem-se que o campo vectorial sobre $\widehat{M}$ correspondente ao campo vectorial $[X,Y]$, sobre M, é $[\widehat{X},\widehat{Y}]$.

O corolário precedente pode ser enunciado sugestivamente, dizendo que o parêntesis de Lie de campos vectoriais é uma operação invariante por difeomorfismo. Repare-se que o parêntesis de Lie $[X,Y]$ é definido por $DY(X) - DX(Y)$, mas estas parcelas não podem ser olhadas como invariantes por difeomorfismo, na medida em que os seus valores em cada ponto nem sequer são vectores tangentes.
Vamos ter ocasião de verificar agora que certas construções geométricas que já conhecemos no quadro das variedades contidas num espaço euclidiano, não sendo invariantes por difeomorfismos arbitrários, são-no por certos difeomorfismos particulares, as isometrias.

III.7.7 Sejam E e $\widehat{E}$ espaços euclidianos, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f\colon M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo. Diz-se que f é uma *isometria*, ou um *difeomorfismo isométrico* se, para cada $x \in M$, o isomorfismo $Df_x\colon T_x(M) \to T_{f(x)}(\widehat{M})$ é um isomorfismo ortogonal, isto é, verifica

$$\langle Df_x(u), Df_x(v)\rangle = \langle u, v\rangle,$$

quaisquer que sejam $u, v \in T_x(M)$.

Intuitivamente, as isometrias podem ser olhadas como transformações que não comportam deformações intrínsecas, transformações que podem curvar a variedade dentro dos espaços ambientes, mas não esticam nem comprimem. Esta imagem intuitiva fica mais clara se considerarmos o conceito de *comprimento* de um caminho $\alpha\colon [a,b] \to M$, que é, por definição,

$$\text{comp}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

Pode verificar-se que o difeomorfismo $f\colon M \to \widehat{M}$ é uma isometria se, e só se, para cada caminho $\alpha\colon [a,b] \to M$, se tem, para o correspondente caminho $f \circ \alpha\colon [a,b] \to \widehat{M}$,

$$\text{comp}(f \circ \alpha) = \text{comp}(\alpha)$$

(a condição necessária é imediata e a condição suficiente não é difícil, no caso das variedades sem bordo, se tivermos em conta I.2.30 e o facto de a derivada do integral indefinido ser a função integranda; o caso geral pode obter-se a partir daquele por um argumento de passagem ao limite no bordo).

III.7.8 **(Versão do teorema fundamental da geometria de Riemann)** Sejam E e $\widehat{E}$ espaços euclidianos, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f\colon M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo isométrico. Sejam X e Y campos vectoriais suaves sobre M e $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ os campos vectoriais correspondentes sobre $\widehat{M}$. Tem-se então que o campo vectorial sobre $\widehat{M}$ correspondente ao campo vectorial derivada covariante $\nabla_X Y$, sobre M, é o campo vectorial $\nabla_{\widehat{X}}\widehat{Y}$.[84]

Dem: Consideremos outro campo vectorial suave arbitrário Z sobre M, e seja $\widehat{Z}$ o campo vectorial correspondente sobre $\widehat{M}$. Para cada $x \in M$, de Df_x ser uma isometria linear deduzimos que

$$\langle \widehat{X}_{f(x)}, \widehat{Y}_{f(x)}\rangle = \langle Df_x(X_x), Df_x(Y_x)\rangle = \langle X_x, Y_x\rangle,$$

pelo que, derivando ambos os membros em x, na direcção de Z_x, obtemos, tendo em conta a alínea c) de III.3.4 e o facto de se ter $Df_x(Z_x) = \widehat{Z}_{f(x)}$,

$$\begin{aligned}&\langle \nabla\widehat{X}_{f(x)}(\widehat{Z}_{f(x)}), \widehat{Y}_{f(x)}\rangle + \langle \widehat{X}_{f(x)}, \nabla\widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{Z}_{f(x)})\rangle =\\ &= \langle \nabla X_x(Z_x), Y_x\rangle + \langle X_x, \nabla Y_x(Z_x)\rangle.\end{aligned}$$

Tendo em conta III.3.24, podemos escrever

$$\nabla Y_x(Z_x) = \nabla Z_x(Y_x) - [Y, Z]_x$$

e, do mesmo modo,

$$\nabla\widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{Z}_{f(x)}) = \nabla\widehat{Z}_{f(x)}(\widehat{Y}_{f(x)}) - [\widehat{Y}, \widehat{Z}]_{f(x)}$$

pelo que, substituindo estas duas igualdades na igualdade precedente e tendo em conta que, por III.7.6, $[\widehat{Y}, \widehat{Z}]_{f(x)} = Df_x([Y, Z]_x)$, donde também $\langle \widehat{X}_{f(x)}, [\widehat{Y}, \widehat{Z}]_{f(x)}\rangle = \langle X_x, [Y, Z]_x\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}&\langle \nabla\widehat{X}_{f(x)}(\widehat{Z}_{f(x)}), \widehat{Y}_{f(x)}\rangle + \langle \widehat{X}_{f(x)}, \nabla\widehat{Z}_{f(x)}(\widehat{Y}_{f(x)})\rangle =\\ &= \langle \nabla X_x(Z_x), Y_x\rangle + \langle X_x, \nabla Z_x(Y_x)\rangle.\end{aligned}$$

Por permutação circular dos papéis de X, Y e Z, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}&\langle \nabla\widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{X}_{f(x)}), \widehat{Z}_{f(x)}\rangle + \langle \widehat{Y}_{f(x)}, \nabla\widehat{X}_{f(x)}(\widehat{Z}_{f(x)})\rangle =\\ &= \langle \nabla Y_x(X_x), Z_x\rangle + \langle Y_x, \nabla X_x(Z_x)\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle \nabla\widehat{Z}_{f(x)}(\widehat{Y}_{f(x)}), \widehat{X}_{f(x)}\rangle + \langle \widehat{Z}_{f(x)}, \nabla\widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{X}_{f(x)})\rangle =\\ &= \langle \nabla Z_x(Y_x), X_x\rangle + \langle Z_x, \nabla Y_x(X_x)\rangle.\end{aligned}$$

Multipliquemos ambos os membros da antepenúltima desigualdade por -1 e

---

[84]Repare-se que este resultado não é *a priori* evidente, visto que a derivada covariante é definida através da derivada usual e das projecções ortogonais do espaço ambiente sobre os espaços tangentes, noções relativamente às quais não faz sentido falar de invariância por difeomorfismo ou por isometria.

somemos membro a membro a igualdade assim obtida com cada uma das duas últimas igualdades. Obtemos então

$$2\langle \nabla \widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{X}_{f(x)}), \widehat{Z}_{f(x)} \rangle = 2\langle \nabla Y_x(X_x), Z_x \rangle.$$

Tendo em conta, mais uma vez, o facto de Df_x ser uma isometria linear, a igualdade anterior implica que

$$\langle \nabla \widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{X}_{f(x)}), \widehat{Z}_{f(x)} \rangle = \langle Df_x(\nabla Y_x(X_x)), \widehat{Z}_{f(x)} \rangle.$$

Ora, dado $\widehat{w} \in T_{f(x)}(\widehat{M})$ arbitrário, vem $\widehat{w} = Df_x(w)$, para um certo $w \in T_x(M)$ e podemos considerar um campo vectorial Z sobre M, com $Z_x = w$, vindo portanto também, para o correspondente campo vectorial $\widehat{Z}$ sobre $\widehat{M}$, $\widehat{Z}_{f(x)} = \widehat{w}$. Concluímos assim que, para $\widehat{w} \in T_{f(x)}(\widehat{M})$ arbitrário,

$$\langle \nabla \widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{X}_{f(x)}), \widehat{w} \rangle = \langle Df_x(\nabla Y_x(X_x)), \widehat{w} \rangle,$$

o que implica finalmente que

$$\nabla \widehat{Y}_{f(x)}(\widehat{X}_{f(x)}) = Df_x(\nabla Y_x(X_x)). \qquad \square$$

A invariância por isometria da derivação covariante de campos vectoriais vai arrastar a invariância por isometria do tensor de curvatura duma variedade.

III.7.9 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f: M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo isométrico. Sejam

$$R_x: T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)$$

e

$$\widehat{R}_{f(x)}: T_{f(x)}(\widehat{M}) \times T_{f(x)}(\widehat{M}) \times T_{f(x)}(\widehat{M}) \to T_{f(x)}(\widehat{M})$$

os tensores de curvatura de M, no ponto x, e de $\widehat{M}$, no ponto $f(x)$. Tem-se então, quaisquer que sejam $u, v, w \in T_x(M)$,

$$Df_x(R_x(u, v, w)) = \widehat{R}_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v), Df_x(w)).$$

Dem: Consideremos campos vectoriais suaves X, Y, Z, sobre M, tais que $X_x = u$, $Y_x = v$ e $Z_x = w$, tendo-se então que os correspondentes campos vectoriais $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$, sobre $\widehat{M}$, vão verificar as igualdades $\widehat{X}_{f(x)} = Df_x(u)$, $\widehat{Y}_{f(x)} = Df_x(v)$ e $\widehat{Z}_{f(x)} = Df_x(w)$. Tendo em conta o resultado precedente, sabemos que ao campo vectorial $\nabla_Y Z$, sobre M, corresponde o campo vectorial $\nabla_{\widehat{Y}} \widehat{Z}$, sobre $\widehat{M}$, e portanto que ao campo vectorial $\nabla_X \nabla_Y Z$, sobre M, corresponde o campo vectorial $\nabla_{\widehat{X}} \nabla_{\widehat{Y}} \widehat{Z}$, sobre $\widehat{M}$. Do mesmo modo, aos campos vectoriais $\nabla_Y\nabla_X Z$ e $\nabla_{[X,Y]}Z$, sobre M, correspondem os campos vectoriais $\nabla_{\widehat{Y}}\nabla_{\widehat{X}}\widehat{Z}$ e $\nabla_{[\widehat{X},\widehat{Y}]}\widehat{Z}$, sobre $\widehat{M}$, neste último caso tendo em conta o facto de o campo vectorial $[\widehat{X},\widehat{Y}]$, sobre $\widehat{M}$, ser o correspondente ao campo vectorial $[X,Y]$, sobre M. Podemos agora utilizar a fórmula obtida em III.6.9 para escrever

$$\begin{aligned}
&Df_x(R_x(u,v,w)) = \\
&\quad = -Df_x((\nabla_X\nabla_Y Z)_x) + Df_x((\nabla_Y\nabla_X Z)_x) + Df_x((\nabla_{[X,Y]}Z)_x) = \\
&\quad = -(\nabla_{\widehat{X}}\nabla_{\widehat{Y}}\widehat{Z})_{f(x)} + (\nabla_{\widehat{Y}}\nabla_{\widehat{X}}\widehat{Z})_{f(x)} + (\nabla_{[\widehat{X},\widehat{Y}]}\widehat{Z})_{f(x)} = \\
&\quad = \widehat{R}_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v), Df_x(w)).
\end{aligned}$$
□

III.7.10 **(Teorema Egrégio de Gauss)** Sejam E e $\widehat{E}$ espaços euclidianos de dimensão 3, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades de dimensão 2 e $f\colon M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo isométrico. Para cada $x \in M$, tem-se então que a curvatura de Gauss de M no ponto x é igual à curvatura de Gauss de $\widehat{M}$ no ponto $f(x)$.

Dem: A demonstração é muito simples, se usarmos a caracterização da curvatura de Gauss apresentada em III.6.14: Escolhendo uma base ortonormada u, v de $T_x(M)$, deduzimos de Df_x ser uma isometria linear que $Df_x(u), Df_x(v)$ é uma base ortonormada de $T_{f(x)}(\widehat{M})$ pelo que, notando k_x e $\widehat{k}_{f(x)}$ as curvaturas de Gauss,

$$\begin{aligned}
\widehat{k}_{f(x)} &= \langle \widehat{R}_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v), Df_x(u)), Df_x(v)\rangle = \\
&= \langle Df_x(R_x(u,v,u)), Df_x(v)\rangle = \langle R_x(u,v,u), v\rangle = k_x.
\end{aligned}$$
□

O próprio Gauss deu ao resultado precedente o nome de Teorema Egrégio, adjectivo que significa o mesmo que notável. A razão disso está em que a curvatura de Gauss foi definida como o produto das duas curvaturas principais e estas não são de modo nenhum invariantes por isometria. Aliás pode-se ver que as próprias direcções principais não são em geral invariantes por isometria. Note-se também que a noção de curvatura duma curva também não é invariante por isometria; por exemplo, é imediato constatar-se que a aplicação de $]0,2\pi[$ em $\mathbb{R}^2$, que a t associa $(\cos(t), \sin(t))$ é uma isometria de $]0,2\pi[$ sobre a circunferência S com o ponto $(1,0)$ retirado e que, enquanto o intervalo $]0,2\pi[$ tem curvatura nula em todos os pontos, S vai ter curvatura igual a 1 em cada ponto. Note-se também que a demonstração que apresentámos para o teorema de Gauss não tem nada a ver com a apresentada por aquele matemático, visto que utiliza o tensor de curvatura que só apareceu mais tarde com Riemann.

§8. Morfismos entre fibrados vectoriais.

III.8.1 Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita e $A \subset G$ um conjunto arbitrário. Sejam E e E' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$. Vamos chamar *morfismo linear* de $\underline{E}$ para $\underline{E'}$ a uma família $(\lambda_x)_{x\in A}$ de aplicações lineares $\lambda_x\colon E_x \to E'_x$ e dizer que um morfismo linear

$$\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E'}$$

é *suave* se existir uma aplicação suave $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}\colon A \to L(E;E')$ tal que, para cada $x \in A$, a aplicação linear $\lambda_x\colon E_x \to E'_x$ seja uma restrição de $\overline{\lambda}_x\colon E \to E'$ (também se diz então que $\overline{\lambda}$ é um *prolongamento suave* de λ).

III.8.2 Sejam G e G' espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset G$ e $M' \subset G'$ duas variedades e $f\colon M \to M'$ uma aplicação suave. Tem então lugar um morfismo linear suave $Df = (Df_x)_{x\in M}$ do fibrado vectorial tangente $T(M)$ para o fibrado vectorial imagem recíproca $f^*T(M')$.
Dem: Repare-se que a razão por que se considera o fibrado vectorial imagem recíproca $f^*T(M')$ é o facto de cada Df_x ser uma aplicação linear de $T_x(M)$ para $T_{f(x)}(M')$. Tendo em conta II.3.10, podemos considerar um aberto U de G, com $M \subset U$, e uma aplicação suave $\overline{f}\colon U \to G'$, prolongando f, e obtemos então um prolongamento suave de Df, associando, a cada $x \in M$, a aplicação linear $D\overline{f}_x\colon G \to G'$. □

Repare-se na razão por que não se definiu mais simplesmente morfismo linear suave como um morfismo linear para o qual seja suave a aplicação $x \mapsto \lambda_x$: O que se passa é que, para cada $x \in A$, λ_x pertence a um espaço vectorial $L_x(E_x;E'_x)$ que, em geral, depende de x, e não se dispõe de um espaço vectorial do qual todos os $L_x(E_x;E'_x)$ sejam subespaços vectoriais. Os resultados que se seguem mostram como se comporta a suavidade, relativamente a certas operações naturais.

III.8.3 Nas condições anteriores, tem lugar um morfismo linear suave $Id_{\underline{E}} = (Id_{E_x})_{x\in A}$ e, dado um terceiro fibrado vectorial $\underline{E''} = (E''_x)_{x\in A}$, com $E''_x \subset E''$ e morfismos lineares

$$\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E'}, \quad \mu = (\mu_x)_{x\in A}\colon \underline{E'} \to \underline{E''},$$

tem lugar um morfismo linear composto

$$\mu \circ \lambda = (\mu_x \circ \lambda_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E''},$$

o qual é suave se λ e μ o forem.

Dem: A primeira afirmação resulta de que $Id_{\underline{E}}$ admite um prolongamento suave associando a cada $x \in A$ a aplicação linear $Id_E: E \to E$. A segunda resulta de que, dados prolongamentos suaves de λ e de μ, constituídos por aplicações lineares $\overline{\lambda}_x: E \to E'$ e $\overline{\mu}_x: E' \to E''$, então a família das aplicações lineares $\overline{\mu}_x \circ \overline{\lambda}_x: E \to E''$ constitui um prolongamento suave do morfismo linear $\mu \circ \lambda$. □

III.8.4 **(Corolário)** Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita e $A \subset G$ um conjunto arbitrário. Sejam E e E' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$. Seja $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear. Tem-se então:

a) Se $\widehat{E} \subset E$ é um subespaço vectorial contendo todos os E_x, então o morfismo linear λ é suave quando se considera E como espaço ambiente das fibras se, e só se, o é quando se considera $\widehat{E}$ como tal.

b) Se $\widehat{E}' \subset E'$ é um subespaço vectorial contendo todos os E'_x, então o morfismo linear λ é suave quando se considera E' como espaço ambiente das fibras se, e só se, o é quando se considera $\widehat{E}'$ como tal.

Dem: Uma vez que λ pode ser trivialmente olhado como o composto de λ com $Id_{\underline{E}}$, para provarmos a) basta mostrarmos que $Id_{\underline{E}}: \underline{E} \to \underline{E}$ é um morfismo linear suave, tanto quanto se considera E no domínio e $\widehat{E}$ na chegada como ambientes como quando se considera $\widehat{E}$ no domínio e E na chegada como espaços ambientes; ora, no segundo caso, isso acontece por podermos considerar, para cada $x \in A$, a inclusão $\iota: \widehat{E} \to E$ como prolongamento de Id_{E_x} e, no primeiro caso, isso acontece por podermos considerar, para cada $x \in A$, a projecção ortogonal $\pi: E \to \widehat{E}$, associada a um produto interno que se fixe em E, como prolongamento de Id_{E_x}. A prova de b) é análoga, a partir do facto de $Id_{\underline{E'}}: \underline{E'} \to \underline{E'}$ ser suave quando no domínio se considera como espaço ambiente um dos espaços E' e $\widehat{E}'$ e na chegada o outro. □

III.8.5 Sejam G e $\widehat{G}$ espaços vectoriais reais de dimensão finita, $A \subset G$ e $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ subconjuntos e $f: \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Sejam E e E' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$. Se $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ é um morfismo linear suave, então tem lugar um *morfismo linear* suave *imagem recíproca*

$$f^*\lambda = \left(\lambda_{f(y)}\right)_{y\in\widehat{A}}: f^*\underline{E} \to f^*\underline{E'}.$$

Um caso particular importante é aquele em que $\widehat{A} \subset A \subset G$ e em que $f: \widehat{A} \to A$ é a inclusão: Dizemos então que a imagem recíproca $f^*\lambda$ é a *restrição* de λ a $\widehat{A}$ e notamo-la também $\lambda_{/\widehat{A}}$.

Dem: Dado um prolongamento suave de λ, constituído pelas aplicações lineares $\overline{\lambda}_x: E \to E'$, obtemos um prolongamento suave de $f^*\lambda$, associando a cada $y \in \widehat{A}$, a aplicação linear $\overline{\lambda}_{f(y)}: E \to E'$. □

III.8.6 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$. Tem-se então:
a) Tem lugar um morfismo linear suave $0: \underline{E} \to \underline{E'}$ que associa a cada $x \in A$ a aplicação linear $0: E_x \to E'_x$.
b) Se $\lambda, \mu: \underline{E} \to \underline{E'}$ são dois morfismos lineares suaves, então

$$\lambda + \mu = (\lambda_x + \mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$$

é também um morfismo linear suave.
c) Se $\lambda: \underline{E} \to \underline{E'}$ é um morfismo linear suave e $f: A \to \mathbb{K}$ é uma aplicação suave, então

$$f\lambda = (f(x)\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$$

é também um morfismo linear suave.
d) Se $\lambda: \underline{E} \to \underline{E'}$ é um morfismo linear suave e $W = (W_x)_{x\in A}$ é uma secção suave de $\underline{E}$, então

$$\lambda(W) = (\lambda(W_x))_{x\in A}$$

é uma secção suave de $\underline{E'}$.
Dem: Para provar a) basta tomar um prolongamento suave identicamente nulo. Para provar b) e c) basta partir de prolongamentos suaves $\overline{\lambda}$ e $\overline{\mu}$ de λ e de μ e reparar que $\lambda + \mu$ e $f\lambda$ vão ter prolongamentos suaves associando, a cada $x \in A$, $\overline{\lambda}_x + \overline{\mu}_x$ e $f(x)\overline{\lambda}_x$, respectivamente. Para provar d) basta reparar que, se $\overline{\lambda}$ é um prolongamento suave de λ, tem-se ainda $\lambda_x(W_x) = \overline{\lambda}_x(W_x)$, e portanto $x \mapsto \lambda_x(W_x)$ é uma aplicação suave $A \to E'$. □

Repare-se que, na definição de morfismo linear suave, exigiu-se a existência de prolongamentos suaves mas que estes não serão em geral únicos. Por vezes, como na demonstração que faremos adiante que a noção de morfismo suave é local, é cómodo poder dispor de um prolongamento suave canónico, como o que construímos a seguir, a partir de um produto interno fixado no espaço ambiente das fibras.

III.8.7 Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita e $A \subset G$ um conjunto arbitrário. Sejam E e E' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita, o primeiro dos quais munido de produto interno, $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$ e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear. Notemos, para cada $x \in A$, $\lambda_x^\perp = \lambda_x \circ \pi_x: E \to E'_x$, onde π_x é a projecção ortogonal de E sobre E_x, que é um prolongamento da aplicação linear λ_x. Tem-se então que o morfismo linear λ é suave se, e só se $\lambda^\perp = (\lambda_x^\perp)_{x\in A}$ é uma aplicação suave $A \to L(E; E')$ (dizemos então que $\lambda^\perp$ é o *prolongamento suave* de λ *associado* ao produto interno de E).

Dem: Se $\lambda^\perp = (\lambda_x^\perp)_{x\in A}$ é uma aplicação suave $A \to L(E; E')$, ela é, em particular, um prolongamento suave de λ pelo que λ é um morfismo linear suave. Suponhamos, reciprocamente, que λ é um morfismo linear suave e consideremos uma aplicação suave $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}: A \to L(E; E')$ tal que, para cada $x \in A$, a aplicação linear $\lambda_x: E_x \to E'_x$ seja uma restrição de $\overline{\lambda}_x: E \to E'$. Tem-se então também $\lambda_x^\perp = \overline{\lambda}_x \circ \pi_x$ pelo que, uma vez que, por $\underline{E}$ ser fibrado vectorial, é suave a aplicação $A \to L(E; E)$, $x \mapsto \pi_x$, concluímos a suavidade da aplicação $x \mapsto \lambda_x^\perp$. □

III.8.8 **(A suavidade de morfismos é uma questão local)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$ e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear. Se $(A_j)_{j\in J}$ é uma família de abertos de A, de união A, tal que cada restrição $\lambda_{/A_j}: \underline{E}_{/A_j} \to \underline{E'}_{/A_j}$ seja suave (ou, o que é equivalente, se, para cada $x_0 \in A$, existe um aberto V de A, com $x_0 \in V$, tal que $\lambda_{/V}$ seja suave), então λ é um morfismo linear suave.

Dem: Podemos fixar um produto interno em E e considerar os correspondentes prolongamentos $\lambda_x^\perp = \lambda_x \circ \pi_x: E \to E'_x$ dos E_x. Tem-se então que a aplicação $A \to L(E; E')$, $x \mapsto \lambda_x^\perp$, é suave, uma vez que tem restrições suaves a cada A_j (cf. II.2.11). □

III.8.9 Uma outra questão que se revela não ser tão evidente como poderia parecer mas que tem uma resposta positiva com a ajuda dos prolongamentos associados a um produto interno é a seguinte:

Sejam $A \subset G$, E e E' espaços vectoriais complexos de dimensão finita, $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$ e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear. É claro que também podemos olhar para $\underline{E}$ e $\underline{E'}$ como fibrados vectoriais reais, isto é, quando olhamos para E e E' como espaços vectoriais reais e λ continua a ser um morfismo linear no quadro real. É também evidente que, se λ for um morfismo linear suave no quadro complexo, então é também um morfismo linear suave no quadro real mas a recíproca já seria menos evidente, visto que, apesar de os $\lambda_x: E_x \to E'_x$ serem, por hipótese, aplicações lineares complexas, nada nos garantia que os prolongamentos $\overline{\lambda}_x$ não fossem apenas aplicações lineares reais. No entanto, a recíproca é efectivamente também válida, uma vez que, apesar de um prolongamento arbitrário poder não ser linear complexo, o prolongamento $\lambda_x^\perp$ associado a um produto interno complexo que se considere em E já é uma aplicação linear complexa, por isso acontecer à projecção ortogonal π_x.

III.8.10 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$ e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear. Podemos então considerar uma aplicação associada entre os espaços totais

$$\tilde{\lambda}: \underline{E} \to \underline{E'}, \quad \tilde{\lambda}(x, w) = (x, \lambda_x(w)),$$

e o morfismo linear λ é suave se, e só se, $\tilde{\lambda}$ é uma aplicação suave.

Dem: Se λ é um morfismo linear suave, podemos considerar uma aplicação suave $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x \in A}$ de A em $L(E; E')$ tal que cada λ_x seja uma restrição de $\overline{\lambda}_x$ e então o facto de se ter $\tilde{\lambda}(x, w) = (x, \overline{\lambda}_x(w))$ implica que $\tilde{\lambda}$ é uma aplicação suave. Suponhamos, reciprocamente, que $\tilde{\lambda}: \underline{E} \to \underline{E'}$ é uma aplicação suave. Fixemos um produto interno em E. O facto de $\underline{E}$ ser um fibrado vectorial garante a suavidade da aplicação $A \to L(E; E)$, que a x associa a projecção ortogonal π_x de E sobre E_x, pelo que ficamos com uma aplicação suave $A \times E \to \underline{E}$, $(x, w) \mapsto (x, \pi_x(w))$ e portanto, por composição, com uma aplicação suave

$$A \times E \to \underline{E'}, \quad (x, w) \mapsto (x, \lambda_x(\pi_x(w)) = (x, \lambda_x^{\perp}(w)),$$

onde $\lambda_x^{\perp}$ é o prolongamento de λ_x associado ao produto interno de E. Em particular, vemos que, para cada $w \in E$, é suave a aplicação $A \to E'$, $x \mapsto \lambda_x^{\perp}(w)$ o que, tendo em conta II.2.12, implica que é suave a aplicação $A \to L(E; E')$, $x \mapsto \lambda_x^{\perp}$, e portanto que λ é um morfismo linear suave. □

III.8.11 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$ e $\lambda = (\lambda_x)_{x \in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear. Suponhamos que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial, com um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_n$. Tem-se então que o morfismo linear λ é suave se, e só se, para cada $1 \le j \le n$, $\lambda(W_j) = (\lambda_x(W_{j_x}))_{x \in A}$ é uma secção suave de $\underline{E'}$.

Dem: Uma vez que cada W_j é uma secção suave de $\underline{E}$, já sabemos que, se λ é um morfismo linear suave, então cada $\lambda(W_j)$ é uma secção suave de $\underline{E'}$. Suponhamos, reciprocamente, que cada $\lambda(W_j)$ é uma secção suave de $\underline{E'}$. Notando ainda $\underline{E}$ o espaço total de $(E_x)_{x \in A}$, podemos considerar o fibrado vectorial trivial de base $\underline{E}$, que a cada $(x, w) \in \underline{E}$ associa a fibra E_x, o qual vai admitir o campo de referenciais $(W_{1x})_{(x,w) \in \underline{E}}, \ldots, (W_{nx})_{(x,w) \in \underline{E}}$ e a secção suave $(Z_{(x,w)})_{(x,w) \in \underline{E}}$ definida por $Z_{(x,w)} = w$. Aplicando III.1.13, concluímos a existência de aplicações suaves $f_1, \ldots, f_n: \underline{E} \to \mathbb{K}$ definidas por

$$w = f_1(x, w) W_{1x} + \cdots + f_n(x, w) W_{nx}$$

e vemos agora que, para cada $(x, w) \in \underline{E}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(x, w) &= (x, \lambda_x(w)) = \\ &= \big(x\,,\, f_1(x, w)\lambda_x(W_{1x}) + \cdots + f_n(x, w)\lambda_x(W_{nx})\big), \end{aligned}$$

o que mostra que $\tilde{\lambda}: \underline{E} \to \underline{E'}$ é uma aplicação suave, e portanto, pelo resultado precedente, λ é um morfismo linear suave. □

III.8.12 **(Corolário)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$ e $\lambda = (\lambda_x)_{x \in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear suave tal que, para cada $x \in A$, $\lambda_x: E_x \to E'_x$ seja um

isomorfismo. Tem-se então que $\lambda^{-1} = (\lambda_x^{-1})_{x\in A}: \underline{E'} \to \underline{E}$ é também um morfismo linear suave (dizemos então que λ é um *isomorfismo linear suave*).
Dem: Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Seja U um aberto de A, com $x_0 \in U$, tal que $\underline{E}_{/U}$ admita um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_n$. Tem-se então que $\lambda_{/U}(W_1), \ldots, \lambda_{/U}(W_n)$ são secções suaves de $\underline{E'}_{/U}$ e portanto, uma vez que cada λ_x é um isomorfismo, constituem um campo de referenciais deste fibrado vectorial. Uma vez que as imagens dos $\lambda_{/U}(W_j)$ pelo morfismo linear $\lambda_{/U}^{-1}$ são as secções suaves W_j, podemos aplicar o resultado precedente para garantir que $\lambda_{/U}^{-1}: \underline{E'}_{/U} \to \underline{E}_{/U}$ é um morfismo linear suave. Tendo em conta o facto de a suavidade ser uma questão local, deduzimos finalmente que λ^{-1} é um morfismo linear suave. □

III.8.13 **(A imagem e o kernel de um morfismo linear)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$ e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear suave. Tem-se então:
a) Se, para cada $x \in A$, $\lambda_x: E_x \to E'_x$ é uma aplicação linear injectiva, então $(\lambda_x(E_x))_{x\in A}$ é um fibrado vectorial.
b) Se, para cada $x \in A$, $\lambda_x: E_x \to E'_x$ é uma aplicação linear sobrejectiva, então, sendo $E''_x = \ker(\lambda_x) = \{u \in E_x \mid \lambda_x(u) = 0\}$, $(E''_x)_{x\in A}$ é um fibrado vectorial.
Dem: a) Dado $x_0 \in A$, podemos considerar um aberto U de A, com $x_0 \in U$, e um campo de referenciais $(W_{1x})_{x\in U}, \ldots, (W_{nx})_{x\in U}$ de $\underline{E}_{/U}$ e então a família $(\lambda_x(E_x))_{x\in U}$ admite o campo de referenciais $(\lambda_x(W_{1x}))_{x\in U}, \ldots, (\lambda_x(W_{nx}))_{x\in U}$.
b) Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Seja $v_1, \ldots, v_m$ uma base de E'_{x_0} e, escolhamos vectores $u_1, \ldots, u_m$ de E_{x_0} tais que $\lambda_{x_0}(u_j) = v_j$. Os vectores $u_1, \ldots, u_m$ são linearmente independentes, sem o que $v_1, \ldots, v_n$ eram linearmente dependentes, e portanto podemos prolongá-los numa base $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$ de E_{x_0}. Tendo em conta III.1.20, podemos considerar, para cada $1 \le j \le n$, uma secção suave $W_j = (W_{jx})_{x\in A}$ de $\underline{E}$ tal que $W_{jx_0} = u_j$. Tendo em conta III.1.14, podemos considerar um aberto U' de A, com $x_0 \in U'$ tal que, para cada $x \in U'$, E_{x_0} tenha dimensão n e E'_{x_0} tenha dimensão m e portanto E''_x tenha dimensão $n-m$. Uma vez que os $(\lambda_x(W_{jx}))_{x\in A}$ também são secções suaves de $\underline{E'}$, podemos aplicar a alínea a) de III.1.16 para garantir a existência de um aberto U de A, com $x_0 \in U \subset U'$, tal que, para cada $x \in U$, $\lambda_x(W_{1x}), \ldots, \lambda_x(W_{mx})$ sejam linearmente independentes, e portanto uma base de E'_x, e $W_{1x}, \ldots, W_{nx}$ sejam linearmente independentes, e portanto uma base de E_x. Tendo em conta III.1.13, podemos considerar aplicações suaves $f_{i,j}: U \to \mathbb{K}$, onde $1 \le i \le m$ e $m < j \le n$, definidas pela condição de se ter

$$\lambda_x(W_{jx}) = \sum_{i=1}^{m} f_{i,j}(x)\, \lambda_x(W_{ix}).$$

Para cada $m < j \leq n$, consideremos a secção suave $(Z_{j_x})_{x \in U}$ de $\underline{E}_{/U}$ definida por

$$Z_{j_x} = W_{j_x} - \sum_{i=1}^{m} f_{i,j}(x)\, W_{ix}$$

e reparemos que $\lambda_x(Z_{j_x}) = \lambda_x(W_{j_x}) - \sum_{i=1}^{m} f_{i,j}(x)\, \lambda_x(W_{ix}) = 0$, pelo que estas secções suaves são mesmo secções de $(E''_x)_{x \in U}$. Além disso, para cada $x \in U$, os Z_{j_x}, com $m < j \leq n$, são linearmente independentes, e portanto uma base de E''_x, visto que, se fosse $\sum_{j=m+1}^{n} a_j\, Z_{j_x} = 0$, vinha

$$\sum_{j=m+1}^{n} a_j\, W_{j_x} + \sum_{i=1}^{m} \big(\sum_{j=m+1}^{n} a_j\, f_{i,j}(x) \big)\, W_{ix} = 0$$

e portanto, pela independência linear de $W_{1x}, \ldots, W_{nx}$, tinha-se, em particular, $a_j = 0$, para cada $m < j \leq n$. Concluímos assim que $(Z_{j_x})_{x \in U}$ constituem um campo de referenciais de $(E''_x)_{x \in U}$, o que mostra que $(E''_x)_{x \in A}$ é efectivamente um fibrado vectorial. □

O resultado seguinte mostra como se comportam as orientações de dois fibrados vectoriais na presença de um isomorfismo linear suave entre eles.

III.8.14 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$ e $\lambda = (\lambda_x)_{x \in A} \colon \underline{E} \to \underline{E'}$ um isomorfismo linear suave.

a) Seja $\alpha = (\alpha_x)_{x \in A}$ uma orientação suave de $\underline{E}$ e seja, para cada $x \in A$, α'_x a orientação de E'_x para a qual o isomorfismo $\lambda_x \colon E_x \to E'_x$ conserva as orientações (a orientação transportada). Tem-se então que a orientação $\alpha' = (\alpha'_x)_{x \in A}$ de $\underline{E'}$ é também suave.

b) Sejam $\alpha = (\alpha_x)_{x \in A}$ e $(\alpha'_x)_{x \in A}$ duas orientações suaves, de $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ respectivamente. Para cada $x_0 \in A$ tal que $\lambda_{x_0} \colon E_{x_0} \to E'_{x_0}$ conserve (respectivamente inverta) as orientações, existe uma aberto U de A, com $x_0 \in U$ tal que, para cada $x \in U$, $\lambda_x \colon E_x \to E'_x$ conserva (respectivamente inverte) as orientações.

c) No caso em que A é conexo, dadas orientações suaves $\alpha = (\alpha_x)_{x \in A}$ e $(\alpha'_x)_{x \in A}$ de $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ respectivamente, ou λ_x conserva as orientações para todo o x ou λ_x inverte as orientações para todo o x (diz-se então que λ *conserva as orientações* e que λ *inverte as orientações*, respectivamente).

Dem: a) Dado $x_0 \in A$, podemos considerar um aberto U de A, com $x_0 \in U$ e um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_n$ de $\underline{E}_{/U}$ tal que para cada $x \in U$ a base $W_{1x}, \ldots, W_{nx}$ de E_x seja directa ou para cada $x \in U$ esta base seja retrógrada. Uma vez que $\lambda_{/U}: \underline{E}_{/U} \to \underline{E'}_{/U}$ é ainda um isomorfismo suave, segue-se que $\lambda_{/U}(W_1), \ldots, \lambda_{/U}(W_n)$ vai ser um campo de referenciais de $\underline{E'}_{/U}$ o qual, por construção da orientação α', vai dar uma base directa em cada ponto de U ou uma base retrógrada em cada ponto de U, o que mostra que a orientação α' é suave.

b) Pelo que vimos em a), podemos considerar um orientação suave β de $\underline{E'}$ definida pela condição de λ conservar as orientações, de α para β. Tendo em conta III.2.6, dado $x_0 \in A$, podemos considerar um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que $\alpha_{/U} = \beta_{/U}$ ou $\alpha_{/U} = -\beta_{/U}$ e assim, relativamente às orientações α_x e α'_x, ou λ_x conserva as orientações para cada $x \in U$ ou λ_x inverte as orientações para cada $x \in U$.

c) O que vimos em b) mostra que A é a união disjunta de dois abertos, a saber o conjunto dos pontos x tais que λ_x conserva as orientações e o conjunto daqueles tais que λ_x inverte as orientações, pelo que um destes abertos tem que ser vazio e o outro igual a A. □

III.8.15 Um caso particular, em que se aplicam as observações anteriores, é aquele em que temos duas variedades $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e um difeomorfismo $f: M \to \widehat{M}$. Tem-se então um isomorfismo linear suave

$$Df = (Df_x)_{x \in M}: T(M) \to f^*T(\widehat{M})$$

e, dadas orientações em M e $\widehat{M}$, diz-se que f *conserva* (respectivamente, *inverte*) *as orientações em* x se isso acontecer com aquele isomorfismo linear suave e que f *conserva* (respectivamente, *inverte*) *as orientações* se f conservar (respectivamente inverter) as orientações em todos os pontos.
Repare-se que, neste caso, temos também um isomorfismo linear suave

$$(f^{-1})^*\, Df = (Df_{f^{-1}(y)})_{y \in \widehat{M}}: (f^{-1})^*T(M) \to T(\widehat{M}),$$

que não é mais do que o isomorfismo linear inverso de

$$Df^{-1} = (Df_y^{-1})_{y \in \widehat{M}}: T(\widehat{M}) \to (f^{-1})^*T(M).$$

Do mesmo modo que a derivada covariante de uma secção, na direcção de um vector tangente à base, nos apareceu como uma modificação da derivação usual, que nos permite obter um vector da fibra, também para os morfismos lineares suaves é possível definir uma noção de derivada covariante, na direcção de um vector tangente à base, que vai ser uma aplicação linear entre as fibras.

III.8.16 Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$ um conjunto arbitrário, E e E' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita, munidos de produto interno e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, e consideremos as respectivas segundas formas fundamentais $h_x: T_x(A) \times E_x \to E_x^\perp$ e $h'_x: T_x(A) \times E'_x \to {E'_x}^\perp$. Se $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ é um morfismo linear suave, tem lugar, para cada $x \in A$, uma aplicação linear

$$\nabla\lambda_x: T_x(A) \to L(E_x; E'_x)$$

(a *derivada covariante* de λ em x) definida pela condição de se ter, qualquer que seja a aplicação suave $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}: A \to L(E; E')$ com cada λ_x restrição de $\overline{\lambda}_x$,

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_x(u)(w) &= D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w)) - h'_x(u, \lambda_x(w)) = \\ &= \pi'_x(D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w))),\end{aligned}$$

onde π'_x é a projecção ortogonal de E' sobre E'_x. Tem-se além disso, para a correspondente aplicação suave $\tilde{\lambda}: \underline{E} \to \underline{E'}$ entre os espaços totais, definida por $\tilde{\lambda}(x, w) = (x, \lambda_x(w))$,

$$D\tilde{\lambda}_{(x,w)}(u, h_x(u, w)) = (u, \nabla\lambda_x(u)(w) + h'_x(u, \lambda_x(w))).$$

Dem: Sendo $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}: A \to L(E; E')$ um prolongamento suave do morfismo linear λ, ficamos evidentemente com uma aplicação linear $\nabla\lambda_x$ de $T_x(A)$ para $L(E_x; E')$, definida por

$$\nabla\lambda_x(u)(w) = D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w)) - h'_x(u, \lambda_x(w))$$

pelo que, para concluirmos que temos uma aplicação linear bem definida $\nabla\lambda_x: T_x(A) \to L(E_x; E'_x)$, tudo o que temos que mostrar é que a expressão do segundo membro desta igualdade pertence a E'_x e não depende da escolha do prolongamento suave $\overline{\lambda}$ de λ. Ora, uma vez que, para a correspondente aplicação suave $\tilde{\lambda}: \underline{E} \to \underline{E'}$, se tem

$$\tilde{\lambda}(x, w) = (x, \lambda_x(w)) = (x, \overline{\lambda}_x(w)),$$

obtemos, por derivação em (x, w) na direcção de $(u, h_x(u, w)) \in T_{(x,w)}(\underline{E})$ e tendo em conta III.3.19,

$$(u, D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w))) = D\tilde{\lambda}_{(x,w)}(u, h_x(u,w)) \in T_{(x,\lambda_x(w))}(\underline{E'}),$$

donde, por um lado, mais uma vez pelo mesmo resultado,

$$D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w)) - h'_x(u, \lambda_x(w)) \in E'_x$$

e, por outro lado, o valor $D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w))$ não depende do prolongamento suave considerado. Por fim, o facto de se ter também

$$\nabla\lambda_x(u)(w) = \pi'_x(D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w)))$$

resulta de se ter

$$D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w)) = \nabla\lambda_x(u)(w) + h'_x(u,\lambda_x(w)),$$

com $\nabla\lambda_x(u)(w) \in E'_x$ e $h'_x(u,\lambda_x(w)) \in {E'_x}^{\perp}$. □

III.8.17 **(Nota)** Repare-se que a igualdade

$$D\tilde{\lambda}_{(x,w)}(u, h_x(u,w)) = (u, \nabla\lambda_x(u)(w) + h'_x(u,\lambda_x(w)))$$

estabelecida no resultado precedente, para além de ter servido para mostrar que a definição da derivada covariante de um morfismo linear não dependia do prolongamento considerado e conduzia a uma aplicação linear com valores na fibra, permite também mostrar que a derivada covariante de um morfismo linear suave não se altera quando substituímos os espaços ambientes das fibras, do fibrado vectorial domínio ou do de chegada, por subespaços vectoriais que ainda contenham as fibras. Com efeito, já referimos em III.3.21 que as segundas formas fundamentais dos fibrados vectoriais não se alteram por esse facto e na fórmula em questão não há mais nada que faça intervir os espaços ambientes.

Pelo contrário, a derivada covariante de um morfismo linear suave (tal como já acontecia aliás com a derivada covariante de uma secção) depende, em geral do fibrado vectorial de chegada, no sentido que o seu valor será em geral alterado se substituirmos este por outro fibrado vectorial cujas fibras ainda contenham as imagens das aplicações lineares.

III.8.18 Se G é um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$ e E e E' são espaços vectoriais reais ou complexos, então, considerando os fibrados vectoriais constantes E_A e E'_A, um morfismo linear suave $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}$: $E_A \to E'_A$ é o mesmo que uma aplicação suave $A \to L(E; E')$ e, para um tal morfismo linear suave, a derivada covariante $\nabla\lambda_x$ não depende dos produtos internos que se considerem em E e E' e é dada por

$$\nabla\lambda_x(u)(w) = D\lambda_x(u)(w)$$

(basta, com efeito, reparar que λ é trivialmente o prolongamento suave de si mesmo e que, nesta situação, ambas as segundas formas fundamentais são nulas).

Em particular, no caso em que $\lambda: E \to E'$ é uma aplicação linear, a derivada covariante do *morfismo linear constante* $\lambda_A: E_A \to E'_A$, que a cada $x \in A$ associa sempre λ, é identicamente nula.

III.8.19 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, em que E e E' estão munidos de produtos internos. Diz-se que um morfismo linear suave $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}$ é *paralelo* se se tem $\nabla\lambda_x(u) = 0$, quaisquer que sejam $x \in A$ e $u \in T_x(A)$.[85]

[85]Tal como acontecia com as secções paralelas, podemos olhar intuitivamente para os morfismos lineares paralelos como sendo aqueles que são "tão localmente constantes quanto possível".

Tendo em conta a segunda caracterização da derivada covariante de um morfismo linear em III.8.16, dizer que o morfismo linear suave λ é paralelo equivale a dizer que, para cada $x \in A$, $u \in T_x(A)$ e $w \in E_x$,

$$D\tilde{\lambda}_{(x,w)}(u, h_x(u,w)) = (u, h'_x(u, \lambda_x(w))).$$

III.8.20 Como primeiro exemplo de morfismo linear paralelo temos, de acordo com o que dissémos atrás, o dos morfismos lineares constantes entre fibrados vectoriais constantes. Como segundo exemplo, igualmente consequência trivial da definição, temos o seguinte:
Seja $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset E$, em que E está munido de um produto interno. Tem-se então que o morfismo linear identidade $Id_{\underline{E}}: \underline{E} \to \underline{E}$ é paralelo.
Dem: Basta aplicar a definição tomando a aplicação com valor constante Id_E como prolongamento suave de $Id_{\underline{E}}$. □

III.8.21 Mais geralmente, sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$ um conjunto arbitrário, E espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, munido de produto interno e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E'_x \subset E$. Notando π'_x a projecção ortogonal de E' sobre E'_x, sendo h_x e h'_x as segundas formas fundamentais de $\underline{E}$ e $\underline{E'}$, respectivamente, e notando, para cada $x \in A$, $\iota_x: E_x \to E'_x$ a inclusão, tem-se que $\iota: \underline{E} \to \underline{E'}$ é um morfismo linear suave, cuja derivada covariante está definida por

$$\nabla\iota_x(u)(w) = h_x(u,w) - h'_x(u,w) = \pi'_x(h_x(u,w)).$$

À aplicação bilinear $\widehat{h}_x: T_x(A) \times E_x \to E'_x$ definida por

$$\widehat{h}_x(u,w) = \nabla\iota_x(u)(w) = h_x(u,w) - h'_x(u,w) = \pi'_x(h_x(u,w))$$

dá-se também o nome de *segunda forma fundamental* de $\underline{E}$ *relativamente a* $\underline{E'}$. Em particular, no caso em que $\underline{E'}$ é o fibrado vectorial constante E_A, tem-se simplesmente $\widehat{h}_x(u,w) = \nabla\iota_x(u)(w) = h_x(u,w)$.
Dem: Trata-se de uma consequência directa da definição, se reparamos que, para cada $x \in A$, $Id_E: E \to E$ é um prolongamento de ι_x. □

A derivada covariante de um morfismo linear suave depende, em geral, dos produtos internos que se consideram nos espaços ambientes das fibras, através das segundas formas fundamentais dos fibrados vectoriais. Há, no entanto, analogamente ao que foi referido em III.3.15 para a derivada covariante de secções, uma situação em que a derivada covariante não depende dos produtos internos considerados.

III.8.22 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$. Sejam $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear suave e $x_0 \in A$ tal que $\lambda_{x_0} = 0$. Então a derivada covariante $\nabla\lambda_{x_0}: T_{x_0}(A) \to L(E_{x_0}; E'_{x_0})$ não depende dos produtos internos que se considerem em E e E', nem se altera se substituirmos $\underline{E'}$ por outro fibrado vectorial cujas fibras ainda contenham os $\lambda_x(E_x)$. Mais precisamente, tem lugar a seguinte caracterização alternativa, que não faz intervir os produtos internos nem o fibrado vectorial de chegada: Sendo $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}$ uma aplicação suave de A em $L(E; E')$ com cada λ_x restrição de $\overline{\lambda}_x$ e sendo $u \in T_{x_0}(A)$, $w \in E_{x_0}$ e $z \in E$ tal que $(u, z) \in T_{(x_0,w)}(\underline{E})$, vem

$$\nabla\lambda_{x_0}(u)(w) = D\overline{\lambda}_{x_0}(u)(w) + \overline{\lambda}_{x_0}(z).$$

Dem: Tendo em conta III.8.16, se fixamos produtos internos em E e E' e considerarmos as correspondentes segundas formas fundamentais, tem-se

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_{x_0}(u)(w) &= D\overline{\lambda}_{x_0}(u)(w) + \overline{\lambda}_{x_0}(h_{x_0}(u, w)) - h'_{x_0}(u, \lambda_{x_0}(w)) = \\ &= D\overline{\lambda}_{x_0}(u)(w) + \overline{\lambda}_{x_0}(h_{x_0}(u, w)),\end{aligned}$$

pelo que, para justificarmos a fórmula do enunciado, que implica a independência dos produtos internos em E e E', basta mostrarmos que, sendo $(u, z) \in T_{(x_0,w)}(\underline{E})$ arbitrário, tem-se $\overline{\lambda}_{x_0}(z) = \overline{\lambda}_{x_0}(h_{x_0}(u, w))$. Ora, isso é uma consequência de III.3.19, uma vez que z e $h_{x_0}(u, w)$ pertencem a um mesmo subespaço afim de subespaço vectorial associado E_{x_0}, donde $z - h_{x_0}(u, w) \in E_{x_0}$ e

$$\overline{\lambda}_{x_0}(z) - \overline{\lambda}_{x_0}(h_{x_0}(u, w)) = \lambda_{x_0}(z - h_{x_0}(u, w)) = 0. \qquad \square$$

Apesar de a definição III.8.16 poder parecer algo artificial, ela tem o mérito de permitir a validade das propriedades do tipo “regra de Leibnitz” em III.8.23 e III.8.25, para além da das propriedades análogas às das derivadas covariantes de secções, que enunciamos depois.

III.8.23 **(Regra de Leibnitz)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, onde E e E' estão munidos de produto interno. Sejam $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear suave e $W = (W_x)_{x\in A}$ uma secção suave de $\underline{E}$. Tem-se então, para a secção suave $\lambda(W) = (\lambda_x(W_x))_{x\in A}$ de $\underline{E'}$,

$$\nabla\lambda(W)_x(u) = \nabla\lambda_x(u)(W_x) + \lambda_x(\nabla W_x(u)).$$

Dem: Seja $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}$ uma aplicação suave de A em $L(E; E')$ tal que cada

λ_x seja uma restrição de $\overline{\lambda}_x$. Vem então, tendo em conta III.3.14,

$$\begin{aligned}\nabla\lambda(W)_x(u) &= D\lambda(W)_x(u) - h'_x(u,\lambda_x(W_x)) =\\ &= D\overline{\lambda}(W)_x(u) - h'_x(u,\lambda_x(W_x)) =\\ &= D\overline{\lambda}_x(u)(W_x) + \overline{\lambda}_x(DW_x(u)) - h'_x(u,\lambda_x(W_x)) =\\ &= D\overline{\lambda}_x(u)(W_x) + \overline{\lambda}_x(\nabla W_x(u) + h_x(u,W_x)) - h'_x(u,\lambda_x(W_x)) =\\ &= \nabla\lambda_x(u)(W_x) + \lambda_x(\nabla W_x(u)).\end{aligned}$$ □

III.8.24 **(Corolário)** Nas condições anteriores, um morfismo linear suave $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}$ é paralelo se, e só se, qualquer que seja a secção suave $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$, $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$, tem-se $\nabla\lambda(W)_{x_0}(u) = \lambda_{x_0}(\nabla W_{x_0}(u))$.
Dem: A condição necessária é uma consequência imediata da fórmula de Leibnitz precedente, tal como o é a condição suficiente, se nos lembrarmos de que, dado $w \in E_{x_0}$, existe sempre uma secção suave $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$ tal que $W_{x_0} = w$ (cf. III.1.20). □

III.8.25 **(Regra de Leibnitz)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$, $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ e $\underline{E''} = (E''_x)_{x\in A}$ três fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$, $E'_x \subset E'$ e $E''_x \subset E''$, onde E, E' e E'' estão munidos de produto interno. Se $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E'}$ e $\mu = (\mu_x)_{x\in A}\colon \underline{E'} \to \underline{E''}$ são morfismos lineares suaves, então

$$\nabla(\mu\circ\lambda)_x(u) = \nabla\mu_x(u)\circ\lambda_x + \mu_x\circ(\nabla\lambda_x(u)),$$

por outras palavras,

$$\nabla(\mu\circ\lambda)_x(u)(w) = \nabla\mu_x(u)(\lambda_x(w)) + \mu_x(\nabla\lambda_x(u)(w)).$$

Dem: Sejam $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}$ e $\overline{\mu} = (\mu_x)_{x\in A}$ duas aplicações suaves de A em $L(E;E')$ e $L(E';E'')$, respectivamente, tais que cada λ_x seja uma restrição de $\overline{\lambda}_x$ e cada μ_x seja uma restrição de $\overline{\mu}_x$. Temos então uma aplicação suave $(\overline{\mu}_x\circ\overline{\lambda}_x)_{x\in A}$ de A para $L(E;E'')$, com cada $\mu_x\circ\lambda_x$ restrição de $\overline{\mu}_x\circ\overline{\lambda}_x$, pelo que

$$\begin{aligned}\nabla(\mu\circ\lambda)_x(u)(w) &= D(\overline{\mu}\circ\overline{\lambda})_x(u)(w) + \overline{\mu}_x(\overline{\lambda}_x(h_x(u,w))) - h''_x(u,\mu_x(\lambda_x(w))) =\\ &= D\overline{\mu}_x(u)(\lambda_x(w)) + \overline{\mu}_x(D\overline{\lambda}_x(u)(w)) + \overline{\mu}_x(h'_x(u,\lambda_x(w))) -\\ &\quad - \overline{\mu}_x(h'_x(u,\lambda_x(w))) + \overline{\mu}_x(\overline{\lambda}_x(h_x(u,w))) - h''_x(u,\mu_x(\lambda_x(w))) =\\ &= \nabla\mu_x(u)(\lambda_x(w)) + \overline{\mu}_x(D\overline{\lambda}_x(u)(w) - h'_x(u,\lambda_x(w)) + \overline{\lambda}_x(h_x(u,w))) =\\ &= \nabla\mu_x(u)(\lambda_x(w)) + \mu_x(\nabla\lambda_x(u)(w)).\end{aligned}$$ □

III.8.26 **(Corolário)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, onde E e E' estão munidos de produto interno. Se $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E'}$ é um isomorfismo linear suave, tem-se, para o isomorfismo linear suave inverso $\lambda^{-1} = (\lambda_x^{-1})_{x\in A}\colon \underline{E'} \to \underline{E}$,

$$\nabla(\lambda^{-1})_x(u) = -\lambda_x^{-1}\circ(\nabla\lambda_x(u))\circ\lambda_x^{-1},$$

por outras palavras,

$$\nabla(\lambda^{-1})_x(u)(w') = -\lambda_x^{-1}(\nabla\lambda_x(u)(\lambda_x^{-1}(w'))).$$

Dem: Uma vez que $\lambda^{-1} \circ \lambda = Id_{\underline{E}}: \underline{E} \to \underline{E}$, que sabemos ser um morfismo linear paralelo, podemos escrever

$$0 = \nabla(\lambda^{-1} \circ \lambda)_x(u) = (\nabla(\lambda^{-1})_x(u)) \circ \lambda_x + \lambda_x^{-1} \circ (\nabla\lambda_x(u)),$$

donde $(\nabla(\lambda^{-1})_x(u)) \circ \lambda_x = -\lambda_x^{-1} \circ (\nabla\lambda_x(u))$, e portanto

$$\nabla(\lambda^{-1})_x(u) = -\lambda_x^{-1} \circ (\nabla\lambda_x(u)) \circ \lambda_x^{-1}. \qquad \square$$

III.8.27 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, onde E e E' estão munidos de produto interno. Tem-se então:

a) Se $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}$ e $\mu = (\mu_x)_{x\in A}$ são morfismos lineares suaves $\underline{E} \to \underline{E'}$ e $c \in \mathbb{K}$, então

$$\nabla(\lambda + \mu)_x(u) = \nabla\lambda_x(u) + \nabla\mu_x(u),$$
$$\nabla(\mathrm{c}\lambda)_x(u) = c\nabla\lambda_x(u).$$

b) (Regra de Leibnitz) Se $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}$ é um morfismo linear suave $\underline{E} \to \underline{E'}$ e $f: A \to \mathbb{K}$ é uma aplicação suave, então

$$\nabla(f\lambda)_x(u) = Df_x(u)\,\lambda_x + f(x)\,\nabla\lambda_x(u).$$

Dem: Trata-se de consequências directas da definição, se nos lembramos que, se $\overline{\lambda}$ e $\overline{\mu}$ são prolongamentos suaves de λ e μ, então $\overline{\lambda} + \overline{\mu}$, $c\overline{\lambda}$ e $f\overline{\lambda}$ são prolongamentos suaves de $\lambda + \mu$, $c\lambda$ e $f\lambda$, respectivamente. Por exemplo, quanto a b), vem

$$\begin{aligned}\nabla(f\lambda)_x(u)(w) &= D(f\overline{\lambda})_x(u)(w) + f(x)\overline{\lambda}(x)(h_x(u,w)) - h'_x(u, f(x)\lambda_x(w)) = \\ &= Df_x(u)\overline{\lambda}_x(w) + f(x)D\overline{\lambda}_x(u)(w) + \\ &\quad + f(x)\overline{\lambda}(x)(h_x(u,w)) - f(x)h'_x(u, \lambda_x(w)) = \\ &= Df_x(u)\lambda_x(w) + f(x)\nabla\lambda_x(u)(w).\end{aligned} \qquad \square$$

III.8.28 Sejam G e $\widehat{G}$ espaços vectoriais reais de dimensão finita, $A \subset G$ e $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ subconjuntos e $f: \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Sejam E e E' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita, munidos de produto interno, e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$. Se $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ é um morfismo linear suave, tem-se, para cada $y \in \widehat{A}$ e $v \in T_y(\widehat{A})$,

$$\nabla(f^*\lambda)_y(v) = \nabla\lambda_{f(y)}(Df_y(v)).$$

Dem: Sendo $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}$ uma aplicação suave de A em $L(E; E')$ tal que cada λ_x seja uma restrição de $\overline{\lambda}_x$, ficamos com uma aplicação suave

$\widehat{A} \to L(E; E')$ que a y associa $\overline{\lambda}_{f(y)}$, que prolonga $\lambda_{f(y)} = (f^*\lambda)_y$ pelo que, lembrando III.3.13 e o teorema de derivação da aplicação composta,

$$\begin{aligned}\nabla(f^*\lambda)_y(v)(w) &= D\overline{\lambda}_{f(y)}(Df_y(v))(w) + \overline{\lambda}_{f(y)}(h_{f(y)}(Df_y(v), w)) - \\ &\quad - h'_{f(y)}(Df_y(v), \lambda_{f(y)}(w)) = \\ &= \nabla\lambda_{f(y)}(Df_y(v)).\end{aligned}$$

□

III.8.29 Sejam G e G' espaços euclidianos, $M \subset G$ e $M' \subset G'$ duas variedades e $f: M \to M'$ uma aplicação suave. Podemos então considerar o morfismo linear suave $Df: T(M) \to f^*T(M')$, a partir do qual obtemos, para cada $x \in M$, uma aplicação linear

$$\nabla Df_x: T_x(M) \to L(T_x(M); T_{f(x)}(M').$$

A esta aplicação linear associamos uma aplicação bilinear

$$\beta(f)_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_{f(x)}(M'),$$

a que damos o nome de *Hessiana* de f em x, definida por

$$\beta(f)_x(u, v) = \nabla Df_x(u)(v).$$

Dizemos que $f: M \to M'$ é uma *aplicação paralela* (ou *afim*) se, para cada $x \in M$, $\beta(f)_x = 0$, isto é, se $Df: T(M) \to f^*T(M')$ é um morfismo linear paralelo.

III.8.30 **(Casos particulares) a)** No caso em que M é um aberto de G e $M' = G'$ (ou, mais geralmente, M' é um aberto de G'), $T(M)$ e $f^*T(M')$ são os fibrados vectoriais constantes G_M e G'_M, respectivamente. Tem-se assim

$$\beta(f)_x(u, v) = D(Df)_x(u)(v) = D^2 f_x(u, v)$$

(a Hessiana coincide com a derivada de segunda ordem), em particular a Hessiana não depende dos produtos internos que se consideram em G e G' (cf. III.8.18).

b) No caso em que $M \subset M' \subset G$ e em que consideramos a inclusão $\iota: M \to M'$, tem-se que $D\iota: T(M) \to T(M')_{/M}$ é o morfismo linear inclusão pelo que, como já referimos,

$$\beta(\iota)_x(u, v) = \nabla D\iota_x(u)(v) = h_x(u, v) - h'_x(u, v) = \pi'_x(h_x(u, v)),$$

onde $h_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ e $h'_x: T_x(M') \times T_x(M') \to T_x(M')^\perp$ são as segundas formas fundamentais de M e M' e π' é a projecção ortogonal de E' sobre $T_x(M')$. A $\beta(\iota)_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M')$ também se dá o nome de *segunda forma fundamental* de M *relativamente* a M' (no caso em que $M' = G$, $\beta(\iota)_x = h_x$).

III.8.31 Sejam G e G' espaços euclidianos, $M \subset G$ e $M' \subset G'$ duas variedades e $f: M \to M'$ uma aplicação suave. Sejam U um aberto de G contendo M e $\overline{f}: U \to G'$ uma aplicação suave prolongando f. Notando $\pi'_{f(x)}$ a projecção ortogonal de G' sobre $T_{f(x)}(M')$ e h_x e $h'_{f(x)}$ as segundas formas fundamentais de M e de M', nos pontos x e $f(x)$, tem-se então, quaisquer que sejam $u, v \in T_x(M)$,

$$\begin{aligned}\beta(f)_x(u,v) &= D^2\overline{f}_x(u,v) + D\overline{f}_x(h_x(u,v)) - h'_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v)) = \\ &= \pi'_{f(x)}(D^2\overline{f}_x(u,v) + D\overline{f}_x(h_x(u,v))).\end{aligned}$$

Em particular, a aplicação bilinear

$$\beta(f)_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$$

é simétrica.

Dem: Uma vez que, para cada $x \in M$, $D\overline{f}_x: G \to G'$ é um prolongamento de $Df_x: T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$, as duas caracterizações de $\beta(f)_x(u,v)$ reduzem-se às caracterizações da derivada covariante na definição III.8.16, desde que recordemos a fórmula para a segunda forma fundamental da imagem recíproca $f^*T(M')$ a partir da de $T(M')$ referida em III.3.13. A simetria da derivada de segunda ordem $D^2\overline{f}_x: G \times G \to G'$ e a da segunda forma fundamental de uma variedade implicam agora que $\beta(f)_x$ é efectivamente uma aplicação bilinear simétrica. □

III.8.32 **(Segunda versão do teorema fundamental da geometria de Riemann)** Sejam G e G' espaços euclidianos, $M \subset G$ e $M' \subset G'$ duas variedades e $f: M \to M'$ uma aplicação suave tal que, para cada $x \in M$, $Df_x: T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$ seja uma aplicação linear ortogonal (diz-se então que f é uma *imersão riemaniana*). Para cada $x \in M$, a aplicação bilinear

$$\beta(f)_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$$

toma então valores em $Df_x(T_x(M))^{\perp}$.

Em particular, no caso em que cada $Df_x: T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$ é um isomorfismo ortogonal, f é uma aplicação paralela.[86]

Dem: Sejam $x_0 \in M$ e $u, v, w \in T_{x_0}(M)$ arbitrários e consideremos secções suaves $X = (X_x)_{x\in M}$ e $Y = (Y_x)_{x\in M}$ de $T(M)$ tais que $X_{x_0} = u$ e $Y_{x_0} = v$ (cf. III.1.20). Tem-se então, para cada $x \in M$,

$$\langle Df_x(X_x), Df_x(Y_x)\rangle = \langle X_x, Y_x\rangle.$$

Derivando ambos os membros desta igualdade em x_0 na direcção de w, obtemos, tendo em conta a alínea c) de III.3.4 e III.8.23,

[86] Repare-se que, tendo em conta III.8.24, a versão deste teorema em III.7.8 poderia ser deduzida como corolário da versão agora apresentada, a qual tem uma demonstração com o mesmo espírito mas um pouco mais simples que a daquela.

$$\begin{aligned}&\langle\nabla Df_{x_0}(w)(u)+Df_{x_0}(\nabla X_{x_0}(w)),Df_{x_0}(v)\rangle+\\&+\langle Df_{x_0}(u),\nabla Df_{x_0}(w)(v)+Df_{x_0}(\nabla Y_{x_0}(w))\rangle=\\&\quad=\langle\nabla X_{x_0}(w),v\rangle+\langle u,\nabla Y_{x_0}(w)\rangle\end{aligned}$$

donde, lembrando a definição da Hessiana e tendo em conta, mais uma vez, o facto de Df_{x_0} ser uma aplicação linear ortogonal,

$$\langle\beta(f)_{x_0}(w,u),Df_{x_0}(v)\rangle+\langle Df_{x_0}(u),\beta(f)_{x_0}(w,v)\rangle=0.$$

Por permutação circular dos vectores u, v, w, podemos também escrever

$$\begin{aligned}&\langle\beta(f)_{x_0}(u,v),Df_{x_0}(w)\rangle+\langle Df_{x_0}(v),\beta(f)_{x_0}(u,w)\rangle=0,\\&\langle\beta(f)_{x_0}(v,w),Df_{x_0}(u)\rangle+\langle Df_{x_0}(w),\beta(f)_{x_0}(v,u)\rangle=0,\end{aligned}$$

pelo que, somando membro a membro estas três igualdades, depois de multiplicar ambos os membros da primeira por -1 obtemos, tendo em conta a simetria da Hessiana,

$$2\,\langle\beta(f)_{x_0}(u,v),Df_{x_0}(w)\rangle=0.$$

Tendo em conta a arbitrariedade de $w\in T_{x_0}(M)$, esta igualdade implica que $\beta(f)_{x_0}(u,v)$ é ortogonal a $Df_{x_0}(T_{x_0}(M))$. No caso em que cada Df_x é mesmo um isomorfismo ortogonal de $T_{x_0}(M)$ sobre $T_{f(x_0)}(M')$ a conclusão anterior diz-nos que $\beta(f)_{x_0}(u,v)$ é ortogonal a $T_{f(x_0)}(M')$, ou seja, $\beta(f)_{x_0}(u,v)=0$, o que mostra que $\beta(f)_{x_0}=0$ e portanto f é uma aplicação paralela. □

Vamos agora examinar rapidamente o modo como muito do que atrás foi dito sobre morfismos lineares pode ser adaptado de modo a abarcar uma situação ligeiramente diferente, a dos morfismos bilineares, definidos num produto de dois fibrados vectoriais e com valores num terceiro fibrado vectorial. Digamos, desde já, que tudo o que vamos referir sobre morfismos bilineares pode ser estendido, sem dificuldades matemáticas acrescidas, à noção mais geral de morfismo p-linear, definido num produto de p fibrados vectoriais, onde $p\geq 1$, o caso dos morfismos lineares passando então a constituir o caso particular em que $p=1$. A razão por que nos limitamos ao caso $p=2$ é a de procurarmos trabalhar com notações menos pesadas e, por isso, mais claras mas o leitor não terá dificuldade em fazer as adatações necessárias se quiser obter enunciados válidos para qualquer p.

III.8.33 Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita e $A\subset G$ um conjunto arbitrário. Sejam E, E' e E'' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita e $\underline{E}=(E_x)_{x\in A}$, $\underline{E'}=(E'_x)_{x\in A}$ e $\underline{E''}=(E''_x)_{x\in A}$ três fibrados vectoriais de base A, com $E_x\subset E$, $E'_x\subset E'$ e $E''_x\subset E''$. Vamos chamar *morfismo bilinear* de $\underline{E}\times\underline{E'}$ para $\underline{E''}$ a uma família $(\mu_x)_{x\in A}$ de aplicações bilineares $\mu_x\colon E_x\times E'_x\to E''_x$ e dizer que um morfismo bilinear

$$\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$$

é *suave* se existir uma aplicação suave $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_x)_{x\in A}: A \to L(E, E'; E')$ tal que, para cada $x \in A$, a aplicação bilinear $\mu_x: E_x \times E'_x \to E''_x$ seja uma restrição da aplicação bilinear $\overline{\mu}_x: E \times E' \to E''$ (também se diz então que $\overline{\mu}$ é um *prolongamento suave* de μ).

III.8.34 Seja $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ um morfismo bilinear. Tem-se então:
a) Se $\underline{F} = (F_x)_{x\in A}$ e $\underline{F'} = (F'_x)_{x\in A}$ são outros fibrados vectoriais e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{F} \to \underline{E}$ e $\lambda' = (\lambda'_x)_{x\in A}: \underline{F'} \to \underline{E'}$ são morfismos lineares, então tem lugar um morfismo bilinear

$$\mu \circ (\lambda \times \lambda') = (\mu_x \circ (\lambda_x \times \lambda'_x))_{x\in A}: \underline{F} \times \underline{F'} \to \underline{E''},$$

o qual é suave se μ, λ e λ' o forem.
b) Se $\underline{F''} = (F''_x)_{x\in A}$ é outro fibrado vectorial e $\lambda'' = (\lambda''_x)_{x\in A}: \underline{E''} \to \underline{F''}$ é um morfismo linear, então tem lugar um morfismo bilinear

$$\lambda'' \circ \mu = (\lambda''_x \circ \mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{F''},$$

o qual é suave se μ e λ'' o forem.
Dem: A demonstração tem o mesmo espírito que a de III.8.3. Por exemplo, no que diz respeito a a), no caso em que μ, λ e λ' são suaves, podemos considerar aplicações suaves $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_x)_{x\in A}$, $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in A}$ e $\overline{\lambda}' = (\overline{\lambda}'_x)_{x\in A}$ de A para $L(E, E'; E'')$, $L(F; E)$ e $L(F'; E')$, respectivamente, cujos valores são prolongamentos dos μ_x, λ_x e λ'_x e então, utilizando a regra de Leibnitz, na versão referida em I.7.8 relativamente à aplicação trilinear

$$\begin{aligned}&L(E, E'; E'') \times L(F; E) \times L(F'; E') \to L(F, F'; E''),\\ &(\mu, \lambda, \lambda') \mapsto \mu \circ (\lambda \times \lambda'),\end{aligned}$$

obtemos uma aplicação suave $A \to L(F, F'; E'')$, $x \mapsto \overline{\mu}_x \circ (\overline{\lambda}_x \times \overline{\lambda}'_x)$, com cada $\overline{\mu}_x \circ (\overline{\lambda}_x \times \overline{\lambda}'_x)$ prolongando $\mu_x \circ (\lambda_x \times \lambda'_x)$. □

III.8.35 Tal como em III.8.4, podemos utilizar o resultado precedente para concluir que a suavidade ou não de um morfismo bilinear não se altera se substituirmos um, ou mais dos espaços ambientes das fibras por um subespaço vectorial que ainda contenha estas.

III.8.36 Sejam G e $\widehat{G}$ espaços vectoriais reais de dimensão finita, $A \subset G$ e $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ subconjuntos e $f: \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$, $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ e $\underline{E''} = (E''_x)_{x\in A}$ três fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$, $E'_x \subset E'$ e $E''_x \subset E''$. Se $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ é um morfismo bilinear suave, então tem lugar um *morfismo bilinear* suave *imagem recíproca*

$$f^*\mu = (\mu_{f(y)})_{y\in\widehat{A}}: f^*\underline{E} \times f^*\underline{E'} \to f^*\underline{E''}.$$

Como anteriormente, um caso particular importante é aquele em que $\widehat{A} \subset A \subset G$ e em que $f: \widehat{A} \to A$ é a inclusão: Dizemos então que a imagem recíproca $f^*\mu$ é a *restrição* de μ a $\widehat{A}$ e notamo-la também $\mu_{/\widehat{A}}$.

Dem: A demonstração é inteiramente análoga à de III.8.5. □

III.8.37 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$, $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ e $\underline{E''} = (E''_x)_{x\in A}$ três fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$, $E'_x \subset E'$ e $E''_x \subset E''$. Tem-se então:

a) Tem lugar um morfismo bilinear suave $0: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ que associa a cada $x \in A$ a aplicação bilinear $0: E_x \times E'_x \to E''_x$.

b) Se $\lambda, \mu: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ são dois morfismos bilineares suaves, então

$$\lambda + \mu = (\lambda_x + \mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$$

é também um morfismo bilinear suave.

c) Se $\mu: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ é um morfismo bilinear suave e $f: A \to \mathbb{K}$ é uma aplicação suave, então

$$f\mu = (f(x)\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$$

é também um morfismo bilinear suave.

d) Se $\mu: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ é um morfismo bilinear suave e $W = (W_x)_{x\in A}$ e $W' = (W'_x)_{x\in A}$ são secções suaves de $\underline{E}$ e $\underline{E'}$, então

$$\mu(W, W') = (\mu(W_x, W'_x))_{x\in A}$$

é uma secção suave de $\underline{E''}$.

Dem: A demonstração é inteiramente análoga à de III.8.6. □

III.8.38 Tal como em III.8.7, dados os fibrados vectoriais $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$, $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ e $\underline{E''} = (E''_x)_{x\in A}$, com $E_x \subset E$, $E'_x \subset E'$ e $E''_x \subset E''$, e o morfismo bilinear $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$, então, supondo fixados produtos internos em E e E', o morfismo bilinear é suave se, e só se, for suave a aplicação

$$\mu^\perp = (\mu^\perp_x)_{x\in A}: A \to L(E, E'; E'')$$

definida por $\mu^\perp_x = \mu_x \circ (\pi_x \times \pi'_x)$, onde π_x e π'_x são as projecções ortogonais sobre E_x e E'_x, respectivamente.

III.8.39 Tal como em III.8.8, o resultado precedente pode ser utilizado para mostrar que a suavidade de morfismos bilineares é uma questão local: Para mostrar que um morfismo bilinear entre fibrados vectoriais de base A é suave, basta provar a existência de uma família de abertos A_j de A, com união A, tal que a restrição do morfismo bilinear a cada A_j seja suave (ou, equivalentemente, que, para cada $x_0 \in A$, exista um aberto V de A, com

$x_0 \in V$, tal que a restrição a V seja suave). Do mesmo modo ele justifica, como no caso dos morfismos lineares, que um morfismo bilinear complexo é suave se, e só se, o for no sentido real.

Até agora, apesar de já termos usado várias vezes a notação $\underline{E} \times \underline{E'}$, ela tinha um sentido puramente formal e não pressupunha a noção de produto de fibrados vectoriais. Essa noção vai-nos agora ser cómoda pelo que a examinamos rapidamente.

III.8.40 Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$, E e E' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$. Tem-se então:

a) A família $\underline{E} \times \underline{E'} = (E_x \times E'_x)_{x\in A}$ é também um fibrado vectorial (o *fibrado vectorial produto*).

b) No caso em que E e E' estão munidos de produto interno e em que consideramos sobre $E \times E'$ o correspondente produto interno (cf. I.3.1), a projecção ortogonal de $E \times E'$ sobre $E_x \times E'_x$ é $\pi_x \times \pi'_x$, onde π_x e π'_x são as projecções ortogonais sobre E_x e E'_x respectivamente, e a segunda forma fundamental de $\underline{E} \times \underline{E'}$ em x é a aplicação bilinear

$$T_x(A) \times (E_x \times E'_x) \to (E_x \times E'_x)^\perp, \quad (u, (w, w')) \mapsto (h_x(u, w), h'_x(u, w')),$$

onde h_x e h'_x são as segundas formas fundamentais de $\underline{E}$ e $\underline{E'}$ respectivamente.

c) Se $x \in A$ e $(w, w') \in E_x \times E'_x$, o espaço vectorial tangente ao espaço total $(\underline{E} \times \underline{E'})^\sim$ em $(x, (w, w'))$ é[87]

$$\begin{aligned} &T_{(x,(w,w'))}((\underline{E} \times \underline{E'})^\sim) = \\ &= \{(u, (z, z')) \in G \times (E \times E') \mid (u, z) \in T_{(x,w)}(\underline{E}) \wedge (u, z') \in T_{(x,w')}(\underline{E'})\}. \end{aligned}$$

Dem: a) Dado $x_0 \in A$, podemos considerar dois abertos U e U' de A, contendo x_0 tais que $\underline{E}_{/U}$ e $\underline{E'}_{/U'}$ sejam fibrados vectoriais triviais, com campos de referenciais $W_1, \ldots, W_m$ e $W'_1, \ldots, W'_n$ respectivamente, e então, considerando o aberto $U'' = U \cap U'$ de A, que ainda contém x_0, obtemos um campo de referenciais para $\underline{E} \times \underline{E'}_{/U''}$ associando a cada $x \in U''$ a base

$$(W_{1x}, 0), \ldots, (W_{mx}, 0), (0, W'_{1x}), \ldots, (0, W'_{nx})$$

de $E_x \times E'_x$.

b) Para mostrarmos que a projecção ortogonal de $E \times E'$ sobre $E_x \times E'_x$ é $\pi_x \times \pi'_x$ começamos por reparar que, se $w \in E_x^\perp$ e $w' \in {E'_x}^\perp$, então vem

[87]Como já referimos, quando não há risco de confusão usamos frequentemente a notação $\underline{E}$, em vez de $\tilde{\underline{E}}$, para designar o espaço total de um fibrado vectorial $\underline{E}$. Convirá, no entanto, não usar essa simplificação quando se examina o produto de fibrados vectoriais, uma vez que o espaço total do produto não é o produto dos espaços totais.

trivialmente $(w,w') \in (E_x \times E'_x)^\perp$ e notamos então que, para cada (w,w') em $E \times E'$, vem

$$(w,w') = (\pi_x(w), \pi'_x(w')) + (\pi_x^\perp(w), {\pi'_x}^\perp(w')),$$

com $(\pi_x(w), \pi'_x(w')) \in E_x \times E'_x$ e $(\pi_x^\perp(w), {\pi'_x}^\perp(w')) \in (E_x \times E'_x)^\perp$. A fórmula para a segunda forma fundamental de $\underline{E} \times \underline{E'}$ resulta agora por derivação, a partir da caracterização em III.3.11.

c) Basta repararmos que, dado $u \in T_x(A)$, o conjunto dos $(z,z') \in E \times E'$ tais que $(u,(z,z')) \in T_{(x,(w,w'))}((\underline{E} \times \underline{E'})^\sim)$ e o conjunto daqueles tais que $(u,z) \in T_{(x,w)}(\underline{E})$ e $(u,z') \in T_{(x,w')}(\underline{E'})$ são dois subespaços afins com o mesmo subespaço vectorial $E_x \times E'_x$ associado e com o elemento comum $(h_x(u,w), h'_x(u,w'))$. □

Vai-nos também ser útil dispor de uma extensão de II.2.12, em que o espaço de aplicações lineares é substituído por um espaço de aplicações bilineares. É o resultado que examinamos a seguir e que, como os que temos vindo a estudar, pode ser facilmente adaptado para o caso geral dos espaços de aplicações multilineares.

III.8.41 Sejam E, E', E'' e G espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset G$ um conjunto e $f: A \to L(E,E';E'')$ uma aplicação. Tem-se então que f é de classe C^k se, e só se, quaisquer que sejam $w \in E$ e $w' \in E'$, é de classe C^k a aplicação $f_{(w,w')}: A \to E''$ definida por $f_{(w,w')}(x) = f(x)(w,w')$, tendo-se então, no caso em que $k \geq 1$,

$$D{f_{(w,w')}}_x(u) = Df_x(u)(w,w'),$$

quaisquer que sejam $x \in A$ e $u \in T_x(A)$.
Mais precisamente, se $w_1, \ldots, w_m$ é uma base de E e $w'_1, \ldots, w'_n$ é uma base de E', para concluir que f é de classe C^k basta sabermos que, quaisquer que sejam i e j, a aplicação $f_{(w_i,w'_j)}: A \to E''$ é de classe C^k.

Dem: Para mostrar que, se f é de classe C^k então cada $f_{(w,w')}$ é de classe C^k, e com a derivada caracterizada pela fórmula acima, basta repararmos que tem lugar uma aplicação linear $L(E,E';E'') \to E''$, $\mu \mapsto \mu(w,w')$. Suponhamos, reciprocamente, que são dadas bases de E e de E' tais que cada $f_{(w_i,w'_j)}: A \to E''$ seja de classe C^k. Para cada i, podemos aplicar II.2.12 para concluir que é de classe C^k a aplicação $f_{(w_i)}: A \to L(E';E'')$, que a cada $x \in A$ associa a aplicação linear $E' \to E''$, $w' \mapsto f(x)(w_i,w')$ e, mais uma vez pelo mesmo resultado, resulta daqui que é de classe C^k a aplicação $\widehat{f}: A \to L(E;L(E';E''))$, que a cada x associa a aplicação linear

$$w \mapsto \{w' \mapsto f(x)(w,w')\}.$$

Reparando enfim que f não é mais do que a composta de $\widehat{f}$ com o isomorfismo $\Upsilon_1^{-1}: L(E; L(E'; E'')) \to L(E, E'; E'')$ referido em I.1.6, concluímos que f é de classe C^k. $\square$

III.8.42 Sejam $A \subset G$, $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$, $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ e $\underline{E''} = (E''_x)_{x \in A}$ três fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$, $E'_x \subset E'$ e $E''_x \subset E''$ e $\mu = (\mu_x)_{x \in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ um morfismo bilinear. Podemos então considerar uma aplicação associada entre os espaços totais

$$\tilde{\mu}: (\underline{E} \times \underline{E'})^{\sim} \to \underline{\tilde{E}''}, \quad \tilde{\mu}(x, (w, w')) = (x, \mu_x(w, w')),$$

e o morfismo bilinear μ é suave se, e só se, $\tilde{\mu}$ é uma aplicação suave.

Dem: Supondo que o morfismo bilinear é suave, podemos considerar uma aplicação suave $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_x)_{x \in A}$ de A em $L(E, E'; E'')$ tal que cada μ_x seja uma restrição de $\overline{\mu}_x$ e então o facto de se ter $\tilde{\mu}(x, (w, w')) = (x, \overline{\mu}_x(w, w'))$ implica que $\tilde{\mu}$ é uma aplicação suave. Suponhamos, reciprocamente, que $\tilde{\mu}: (\underline{E} \times \underline{E'})^{\sim} \to \underline{\tilde{E}''}$ é uma aplicação suave. Fixemos produtos internos em E e em E'. O facto de $\underline{E}$ e $\underline{E'}$ serem fibrados vectoriais garante a suavidade das aplicações $A \to L(E; E)$ e $A \to L(E'; E')$, que a x associam as projecções ortogonais π_x e π'_x pelo que ficamos com uma aplicação suave

$$A \times (E \times E') \to (\underline{E} \times \underline{E'})^{\sim}, \quad (x, (w, w')) \mapsto (x, (\pi_x(w), \pi'_x(w'))),$$

e portanto, por composição, com uma aplicação suave

$$A \times (E \times E') \to \underline{E''}, \quad (x, (w, w')) \mapsto (x, \mu_x(\pi_x(w), \pi'_x(w'))) = (x, \mu_x^{\perp}(w, w')),$$

onde $\mu_x^{\perp}$ é o prolongamento de μ_x associado aos produtos internos de E e de E'. Em particular, vemos que, para cada $w \in E$ e $w' \in E'$, é suave a aplicação $A \to E''$, $x \mapsto \mu_x^{\perp}(w, w')$ o que, tendo em conta o resultado precedente, implica que é suave a aplicação $A \to L(E, E'; E'')$, $x \mapsto \mu_x^{\perp}$, e portanto que μ é um morfismo bilinear suave. $\square$

III.8.43 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$, $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ e $\underline{E''} = (E''_x)_{x \in A}$ três fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$, $E'_x \subset E'$ e $E''_x \subset E''$ e $\mu = (\mu_x)_{x \in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ um morfismo bilinear. Suponhamos que $\underline{E}$ e $\underline{E'}$ são fibrados vectoriais triviais, com campos de referenciais $W_1, \ldots, W_m$ e $W'_1, \ldots, W'_n$ respectivamente. Tem-se então que o morfismo bilinear μ é suave se, e só se, para cada j, k, $\mu(W_j, W'_k) = (\mu_x(W_{jx}, W'_{kx})_{x \in A}$ é uma secção suave de $\underline{E''}$.

Dem: A condição necessária é já conhecida, uma vez que os W_j e os W'_k são secções suaves. Suponhamos, reciprocamente, que cada $\mu(W_j, W'_k)$ é uma secção suave de $\underline{E''}$. Podemos considerar o fibrado vectorial trivial de base $(\underline{E} \times \underline{E'})^{\sim}$, que a cada $(x, (w, w')) \in (\underline{E} \times \underline{E'})^{\sim}$ associa a fibra $E_x \times E'_x$, o qual vai admitir o campo de referenciais constituído pelas $m + n$ secções que em cada $(x, (w, w')) \in (\underline{E} \times \underline{E'})^{\sim}$ tomam os valores

$$(W_{1x}, 0), \ldots, (W_{mx}, 0), (0, W'_{1x}), \ldots, (0, W'_{nx}),$$

assim como a secção suave que em cada $(x,(w,w')) \in (\underline{E}\times\underline{E'})^{\sim}$ toma o valor (w,w'). Aplicando III.1.13, concluímos a existência de aplicações suaves $f_1,\ldots,f_m,g_1,\ldots,g_n\colon (\underline{E}\times\underline{E'})^{\sim} \to \mathbb{K}$ definidas por

$$\begin{aligned}(w,w') = f_1(x,(w,w'))(W_{1x},0) + \cdots + f_m(x,(w,w'))(W_{mx},0) + \\ + g_1(x,(w,w'))(0,W'_{1x}) + \cdots + g_n(x,(w,w'))(0,W'_{nx}),\end{aligned}$$

para as quais se tem assim

$$\begin{aligned}w &= f_1(x,(w,w'))W_{1x} + \cdots + f_m(x,(w,w'))W_{mx},\\ w' &= g_1(x,(w,w'))W'_{1x} + \cdots + g_n(x,(w,w'))W'_{nx},\end{aligned}$$

e vemos agora que, para cada $(x,(w,w')) \in (\underline{E}\times\underline{E'})^{\sim}$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(x,(w,w')) &= (x,\mu_x(w,w')) =\\ &= \big(x\,,\sum_{j,k} f_j(x,(w,w'))\,g_k(x,(w,w'))\,\mu_x(W_{j_x},W'_{kx})\big),\end{aligned}$$

o que mostra que $\tilde{\mu}\colon (\underline{E}\times\underline{E'})^{\sim} \to \underline{\tilde{E}''}$ é uma aplicação suave, e portanto, pelo resultado precedente, μ é um morfismo bilinear suave. □

III.8.44 Como exemplos importantes de morfismos bilineares suaves entre fibrados vectoriais temos:

a) Sejam G e E espaços vectoriais reais, o segundo dos quais munido de produto interno, $M\subset G$ uma variedade e $\underline{E}=(E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x\subset E$. Sendo, para cada $x\in M$, $h_x\colon T_x(M)\times E_x \to E_x^{\perp}$ a segunda forma fundamental,

$$h=(h_x)_{x\in M}\colon T(M)\times\underline{E}\to\underline{E}^{\perp}$$

é um morfismo bilinear suave.

b) Sejam G e G' espaços euclidianos, $M\subset G$ e $M'\subset G'$ duas variedades e $f\colon M\to M'$ uma aplicação suave. Sendo, para cada $x\in M$, $\beta(f)_x\colon T_x(M)\times T_x(M)\to T_{f(x)}(M')$ a Hessiana,

$$\beta(f)=(\beta(f)_x)_{x\in M}\colon T(M)\times T(M)\to f^*T(M')$$

é um morfismo bilinear suave.

Dem: a) Uma vez que tem lugar uma aplicação suave $M\to L(E;E)$, que a cada x associa a projecção ortogonal π_x de E sobre E_x, podemos considerar um aberto U de G contendo M e uma aplicação suave $\widehat{\pi}\colon U\to L(E;E)$ tal que $\widehat{\pi}_x=\pi_x$, para cada $x\in M$. Tendo em conta III.8.41, obtemos então uma aplicação suave de M para $L(G,E;E)$ que a cada x associa a aplicação bilinear $(u,w)\mapsto D\widehat{\pi}_x(u)(w)$, aplicação bilinear essa que é um prolongamento de h_x.

b) Sejam U um aberto de G contendo M e $\overline{f}\colon U\to G'$ uma aplicação suave prolongando f. Tendo em conta a conclusão de a), podemos considerar uma aplicação suave $\overline{h}=(\overline{h}_x)_{x\in M}$ de M em $L(G,G;G)$ tal que cada segunda forma fundamental $h_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ seja uma restrição de $\overline{h}_x$. Lembrando a fórmula para a Hessiana em III.8.31,

$$\beta(f)_x(u,v) = \pi'_{f(x)}(D^2\overline{f}_x(u,v) + D\overline{f}_x(h_x(u,v))),$$

obtemos uma aplicação suave de M em $L(G,G;G')$ que a cada $x \in M$ associa a aplicação bilinear

$$(u,v) \mapsto \pi'_{f(x)}(D^2\overline{f}_x(u,v) + D\overline{f}_x(\overline{h}_x(u,v))),$$

que prolonga $\beta(f)_x$. □

III.8.45 Sejam G um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$ um conjunto arbitrário, E, E' e E'' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita, munidos de produto interno e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$, $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ e $\underline{E''} = (E''_x)_{x\in A}$ três fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$, $E'_x \subset E'$ e $E''_x \subset E''$, e consideremos as respectivas segundas formas fundamentais $h_x: T_x(A) \times E_x \to E_x^\perp$, $h'_x: T_x(A) \times E'_x \to E'^\perp_x$ e $h''_x: T_x(A) \times E''_x \to E''^\perp_x$. Se $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ é um morfismo bilinear suave, tem lugar, para cada $x \in A$, uma aplicação linear

$$\nabla\mu_x: T_x(A) \to L(E_x, E'_x; E''_x)$$

(a *derivada covariante* de μ) definida pela condição de se ter, qualquer que seja a aplicação suave $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_x)_{x\in A}: A \to L(E,E';E'')$ com cada μ_x restrição de $\overline{\mu}_x$,

$$\begin{aligned}
&\nabla\mu_x(u)(w,w') = \\
&= D\overline{\mu}_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(h_x(u,w),w') + \overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w')) - h''_x(u,\mu_x(w,w')) = \\
&= \pi''_x\big(D\overline{\mu}_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(h_x(u,w),w') + \overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w'))\big),
\end{aligned}$$

onde π''_x é a projecção ortogonal de E'' sobre E''_x. Tem-se além disso, para a correspondente aplicação suave $\tilde{\mu}: (\underline{E} \times \underline{E'})^\sim \to \underline{\tilde{E}''}$ entre os espaços totais, definida por $\tilde{\mu}(x,(w,w')) = (x,\mu_x(w,w'))$,

$$\begin{aligned}
&D\tilde{\mu}_{(x,(w,w'))}(u,(h_x(u,w),h'_x(u,w'))) = \\
&= (u, \nabla\mu_x(u)(w,w') + h''_x(u,\mu_x(w,w'))).
\end{aligned}$$

Dem: Sendo $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_x)_{x\in A}: A \to L(E,E';E'')$ um prolongamento suave do morfismo bilinear μ, ficamos evidentemente com uma aplicação linear $\nabla\mu_x$ de $T_x(A)$ para $L(E_x,E'_x;E'')$, definida por

$$\begin{aligned}
&\nabla\mu_x(u)(w,w') = \\
&= D\overline{\mu}_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(h_x(u,w),w') + \overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w')) - h''_x(u,\mu_x(w,w'))
\end{aligned}$$

pelo que, para concluirmos que temos uma aplicação linear bem definida $\nabla\mu_x: T_x(A) \to L(E_x,E'_x;E''_x)$, tudo o que temos que mostrar é que a expressão do segundo membro desta igualdade pertence a E''_x e não depende da escolha do prolongamento suave $\overline{\mu}$ de μ. Ora, uma vez que, para a correspondente aplicação suave $\tilde{\mu}$: $(\underline{E} \times \underline{E'})^{\sim} \to \underline{\tilde{E}''}$, se tem

$$\tilde{\mu}(x,(w,w')) = (x,\mu_x(w,w')) = (x,\overline{\mu}_x(w,w')),$$

obtemos, por derivação no ponto $(x,(w,w'))$ na direcção do vector tangente $(u,(h_x(u,w),h'_x(u,w'))) \in T_{(x,(w,w'))}(\underline{E} \times \underline{E'})$ e tendo em conta III.3.19,

$$\begin{aligned}&(u, D\overline{\mu}_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(h_x(u,w),w') + \overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w'))) =\\ &= D\tilde{\mu}_{(x,(w,w'))}(u,(h_x(u,w),h'_x(u,w'))) \in T_{(x,\mu_x(w,w'))}(\underline{E''}),\end{aligned}$$

donde, por um lado, mais uma vez pelo mesmo resultado,

$$D\overline{\mu}_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(h_x(u,w),w') + \overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w')) - h''_x(u,\mu_x(w,w')) \in E''_x$$

e, por outro lado, o valor

$$D\overline{\mu}_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(h_x(u,w),w') + \overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w'))$$

não depende do prolongamento suave considerado. Por fim, o facto de se ter também

$$\nabla\mu_x(u)(w,w') = \pi''_x\big(D\overline{\mu}_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(h_x(u,w),w') + \overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w'))\big)$$

resulta de se ter

$$\begin{aligned}&D\overline{\mu}_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(h_x(u,w),w') + \overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w')) =\\ &= \nabla\mu_x(u)(w,w') + h''_x(u,\mu_x(w,w')),\end{aligned}$$

com $\nabla\mu_x(u)(w,w') \in E''_x$ e $h''_x(u,\mu_x(w,w')) \in E''^{\perp}_x$. □

III.8.46 **(Nota)** Como no caso dos morfismos lineares, a igualdade

$$\begin{aligned}&D\tilde{\mu}_{(x,(w,w'))}(u,(h_x(u,w),h'_x(u,w'))) =\\ &= (u,\nabla\mu_x(u)(w,w') + h''_x(u,\mu_x(w,w'))),\end{aligned}$$

estabelecida no resultado precedente, para além de ter servido para mostrar que a definição da derivada covariante de um morfismo bilinear não depende do prolongamento considerado e conduz a uma aplicação bilinear com valores na fibra, permite também mostrar que a derivada covariante de um morfismo bilinear suave não se altera quando substituímos os espaços ambientes das fibras, dos fibrados vectoriais domínio ou do de chegada, por subespaços vectoriais que ainda contenham as fibras.

III.8.47 Também como no caso dos morfismos lineares, se G é um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$ e E, E' e E'' são espaços vectoriais reais ou complexos, então, considerando os fibrados vectoriais constantes E_A, E'_A e E''_A, um morfismo bilinear suave $\mu = (\mu_x)_{x\in A}$: $E_A \times E'_A \to E''_A$ é o mesmo que uma aplicação suave $A \to L(E,E';E'')$ e, para um tal morfismo bilinear suave, a derivada covariante $\nabla\mu_x$ não depende dos produtos internos que se considerem em E, E' e E'' e é dada por

$$\nabla\mu_x(u)(w,w') = D\mu_x(u)(w,w').$$

Em particular, se $\mu: E \times E' \to E''$ é uma aplicação bilinear, o morfismo bilinear constante $\mu_A: E_A \times E'_A \to E''_A$ é um morfismo bilinear suave com derivada covariante nula em cada ponto.

III.8.48 Em geral, se $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ é um morfismo bilinear suave, com os espaços ambientes das fibras munidos de produto interno, diz-se que μ é um *morfismo bilinear paralelo* se se tem $\nabla\mu_x(u) = 0$, quaisquer que sejam $x \in A$ e $u \in T_x(A)$. Tal como no caso dos morfismos lineares, esta condição é equivalente à de se ter

$$D\tilde{\mu}_{(x,(w,w'))}(u,(h_x(u,w),h'_x(u,w'))) = (u, h''_x(u,\mu_x(w,w'))),$$

quaisquer que sejam $x \in A$, $u \in T_x(A)$, $w \in E_x$ e $w' \in E'_x$.

III.8.49 **(Regra de Leibnitz)** Seja $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ um morfismo bilinear suave, com os espaços ambientes das fibras munidos de produto interno, e sejam $W = (W_x)_{x\in A}$ e $W' = (W'_x)_{x\in A}$ secções suaves de $\underline{E}$ e $\underline{E'}$, respectivamente. Tem-se então, para a secção suave $\mu(W,W')$ de $\underline{E''}$,

$$\nabla\mu(W,W')_x(u) = \nabla\mu_x(u)(W_x,W'_x) + \mu_x(\nabla W_x(u),W'_x) + \mu_x(W_x,\nabla W'_x(u)).$$

Dem: Seja $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_x)_{x\in A}$ uma aplicação suave de A em $L(E,E';E'')$ tal que cada μ_x seja uma restrição de $\overline{\mu}_x$. Vem então

$$\begin{aligned}\nabla\mu(W,W')_x(u) &= D\overline{\mu}(W,W')_x(u) - h''_x(u,\mu_x(W_x,W'_x)) = \\ &= D\overline{\mu}_x(u)(W_x,W'_x) + \overline{\mu}_x(DW_x(u),W'_x) + \\ &\quad + \overline{\mu}_x(W_x,DW'_x(u)) - h''_x(u,\mu_x(W_x,W'_x)) = \\ &= D\overline{\mu}_x(u)(W_x,W'_x) + \mu_x(\nabla W_x(u),W'_x) + \\ &\quad + \overline{\mu}_x(h_x(u,W_x),W'_x) + \mu_x(W_x,\nabla W'_x(u)) + \\ &\quad + \overline{\mu}_x(W_x,h'_x(u,W'_x)) - h''_x(u,\mu_x(W_x,W'_x)) = \\ &= \nabla\mu_x(u)(W_x,W'_x) + \mu_x(\nabla W_x(u),W'_x) + \mu_x(W_x,\nabla W'_x(u)).\end{aligned}$$

□

III.8.50 **(Corolário)** Nas condições anteriores, um morfismo bilinear suave $\mu = (\mu_x)_{x\in A}$ é paralelo se, e só se, quaisquer que sejam as secções suaves $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$ e $W' = (W'_x)_{x\in A}$ de $\underline{E'}$, $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$, tem-se

$$\nabla\mu(W,W')_{x_0}(u) = \mu_{x_0}(\nabla W_{x_0}(u),W'_{x_0}) + \mu_{x_0}(W_{x_0},\nabla W'_{x_0}(u)).$$

Dem: A condição necessária é uma consequência imediata da fórmula de Leibnitz precedente, tal como o é a condição suficiente, se nos lembrarmos de que, dados $w \in E_{x_0}$ e $w' \in E'_{x_0}$, existem sempre secções suaves $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$ e $W' = (W'_x)_{x\in A}$ de $\underline{E'}$ tais que $W_{x_0} = w$ e $W'_{x_0} = w'$ (cf. III.1.20). □

III.8.51 **(Corolário)** Sejam G é um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$, E um espaço vectorial, real ou complexo, munido de produto interno, e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Sendo, para cada $x \in A$, $\mu_x: E_x \times E_x \to \mathbb{K}$ a aplicação bilinear real restrição do produto interno de E, tem-se então que $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E} \to \mathbb{K}_A$ é um morfismo bilinear suave paralelo.

Dem: Apesar de podemos apresentar uma demonstração directa, a partir da definição, podemos, depois de reparar que a suavidade de μ resulta de podemos considerar um prolongamento constante, igual ao produto interno de E, aplicar o resultado precedente, lembrando a regra de Leibnitz na alínea c) de III.3.4. □

III.8.52 Seja $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$ um morfismo bilinear suave, onde os espaços ambientes das fibras estão munidos de produto interno. Tem-se então:

a) Se $\underline{F} = (F_x)_{x\in A}$ e $\underline{F'} = (F'_x)_{x\in A}$ são outros fibrados vectoriais, com os espaços ambientes das fibras munidos de produto interno, e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{F} \to \underline{E}$ e $\lambda' = (\lambda'_x)_{x\in A}: \underline{F'} \to \underline{E'}$ são morfismos lineares suaves, então, para o correspondente morfismo bilinear suave

$$\mu \circ (\lambda \times \lambda') = (\mu_x \circ (\lambda_x \times \lambda'_x))_{x\in A}: \underline{F} \times \underline{F'} \to \underline{E''},$$

tem-se

$$\nabla(\mu \circ (\lambda \times \lambda'))_x(u) = \nabla\mu_x(u) \circ (\lambda_x \times \lambda'_x) + \\ + \mu_x \circ (\nabla\lambda_x(u) \times \lambda'_x) + \mu_x \circ (\lambda_x \times \nabla\lambda'_x(u)),$$

por outras palavras,

$$\nabla(\mu \circ (\lambda \times \lambda'))_x(u)(w, w') = \nabla\mu_x(u)(\lambda_x(w), \lambda'_x(w')) + \\ + \mu_x(\nabla\lambda_x(u)(w), \lambda'_x(w')) + \mu_x(\lambda_x(w), \nabla\lambda'_x(u)(w')).$$

b) Se $\underline{F''} = (F''_x)_{x\in A}$ é outro fibrado vectorial e $\lambda'' = (\lambda''_x)_{x\in A}: \underline{E''} \to \underline{F''}$ é um morfismo linear suave, então, para o correspondente morfismo bilinear suave

$$\lambda'' \circ \mu = (\lambda''_x \circ \mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{F''},$$

tem-se

$$\nabla(\lambda'' \circ \mu)_x(u) = \nabla\lambda''_x(u) \circ \mu_x + \lambda''_x \circ (\nabla\mu_x(u)),$$

por outras palavras

$$\nabla(\lambda'' \circ \mu)_x(u)(w, w') = \nabla\lambda''_x(u)(\mu_x(w, w')) + \lambda''_x(\nabla\mu_x(u)(w, w')).$$

Dem: Notemos h_x, h'_x, h''_x, $\widehat{h}_x$, $\widehat{h}'_x$ e $\widehat{h}''_x$ as segundas formas fundamentais dos fibrados vectoriais $\underline{E}$, $\underline{E'}$, $\underline{E''}$, $\underline{F}$, $\underline{F'}$ e $\underline{F''}$, respectivamente. Usando as notações de III.8.34, podemos escrever, quanto a a),

$$\begin{aligned}
&\nabla(\mu\circ(\lambda\times\lambda'))_x(u)(w,w') = \\
&= D(\overline{\mu}\circ(\overline{\lambda}\times\overline{\lambda'}))_x(u)(w,w') + \overline{\mu}_x(\overline{\lambda}_x(\widehat{h}_x(u,w)),\overline{\lambda'}_x(w')) + \\
&\quad + \overline{\mu}_x(\overline{\lambda}_x(w),\overline{\lambda'}_x(\widehat{h}'_x(u,w'))) - h''_x(u,\lambda_x(\lambda_x(w),\lambda'_x(w'))) = \\
&= D\overline{\mu}_x(u)(\lambda_x(w),\lambda'_x(w')) + \overline{\mu}_x(D\overline{\lambda}_x(u)(w),\lambda'_x(w')) + \\
&\quad + \overline{\mu}_x(\lambda_x(w),D\overline{\lambda'}_x(u)(w')) + \overline{\mu}_x(\overline{\lambda}_x(\widehat{h}_x(u,w)),\overline{\lambda'}_x(w')) + \\
&\quad + \overline{\mu}_x(\overline{\lambda}_x(w),\overline{\lambda'}_x(\widehat{h}'_x(u,w'))) - h''_x(u,\mu_x(\lambda_x(w),\lambda'_x(w'))) = \\
&= \nabla\mu_x(u)(\lambda_x(w),\lambda'_x(w')) - \overline{\mu}_x(h_x(u,\lambda_x(w)),\lambda'_x(w'_x)) - \\
&\quad - \overline{\mu}_x(\lambda_x(w_x),h'_x(u,\lambda'_x(w'_x))) + \overline{\mu}_x(D\overline{\lambda}_x(u)(w),\lambda'_x(w')) + \\
&\quad + \overline{\mu}_x(\lambda_x(w),D\overline{\lambda'}_x(u)(w')) + \overline{\mu}_x(\overline{\lambda}_x(\widehat{h}_x(u,w)),\lambda'_x(w')) + \\
&\quad + \overline{\mu}_x(\lambda_x(w),\overline{\lambda'}_x(\widehat{h}'_x(u,w'))) = \\
&= \nabla\mu_x(u)(\lambda_x(w),\lambda'_x(w')) + \mu_x(\nabla\lambda_x(u)(w),w') + \mu_x(w,\nabla\lambda'_x(u)(w'))
\end{aligned}$$

e, quanto a b),

$$\begin{aligned}
&\nabla(\lambda''\circ\mu)_x(u)(w,w') = \\
&= D(\overline{\lambda''}\circ\overline{\mu})_x(u)(w,w') + \overline{\lambda''}_x(\overline{\mu}_x(h_x(u,w),w')) + \\
&\quad + \overline{\lambda''}_x(\overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w'))) - \widehat{h}''_x(u,\lambda''_x(\mu_x(w,w'))) = \\
&= D\overline{\lambda''}_x(u)(\mu_x(w,w')) + \overline{\lambda''}_x(D\overline{\mu}_x(u)(w,w')) + \\
&\quad + \overline{\lambda''}_x(\overline{\mu}_x(h_x(u,w),w')) + \overline{\lambda''}_x(\overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w'))) - \\
&\quad - \widehat{h}''_x(u,\lambda''_x(\mu_x(w,w'))) = \\
&= \nabla\lambda''_x(u)(\mu_x(w,w')) - \overline{\lambda''}_x(h''_x(u,\mu_x(w,w'))) + \\
&\quad + \overline{\lambda''}_x(D\overline{\mu}_x(u)(w,w')) + \overline{\lambda''}_x(\overline{\mu}_x(h_x(u,w),w')) + \\
&\quad + \overline{\lambda''}_x(\overline{\mu}_x(w,h'_x(u,w'))) = \\
&= \nabla\lambda''_x(u)(\mu_x(w,w')) + \lambda''_x(\nabla\mu_x(u)(w,w')).
\end{aligned}$$
□

III.8.53 Sejam $\underline{E}=(E_x)_{x\in A}$, $\underline{E'}=(E'_x)_{x\in A}$ e $\underline{E''}=(E''_x)_{x\in A}$ fibrados vectoriais de base A, com $E_x\subset E$, $E'_x\subset E'$ e $E''_x\subset E''$, onde E, E' e E'' estão munidos de produto interno. Tem-se então:

a) Se $\lambda=(\lambda_x)_{x\in A}$ e $\mu=(\mu_x)_{x\in A}$ são morfismos bilineares suaves $\underline{E}\times\underline{E'}\to\underline{E''}$ e $c\in\mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned}
\nabla(\lambda+\mu)_x(u) &= \nabla\lambda_x(u)+\nabla\mu_x(u),\\
\nabla(\mathrm{c}\mu)_x(u) &= c\nabla\mu_x(u).
\end{aligned}$$

b) (Regra de Leibnitz) Se $\mu=(\mu_x)_{x\in A}$ é um morfismo linear suave $\underline{E}\times\underline{E'}\to\underline{E''}$ e $f\colon A\to\mathbb{K}$ é uma aplicação suave, então

$$\nabla(f\mu)_x(u) = Df_x(u)\,\mu_x + f(x)\,\nabla\mu_x(u).$$

Dem: Tal como no caso dos morfismos lineares, trata-se de consequências directas da definição. □

III.8.54 Sejam G e $\widehat{G}$ espaços vectoriais reais de dimensão finita, $A \subset G$ e $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ subconjuntos e $f: \widehat{A} \to A$ uma aplicação suave. Sejam E, E' e E'' espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita, munidos de produto interno, e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$, $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ e $\underline{E''} = (E''_x)_{x\in A}$ fibrados vectoriais de base A, com $E_x \subset E$, $E'_x \subset E'$ e $E''_x \subset E''$. Se $\mu = (\mu_x)_{x\in A}$: $\underline{E} \to \underline{E'}$ é um morfismo bilinear suave, tem-se, para cada $y \in \widehat{A}$ e $v \in T_y(\widehat{A})$,

$$\nabla(f^*\mu)_y(v) = \nabla\mu_{f(y)}(Df_y(v)).$$

Dem: Tal como no caso dos morfismos lineares, trata-se de uma consequência simples da definição, tendo em conta o teorema de derivação da função composta. □

§9. Estruturas quase complexas e aplicações holomorfas

III.9.1 Sejam G e E espaços vectoriais reais de dimensão finita, $A \subset G$ um conjunto e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Chama-se *estrutura quase complexa* de $\underline{E}$ a um morfismo linear $J = (J_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E}$ tal que cada $J_x: E_x \to E_x$ seja uma estrutura complexa do espaço vectorial real E_x (cf. I.1.13).

Nas condições anteriores, se $\widehat{A} \subset \widehat{G}$ é outro conjunto e $f: \widehat{A} \to A$ é uma aplicação suave, tem lugar uma estrutura quase complexa $f^*J = (J_{f(y)})_{y\in\widehat{A}}$ do fibrado vectorial imagem recíproca $f^*\underline{E}$, que é a que se considera implicitamente, na ausência de informação em contrário. Como habitualmente, um caso particular importante é aquele em que $\widehat{A} \subset A$ e f é a inclusão, caso em que ficamos com uma estrutura quase complexa $J_{/\widehat{A}}$ de $\underline{E}_{/\widehat{A}}$.

III.9.2 Como exemplo trivial de estrutura quase complexa de um fibrado vectorial temos aquele em que $A \subset G$, E é um espaço vectorial complexo e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ é um fibrado vectorial complexo (ou seja, um fibrado vectorial real com cada E_x subespaço vectorial complexo de E — cf. III.1.24); sendo, para cada $x \in A$, $J_x: E_x \to E_x$ a restrição da estrutura complexa de E, ficamos com uma estrutura quase complexa $J = (J_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$ que é a que se considera, salvo indicação em contrário, nesta situação. Observe-se que esta estrutura quase complexa é trivialmente *suave* (isto é, é um morfismo linear suave).

III.9.3 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais reais, munidos de estruturas quase complexas $J = (J_x)_{x\in A}$ e $J' = (J'_x)_{x\in A}$, respectivamente. Dizemos que um morfismo linear $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ é um *morfismo linear complexo* se, para cada $x \in A$, a aplicação linear real $\lambda_x: E_x \to E'_x$ é mesmo uma aplicação linear complexa, ou seja, verifica a

condição $J'_x \circ \lambda_x = \lambda_x \circ J_x$.
Por exemplo, no caso em que $A \subset G$, E e E' são espaços vectoriais complexos e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ são fibrados vectoriais complexos, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, sobre os quais se consideram as estruturas quase complexas induzidas pelas estruturas de E e E', os morfismos lineares complexos $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E'}$ são exactamente os morfismos lineares, no sentido dos fibrados vectoriais complexos.

O que temos estado a examinar leva-nos a olhar intuitivamente para os fibrados vectoriais reais munidos de estruturas complexas como sendo algo que joga um papel semelhante aos fibrados vectoriais complexos. Os resultados simples que enunciamos a seguir apontam no mesmo sentido.

III.9.4 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$, com $E_x \subset E$, um fibrado vectorial real de dimensão $n = 2p$, munido de uma estrutura quase complexa suave $J = (J_x)_{x\in A}$. Chamamos *campo de referenciais complexo* de $\underline{E}$ a um sistema de p secções suaves $W_1, \dots, W_p$ de $\underline{E}$ tal que, para cada $x \in A$, $W_{1x}, \dots, W_{p_x}$ seja uma base de E_x, enquanto espaço vectorial complexo, ou, o que é o mesmo, tal que as secções suaves $W_1, J(W_1), \dots, W_p, J(W_p)$ constituam um campo de referenciais de $\underline{E}$. Quando existe um tal campo de referenciais complexo, dizemos que $\underline{E}$ é um *fibrado vectorial* $\mathbb{C}$*-trivial* (é claro que $\underline{E}$ é então, em particular, um fibrado vectorial trivial, no sentido real).
Por exemplo, no caso em que $A \subset G$, E é um espaço vectorial complexo e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ é um fibrado vectorial complexo, com $E_x \subset E$, sobre o qual se considera a estrutura quase complexa induzida pela estrutura de E, um campo de referenciais complexo não é mais do que um campo de referenciais no sentido dos fibrados vectoriais complexos.

III.9.5 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$, com $E_x \subset E$, um fibrado vectorial real de dimensão $n = 2p$, munido de uma estrutura quase complexa suave $J = (J_x)_{x\in A}$. Para cada $x_0 \in A$, existe então um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que $\underline{E}_{/U}$ seja um fibrado vectorial $\mathbb{C}$-trivial.

Dem: Seja $w_1, \dots, w_p$ uma base de E_{x_0}, enquanto espaço vectorial complexo definido por J_{x_0}. Sejam $W_1, \dots, W_p$ secções suaves de $\underline{E}$ tais que $W_{j_{x_0}} = w_j$ (cf. III.1.20). podemos então considerar as secções suaves $W_1, J(W_1), , \dots,$ $W_p, J(W_p)$ de $\underline{E}$ que em x_0 tomam os valores linearmente independentes $w_1, J_{x_0}(w_1), \dots, w_p, J_{x_0}(w_p)$ pelo que, uma vez que o conjunto $\Omega^{2p}(E)$ dos sistemas de $2p$ vectores linearmente independentes de E é aberto em E^p, concluímos a existência de um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, $W_{1x}, J_x(W_{1x}), \dots, W_{p_x}, J_x(W_{p_x})$ seja linearmente independente, e portanto uma base de E_x, o que implica que $W_{1/U}, \dots, W_{p/U}$ é um campo de referenciais complexo de $\underline{E}$. □

III.9.6 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E}' = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais reais, munidos de estruturas quase complexas suaves $J = (J_x)_{x\in A}$ e $J' = (J'_x)_{x\in A}$, respectivamente e seja $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E}'$ um morfismo linear complexo. Se $W_1, \ldots, W_p$ é um campo de referenciais complexo de $\underline{E}$, tem-se que λ é um morfismo linear suave se, e só se, cada secção $\lambda(W_j)$ de $\underline{E}'$ é suave.

Dem: A condição suficiente resulta de aplicar III.8.11 ao campo de referenciais $W_1, J(W_1), \ldots, W_p, J(W_p)$ de $\underline{E}$ porque cada $\lambda(J(W_j)) = J'(\lambda(W_j))$ é também uma secção suave de $\underline{E}'$. A condição necessária é uma consequência do facto de um morfismo linear suave aplicar secções suaves em secções suaves. □

Quando o espaço ambiente dum fibrado vectorial, munido duma estrutura quase complexa, é um espaço euclidiano, podemos considerar a derivada covariante da estrutura quase complexa, enquanto morfismo linear. O resultado seguinte estabelece propriedades simples desta derivada covariante.

III.9.7 Sejam G e E espaços vectoriais reais de dimensão finita, o segundo dos quais munido de produto interno, $A \subset G$ um conjunto e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, munido de uma estrutura quase complexa suave $J = (J_x)_{x\in A}$. Para cada $x \in A$ e $u \in T_x(A)$, a derivada covariante $\nabla J_x(u)\colon E_x \to E_x$ é então antilinear, isto é, verifica

$$\nabla J_x(u)(J_x(w)) = -J_x(\nabla J_x(u)(w)).$$

Além disso, se a estrutura quase complexa é compatível com o produto interno, isto é, se cada $J_x\colon E_x \to E_x$ é um isomorfismo ortogonal, então, para cada $x \in A$, e $u \in T_x(A)$, a derivada covariante $\nabla J_x(u)\colon E_x \to E_x$ é antiautoadjunta, isto é, verifica

$$\langle \nabla J_x(u)(w), w' \rangle = -\langle w, \nabla J_x(u)(w') \rangle.$$

Dem: Uma vez que, para cada $x \in A$, tem-se $J_x \circ J_x = -Id_{E_x}$, obtemos, por derivação covariante de ambos os membros da identidade $J \circ J = -Id_{\underline{E}}$, utilizando III.8.25 e III.8.20,

$$(\nabla J_x(u)) \circ J_x + J_x \circ (\nabla J_x(u)) = 0$$

e, aplicando ambos os membros em w, obtemos a primeira fórmula. Suponhamos agora que a estrutura quase complexa é compatível com o produto interno e sejam $x_0 \in A$, $u \in T_{x_0}(A)$ e $w, w' \in E_{x_0}$. Consideremos secções suaves W e W' de $\underline{E}$ tais que $W_{x_0} = w$ e $W'_{x_0} = w'$. Uma vez que, para cada $x \in A$, tem-se

$$\langle W_x, W'_x \rangle = \langle J_x(W_x), J_x(W'_x) \rangle,$$

obtemos, derivando ambos os membros em x_0 na direcção de u e tendo em conta III.3.4 e III.8.23,

$$\begin{aligned}\langle\nabla W_{x_0}(u),w'\rangle+\langle w,\nabla W'_{x_0}(u)\rangle &= \langle\nabla J(W)_{x_0}(u),J_{x_0}(w')\rangle+\langle J_{x_0}(w),\nabla J(W')_{x_0}(u)\rangle=\\ &=\langle\nabla J_{x_0}(u)(w),J_{x_0}(w')\rangle+\langle J_{x_0}(\nabla W_{x_0}(u)),J_{x_0}(w')\rangle+\\ &\quad+\langle J_{x_0}(w),\nabla J_{x_0}(u)(w')\rangle+\langle J_{x_0}(w),J_{x_0}(\nabla W'_{x_0}(u))\rangle=\\ &=\langle\nabla J_{x_0}(u)(w),J_{x_0}(w')\rangle+\langle\nabla W_{x_0}(u),w'\rangle+\\ &\quad+\langle J_{x_0}(w),\nabla J_{x_0}(u)(w')\rangle+\langle w,\nabla W'_{x_0}(u)\rangle,\end{aligned}$$

donde, tendo em conta o resultado precedente,

$$\begin{aligned}0&=\langle\nabla J_{x_0}(u)(w),J_{x_0}(w')\rangle+\langle J_{x_0}(w),\nabla J_{x_0}(u)(w')\rangle=\\ &=\langle J_{x_0}(\nabla J_{x_0}(u)(w)),-w'\rangle+\langle J_{x_0}(w),\nabla J_{x_0}(u)(w')\rangle=\\ &=\langle\nabla J_{x_0}(u)(J_{x_0}(w)),w'\rangle+\langle J_{x_0}(w),\nabla J_{x_0}(u)(w')\rangle,\end{aligned}$$

pelo que, subsituindo w por $-J_{x_0}(w)$ na igualdade anterior, obtemos finalmente

$$0=\langle\nabla J_{x_0}(u)(w),w'\rangle+\langle w,\nabla J_{x_0}(u)(w')\rangle.\qquad\square$$

III.9.8 **(A dimensão real 2)** Nas condições anteriores, se a estrutura quase complexa é compatível com o produto interno e se cada E_x tem dimensão real 2, então o morfismo linear $J=(J_x)_{x\in A}\colon \underline{E}\to\underline{E}$ é paralelo, isto é, tem-se $\nabla J_x(u)=0$, para cada $x\in A$ e $u\in T_x(A)$.

Dem: Começamos por reparar que, dado $w\in E_x$, o resultado precedente permite escrever

$$\langle\nabla J_x(u)(w),w\rangle=-\langle w,\nabla J_x(u)(w)\rangle=-\langle\nabla J_x(u)(w),w\rangle,$$

donde $\langle\nabla J_x(u)(w),w\rangle=0$, e

$$\begin{aligned}\langle\nabla J_x(u)(w),J_x(w)\rangle&=-\langle w,\nabla J_x(u)(J_x(w))\rangle=-\langle\nabla J_x(u)(J_x(w)),w\rangle=\\ &=\langle J_x(\nabla J_x(u)(w)),w\rangle=-\langle\nabla J_x(u)(w),J_x(w)\rangle,\end{aligned}$$

donde $\langle\nabla J_x(u)(w),J_x(w)\rangle=0$. Se $w=0$, tem-se, é claro, $\nabla J_x(u)(w)=0$ e, se $w\neq 0$, $w,J_x(w)$ é um sistema ortogonal de vectores não nulos de E_x (cf. I.2.8) pelo que as duas igualdade anteriores mostram que $\nabla J_x(u)(w)$ é um vector de E_x ortgonal a dois vectores de uma base de E_x, portanto ortogonal a E_x, o que implica que $\nabla J_x(u)(w)=0$. □

O resultado precedente era intuitivamente previsível, dada a ideia que os morfismos lineares paralelos são aqueles que são “moralmente” constantes, uma vez que, como se viu em I.4.24, para cada $x\in A$ existem duas, e só duas estruturas complexas compatíveis de E_x, uma associada a cada uma das orientações. O resultado seguinte mostra a relação entre a suavidade da estrutura quase complexa e a da orientação que a determina.

III.9.9 Sejam $A\subset G$, E um espaço euclidiano e $\underline{E}=(E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial de dimensão 2, munido de uma orientação $\alpha=(\alpha_x)_{x\in A}$, e seja, para cada $x \in A$, $J_x\colon E_x \to E_x$ a única estrutura complexa compatível com o produto interno cuja orientação associada seja α_x (cf. I.4.24). Tem-se então que a estrutura quase complexa $J = (J_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$ é suave se, e só se, a orientação α é suave.

Dem: Comecemos por supor que a estrutura quase complexa é suave. Para cada $x_0 \in A$ podemos considerar um aberto U de A, com $x_0 \in U$ tal que exista uma secção suave $W = (W_x)_{x\in U}$ de $\underline{E}_{/U}$ que nunca se anule (a primeira secção de um campo de referenciais). Tem-se então que $J_{/U}(W) = (J_x(W_x))_{x\in U}$ é outra secção suave de $\underline{E}_{/U}$ com a propriedade de, para cada $x \in U$, $W_x, J_x(W_x)$ ser uma base directa de E_x, o que mostra que a orientação $\alpha = (\alpha_x)_{x\in A}$ é suave. Suponhamos, reciprocamente, que esta orientação é suave. Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Seja U um aberto de A, com $x_0 \in U$, tal que $\underline{E}_{/U}$ admita um campo de referenciais ortonormado W_1, W_2. Tendo em conta III.2.5, podemos já supor, se necessário substituindo U por um aberto mais pequeno e substituindo eventualmente W_2 por $-W_2$, que, para cada $x \in U$, a base ortonormada W_{1x}, W_{2x} de E_x é directa. Tendo em conta a caracterização de J_x em I.4.24, tem-se então $J_x(W_{1x}) = W_{2x}$, e portanto também $J_x(W_{2x}) = -W_{1x}$, pelo que, por III.8.11, $J_{/U} = (J_x)_{x\in U}$ é um morfismo linear suave. O facto de a suavidade de um morfismo linear ser uma questão local implica finalmente que $J = (J_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E}$ é um morfismo linear suave. □

III.9.10 Sejam G um espaço vectorial real e $M \subset G$ uma variedade sem bordo. Chama-se *estrutura quase complexa* de M a uma estrutura quase complexa $J = (J_x)_{x\in M}$ do fibrado vectorial tangente $T(M)$. A uma variedade sem bordo munida de uma estrutura quase complexa também se dá o nome de *variedade quase complexa*.

III.9.11 Nas condições anteriores, se U é um aberto de M, vem $T(U) = T(M)_{/U}$, pelo que a variedade U fica com uma estrutura quase complexa induzida que é a que se considera implicitamente.

III.9.12 Sejam $M \subset G$ e $M' \subset G'$ duas variedades sem bordo munidas de estruturas quase complexas J e J'. Diz-se que uma aplicação $f\colon M \to M'$ é *holomorfa* se f é suave e, para cada $x \in M$, $Df_x\colon T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$ é uma linear complexa, isto é, $Df\colon T(M) \to f^*T(M')$ é um morfismo linear complexo.

São naturalmente válidas as propriedades functoriais naturais: Se M está munida de uma estrutura quase complexa, então $Id_M\colon M \to M$ é holomorfa; Se M, M' e M'' estão munidas de estruturas quase complexas e $f\colon M \to M'$ e $g\colon M' \to M''$ são holomorfas, então $g \circ f\colon M \to M''$ é holomorfa.

Diz-se que $f\colon M \to M'$ é um *difeomorfismo holomorfo* se f é um difeomorfismo e uma aplicação holomorfa; é então imediato que o difeomorfismo inverso $f^{-1}\colon M' \to M$ é também uma aplicação holomorfa.

III.9.13 Quando E e E' são espaços vectoriais complexos e $U \subset E$ e $U' \subset E'$ são abertos, tem-se que $T(U) = E_U$ e $T(U') = E'_{U'}$ estão munidos naturalmente das estruturas quase complexas constantes e uma aplicação $f: U \to U'$ é holomorfa (respectivamente é um difeomorfismo holomorfo), no sentido precedente, se, e só se, ela é holomorfa (respectivamente é um difeomorfismo holomorfo), no sentido referido em I.6.19 (respectivamente em I.8.4).

III.9.14 Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo munida de uma estrutura quase complexa $J = (J_x)_{x \in M}$. Dado $x_0 \in M$, dizemos que M é uma *variedade holomorfa em* x_0 se existir uma *carta local holomorfa* de M em x_0, isto é, um difeomorfismo holomorfo $\varphi: U \to V$, com U aberto de M contendo x_0 e V aberto num espaço vectorial complexo F de dimensão finita. No caso em que F tem dimensão complexa n também se diz que M tem *dimensão complexa* n em x_0 (o facto de este número estar bem definido resulta de que a dimensão de M em x_0, enquanto variedade real, é então igual a $2n$). Dizemos que M é uma *variedade holomorfa* se é uma variedade holomorfa em cada $x_0 \in M$.

III.9.15 Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo munida de uma estrutura quase complexa $J = (J_x)_{x \in M}$. Se M é uma variedade holomorfa, então a estrutura quase complexa J é suave.

Dem: Seja $x_0 \in M$ arbitrário. Sejam U um aberto de M, com $x_0 \in U$, V um aberto de um espaço vectorial complexo F de dimensão finita e $\varphi: U \to V$ um difeomorfismo holomorfo. Notando $J': F \to F$ a estrutura complexa de F, tem-se assim, para cada $x \in U$, $D\varphi_x \circ J_x = J' \circ D\varphi_x$, donde

$$J_x = (D\varphi_x)^{-1} \circ J' \circ D\varphi_x = D(\varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ J' \circ D\varphi_x.$$

Podemos assim concluir que o morfismo linear $J_{/U}: T(M)_{/U} \to T(M)_{/U}$ é suave, por ser o composto dos morfismos lineares suaves

$$D\varphi: T(M)_{/U} = T(U) \to F_V \quad J'_V: F_V \to F_V \quad \varphi^* D\varphi^{-1}: F_V \to T(U) = T(M)_{/U}.$$

Tendo em conta o facto de a suavidade de um morfismo linear ser uma questão local, deduzimos finalmente que $J: T(M) \to T(M)$ é um morfismo linear suave. □

III.9.16 Um exemplo trivial de variedade holomorfa é um aberto U de um espaço vectorial complexo F (a identidade de U constitui uma carta holomorfa); a sua dimensão complexa é então a dimensão de F enquanto espaço vectorial complexo.

Antes de examinarmos um exemplo menos trivial de variedade holomorfa, examinemos a definição e uma caracterização explícita das projecções estereográficas das esferas sobre os seus espaços tangentes.

III.9.17 **(As projecções esterográficas)** Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e seja $S \subset E$ a hipersuperfície esférica

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Para cada $x_0 \in S$, tem lugar um difeomorfismo $f\colon T_{x_0}(S) \to S \setminus \{-x_0\}$, com $f(0) = x_0$, definido do seguinte modo: Para cada $w \in T_{x_0}(S)$, $f(w)$ é o único elemento de $S \setminus \{-x_0\}$ na recta afim que contém w e $-x_0$, isto é,

$$f(w) = -x_0 + \frac{2}{1 + \|w\|^2}\,(w + x_0).$$

O difeomorfismo inverso $f^{-1}\colon S \setminus \{-x_0\} \to T_{x_0}(S)$ está definido por

$$f^{-1}(x) = -x_0 + \frac{1}{1 + \langle x, x_0\rangle}\,(x + x_0)$$

(diz-se que f^{-1} é a *projecção estereográfica* a partir de $-x_0$).

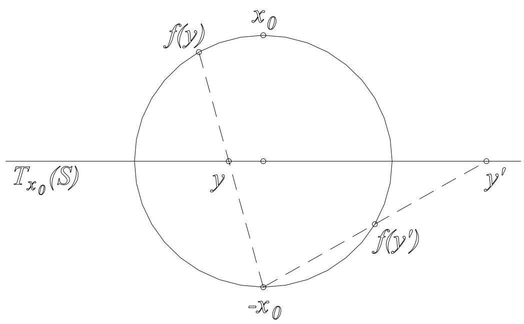

Figura 8

Dem: Seja $w \in T_{x_0}(S)$, portanto $\langle w, x_0\rangle = 0$. Tem-se $w \neq -x_0$ e os elementos da recta afim que contém w e $-x_0$ são os da forma $-x_0 + t(w + x_0)$, com $t \in \mathbb{R}$ pelo que, para mostrar que esta recta afim tem um único elemento em $S \setminus \{-x_0\}$, basta mostrar a existência de um único $t \neq 0$ tal que $-x_0 + t(w + x_0) \in S$, ou seja, tal que

$$\langle -x_0 + t(w + x_0), -x_0 + t(w + x_0)\rangle = 1.$$

Esta condição é equivalente a

$$1 - 2t\langle x_0, w + x_0\rangle + t^2\langle w + x_0, w + x_0\rangle = 1,$$

ou seja, a $-2t + (1 + \|w\|^2)t^2 = 0$, o que mostra que temos realmente uma única solução não nula, nomeadamente $t = \frac{2}{1+\|w\|^2}$. Ficou assim provado que a aplicação f está bem definida e é dada pela fórmula no enunciado, em particular é uma aplicação suave. Para verificarmos que f é uma bijecção de $T_{x_0}(S)$ sobre $S \setminus \{-x_0\}$, basta mostrarmos que, para cada $x \in S \setminus \{-x_0\}$, existe um único elemento da recta afim que contém $-x_0$ e x pertencente a

$T_{x_0}(S)$, ou seja, que existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle -x_0 + t(x + x_0), x_0 \rangle = 0,$$

condição que é equivalente a $-1 + t(\langle x, x_0 \rangle + 1) = 0$. Uma vez que, pela desigualdade de Schwarz (cf. I.2.2), tem-se $\langle x, x_0 \rangle > -1$, a equação anterior admite efectivamente uma única solução, a saber $t = \frac{1}{1+\langle x, x_0 \rangle}$, pelo que ficou provado que f é realmente uma bijecção, assim como a fórmula para f^{-1} no enunciado, que implica, em particular, que f é mesmo um difeomorfismo.

III.9.18 **(A esfera de Riemann)** Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão 3 e seja $S \subset E$ a hipersuperfície esférica

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\},$$

sobre a qual consideramos a orientação canónica, definida em III.2.16. Seja, para cada $x \in S$, $J_x : T_x(S) \to T_x(S)$ a única estrutura complexa do espaço vectorial $T_x(S)$, de dimensão 2, compatível com o produto interno induzido pelo de E e cuja orientação associada seja a referida (cf. I.4.24). Tem-se então que S, com a estrutura quase complexa $(J_x)_{x \in S}$, é uma variedade holomorfa, a que damos o nome de *esfera de Riemann*.
Mais precisamente, para cada $x_0 \in S$, o inverso $f : T_{x_0}(S) \to S \setminus \{-x_0\}$ da projecção estereográfica é um difeomorfismo holomorfo.
Dem: Basta mostrar que o difeomorfismo $f : T_{x_0}(S) \to S \setminus \{0\}$ é holomorfo, isto é, que, para cada $w_0 \in T_{x_0}(S)$, $Df_{w_0} : T_{x_0}(S) \to T_{f(w_0)}(S)$ é uma aplicação linear complexa, relativamente às estruturas complexas J_{x_0} do domínio e $J_{f(w_0)}$ do espaço de chegada. Por derivação, vemos que, para cada $u \in T_{x_0}(S)$,

$$Df_{w_0}(u) = \frac{-4\langle w_0, u \rangle}{(1 + \|w_0\|^2)^2}(w_0 + x_0) + \frac{2}{1 + \|w_0\|^2}\, u.$$

Uma vez que $\langle w_0, x_0 \rangle = \langle u, x_0 \rangle = 0$, resulta daqui que,

$$\begin{aligned}\langle Df_{w_0}(u), Df_{w_0}(u) \rangle &= \frac{16\langle w_0, u \rangle^2}{(1 + \|w_0\|^2)^4}(1 + \|w_0\|^2) - \frac{16\langle w_0, u \rangle}{(1 + \|w_0\|^2)^3}\langle w_0, u \rangle + \\ &\quad + \frac{4}{(1 + \|w_0\|^2)^2}\langle u, u \rangle = \\ &= \frac{4}{(1 + \|w_0\|^2)^2}\,\langle u, u \rangle,\end{aligned}$$

o que mostra que $Df_{w_0} : T_{x_0}(S) \to T_{f(w_0)}(S)$ é uma aplicação linear conforme, com coeficiente de conformalidade $\frac{2}{1+\|w_0\|^2}$. Tendo em conta I.4.25, para verificar que cada isomorfismo $Df_{w_0} : T_{x_0}(S) \to T_{f(w_0)}(S)$ é uma aplicação linear complexa, basta verificar que ele conserva as orientações, por outras palavras, basta verificar que o morfismo linear suave Df, do fibrado vectorial constante de base $T_{x_0}(S)$ e fibra $T_{x_0}(S)$ para o fibrado vectorial $f^*T(S)$ conserva as orientações. Tendo em conta III.8.14, e uma vez que a base $T_{x_0}(S)$ é conexa, basta verificarmos que o isomorfismo $Df_0: T_{x_0}(S) \to T_{x_0}(S)$ conserva as orientações. Ora isso é uma consequência de se ter $Df_0(u) = 2u$. □

III.9.19 Sejam $M \subset G$ e $M' \subset G'$ duas variedades sem bordo, munidas de estruturas quase complexas $(J_x)_{x \in M}$ e $(J'_y)_{y \in M'}$. Pode-se então considerar sobre a variedade sem bordo $M \times M' \subset G \times G'$ uma *estrutura quase complexa produto*, $(J''_{(x,y)})_{(x,y) \in M \times M'}$, definida por $J''_{(x,y)} = J_x \times J'_y$ (por outras palavras, a estrutura de espaço vectorial complexo de $T_{(x,y)}(M \times M')$ não é mais do que o produto das estruturas de espaço vectorial complexo de $T_x(M)$ e $T_y(M')$). Além disso se a variedade M é holomorfa em x_0 e a variedade M' é holomorfa em y_0, então a variedade $M \times M'$ é holomorfa em (x_0, y_0).

Dem: Suponhamos que M e M' são variedades holomorfas em x_0 e y_0 respectivamente. Podemos então considerar abertos U e U' de M e M', com $x_0 \in U$ e $y_0 \in U'$, abertos V e V' de espaços vectorial complexos F e F' de dimensão finita e difeomorfismos holomorfos $\varphi: U \to V$ e $\psi: U' \to V'$ e então o dfeomorfismo $\varphi \times \psi: U \times U' \to V \times V'$ é um difeomorfismo holomorfo, uma vez que $D(\varphi \times \psi)_{(x,y)} = D\varphi_x \times D\psi_y$ é uma aplicação linear complexa, enquanto produto cartesiano de aplicações lineares complexas. Concluímos assim que a variedade $M \times M'$ é holomorfa em (x_0, y_0). □

A definição e resultado anteriores podem ser estendidos naturalmente, com adaptações evidentes, que apenas tornam mais pesada a notação, ao caso do produto de um número finito de variedades quase complexas.
Vamos agora examinar alguns resultados que permitem com frequência reconhecer que certas variedades munidas de estruturas quase complexas são variedades holomorfas.

III.9.20 **(Lema)** Sejam F um espaço vectorial complexo e $M \subset F$ uma variedade sem bordo tal que, para cada $x \in M$, $T_x(M)$ seja um subespaço vectorial complexo de F e seja, para cada $x \in M$, $J_x: T_x(M) \to T_x(M)$ a estrutura complexa restrição da de F. Tem-se então que M é uma variedade holomorfa.

Dem: Fixemos em F um produto interno complexo. Seja $x_0 \in M$ arbitrário. Uma vez que $T_{x_0}(M)$ é um subespaço vectorial complexo de F, podemos considerar a projecção ortogonal $\pi: F \to T_{x_0}(M)$, que vai ser uma aplicação linear complexa, em particular uma aplicação suave. A restrição $\pi_{/M}: M \to T_{x_0}(M)$ é também uma aplicação suave, entre variedades sem bordo, cuja derivada em x_0 e a restrição de π a $T_{x_0}(M)$, portanto a identidade de $T_{x_0}(M)$, que é um isomorfismo, pelo que, pelo teorema da função inversa, vai existir um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que a restrição de π a U é um difeomorfismo de U sobre um aberto V de $T_{x_0}(M)$. Para cada $x \in U$, o isomorfismo $D(\pi_{/A})_x\colon T_x(M) \to T_{x_0}(M)$, sendo a restrição da aplicação linear complexa π ao subespaço vectorial complexo $T_x(M)$ de F, vai ser um isomorfismo complexo e portanto $\pi_{/U}\colon U \to V$ é um difeomorfismo holomorfo. □

III.9.21 Em geral, se $M \subset G$ é uma variedade quase complexa, dizemos que uma variedade sem bordo $M' \subset M$ é uma *subvariedade quase complexa* se, para cada $x \in M'$, $T_x(M')$ é um subespaço vectorial complexo de $T_x(M)$. Considera-se então em M', salvo aviso em contrário, a estrutura quase complexa induzida, definida pela família dos $J'_x\colon T_x(M') \to T_x(M')$ restrições das estruturas complexas $J_x\colon T_x(M) \to T_x(M)$.

III.9.22 Sejam $M \subset G$ uma variedade quase complexa e $M' \subset M$ uma subvariedade quase complexa. Seja $x_0 \in M'$ tal que M seja uma variedade holomorfa em x_0. Tem-se então que M' é também uma variedade holomorfa em x_0.

Dem: Sejam U um aberto de M, com $x_0 \in U$, V um aberto de um espaço vectorial complexo F e $\varphi\colon U \to V$ um difeomorfismo holomorfo. Podemos então considerar o aberto $U' = U \cap M'$ de M', que contém x_0, e o difeomorfismo $\varphi_{/U'}\colon U' \to \varphi(U') \subset F$. Para cada $x \in U'$,

$$T_{\varphi(x)}(\varphi(U')) = D\varphi_x(T_x(U')) = D\varphi_x(T_x(M'))$$

é um subespaço vectorial complexo de F pelo que o lema anterior garante que $\varphi(U')$ é uma variedade holomorfa. Podemos assim considerar um aberto V' de $\varphi(U')$, com $\varphi(x_0) \in V'$, um aberto W' de um espaço vectorial complexo $\widehat{F}$ e um difeomorfismo holomorfo $\psi\colon V' \to W'$. Tem-se então que $\widehat{U}' = \varphi^{-1}(V')$ é um aberto de U', e portanto de M', contendo x_0, e $\psi \circ \varphi_{/\widehat{U}'}$ é um difeomorfismo holomorfo de U' sobre W', portanto uma carta holomorfa local de M' em x_0. □

III.9.23 **(Teorema da imersão holomorfa)** Sejam $M' \subset G'$ e $M \subset G$ duas variedades quase complexas e $f\colon M' \to M$ uma aplicação holomorfa.

a) Seja $x_0 \in M'$ tal que $Df_{x_0}\colon T_{x_0}(M') \to T_{f(x_0)}(M)$ seja injectiva e que M seja variedade holomorfa em $f(x_0)$. Tem-se então que M' é uma variedade holomorfa em x_0.

b) Suponhamos que, para cada $x \in M'$, $Df_x\colon T_x(M') \to T_{f(x)}(M)$ é injectiva (f é uma *imersão holomorfa*). Se M'' é uma variedade quase complexa e $g\colon M'' \to M'$ é uma aplicação contínua tal que $f \circ g\colon M'' \to M$ seja holomorfa, então g é holomorfa.

Dem: a) Tendo em conta II.4.23, podemos considerar um aberto U' de M', com $x_0 \in U'$, tal que $f_{/U'}$ seja um difeomorfismo de U' sobre um subconjunto $A \subset M$, o qual vai ser, em particular, uma variedade sem bordo. Para cada $x \in U'$,

$$T_{f(x)}(A) = Df_x(T_x(U')) = Df_x(T_x(M'))$$

é um subespaço vectorial complexo de $T_{f(x)}(M)$. Pelo resultado precedente, A é uma variedade holomorfa em $f(x_0)$ pelo que podemos considerar um aberto U de A, com $f(x_0) \in U$, um aberto V de um espaço vectorial complexo F e um difeomorfismo holomorfo $\varphi: U \to V$. Tem-se então que $\widehat{U}' = f^{-1}(U)$ é um aberto de U', e portanto de M', contendo x_0, e $\varphi \circ f_{/\widehat{U}'}$ é um difeomorfismo holomorfo de $\widehat{U}'$ sobre V, portanto uma carta holomorfa local de M' em x_0.

b) Tendo em conta II.4.25, já sabemos que g é uma aplicação suave pelo que tudo o que temos que verificar é que, para cada $z \in M''$, Dg_z é uma aplicação linear complexa. Ora, tendo em conta o facto de $Df_{g(z)}$ e $D(f \circ g)_z$ serem aplicações lineares complexas, podemos escrever, para cada $u \in T_z(M'')$,

$$\begin{aligned} Df_{g(z)}(J'_{g(z)}(Dg_z(u))) &= J_{f(g(z))}(Df_{g(z)}(Dg_z(u))) = J_{f(g(z))}(D(f \circ g)_z(u)) = \\ &= D(f \circ g)_z(J''_z(u)) = Df_{g(z)}(Dg_z(J''_z(u))), \end{aligned}$$

de onde deduzimos, por $Df_{g(z)}$ ser injectiva, que $J'_{g(z)}(Dg_z(u)) = Dg_z(J''_z(u))$. □

III.9.24 **(Lema)** Sejam F um espaço vectorial complexo, $U \subset F$ um aberto, $M' \subset G$ uma variedade quase-complexa e $f: U \to M'$ uma aplicação holomorfa. Seja $x_0 \in U$ tal que $Df_{x_0}: F \to T_{f(x_0)}(M')$ seja uma aplicação linear sobrejectiva. Tem-se então:

a) A variedade M' é holomorfa em $f(x_0)$.

b) Existe um aberto V' de M', com $f(x_0) \in V'$, e uma aplicação holomorfa $g: V' \to U$, tal que $g(f(x_0)) = x_0$ e, para cada $y \in V'$, $f(g(y)) = y$ (uma secção holomorfa de f).

Dem: Seja $F'' \subset F$, $F'' = \ker(Df_{x_0})$, que é um subespaço vectorial complexo de F e escolhamos um subespaço vectorial complexo $F' \subset F$ tal que tenha lugar a soma directa $F = F'' \oplus F'$, por exemplo $F' = F''^{\perp}$, para um produto interno complexo que se considere em F. Tem-se assim que a restrição de Df_{x_0} a F' é injectiva, e portanto, pela igualdade da dimensão dos espaços envolvidos, é um isomorfismo de F' sobre $T_{f(x_0)}(M')$. Seja

$$\widehat{f}: (U - x_0) \cap F' \to M'$$

a aplicação suave definida por $\widehat{f}(x) = f(x + x_0)$, para a qual a derivada $D\widehat{f}_0: F' \to T_{f(x_0)}(M')$ está definida por $D\widehat{f}_0(u) = Df_{x_0}(u)$, sendo portanto um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, podemos considerar um aberto V de F', com $0 \in V \subset (U - x_0) \cap F'$, tal que $\widehat{f}_{/V}$ seja um difeomorfismo de V sobre um aberto V' de M', contendo $f(x_0) = \widehat{f}(0)$. Uma vez que, para cada $x \in V$, $D\widehat{f}_x = Df_{x+x_0/F'}: F' \to T_{\widehat{f}(x)}(M')$ é uma aplicação linear complexa, vemos que $\widehat{f}_{/V}$ é mesmo um difeomorfismo holomorfo, o que mostra que M' é realmente uma variedade holomorfa em

$f(x_0)$. Por fim, para justificar b), basta considerar a aplicação $g: V' \to U$ definida por $g(y) = (\widehat{f}_{/V})^{-1}(y) + x_0$. □

III.9.25 **(A submersão holomorfa)** Sejam M e M' variedades quase-complexas e $f: M \to M'$ uma aplicação holomorfa. Tem-se então:

a) Seja $x_0 \in M$ tal que $Df_{x_0}: T_{x_0}(M) \to T_{f(x_0)}(M')$ seja uma aplicação linear sobrejectiva e que M seja uma variedade holomorfa em x_0. Então a variedade M' é holomorfa em $f(x_0)$ e existe um aberto V' de M', com $f(x_0) \in V'$, e uma aplicação holomorfa $g: V' \to M$, tal que $g(f(x_0)) = x_0$ e, para cada $y \in V'$, $f(g(y)) = y$ (uma *secção holomorfa* de f).

b) Suponhamos que f é sobrejectiva e que, para cada $x \in M$, a aplicação linear $Df_x: T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$ é sobrejectiva (f é uma *submersão holomorfa* sobrejectiva). Se M'' é uma variedade quase-complexa e $h: M' \to M''$ é uma aplicação tal que $h \circ f: M \to M''$ seja holomorfa, então h é holomorfa.

Dem: a) Sejam F um espaço vectorial complexo, $U \subset F$ um aberto, W um aberto de A, com $x_0 \in W$, e $\varphi: U \to W$ um difeomorfismo holomorfo. Sendo $z_0 = \varphi^{-1}(x_0)$, podemos então considerar a aplicação holomorfa $f \circ \varphi: U \to M'$, para a qual

$$D(f \circ \varphi)_{x_0} = Df_{x_0} \circ D\varphi_{z_0}: F \to T_{f(x_0)}(M')$$

é uma aplicação linear sobrejectiva pelo que, aplicando o lema anterior, concluímos que M' é uma variedade holomorfa em $f \circ \varphi(z_0) = f(x_0)$ e que existe um aberto V' de M', contendo $f(x_0)$ uma aplicação holomorfa $h: V' \to W$ tal que $h(f(x_0)) = z_0$ e $f \circ \varphi \circ h(y) = y$, para cada $y \in V'$. Para terminar a justificação de a), basta agora tomar para $g: V' \to U$ a aplicação holomorfa definida por $g = \varphi \circ h$.

b) Tendo em conta II.4.31, já sabemos que $h: M' \to M''$ é uma aplicação suave; o que está aqui em causa é o facto de h ser holomorfa, ou seja, de, para cada $y \in M'$, $Dh_y: T_y(M') \to T_{h(y)}(M'')$ ser uma aplicação linear complexa. Ora, dado $v \in T_y(M')$, podemos escolher $x \in M$ tal que $f(x) = y$ e $u \in T_x(M)$ tal que $Df_x(u) = v$ e então, tendo em conta o facto de f e $h \circ f$ serem holomorfas, obtemos

$$\begin{aligned} Dh_y(J_y(v)) &= Dh_{f(x)}(J_{f(x)}(Df_x(u))) = Dh_{f(x)}(Df_x(J_x(u))) = \\ &= D(h \circ f)_x(J_x(u)) = J_{h(f(x))}(D(h \circ f)_x(u)) = \\ &= J_{h(y)}(Dh_y(Df_x(u))) = J_{h(y)}(Dh_y(v)). \end{aligned}$$ □

Vamos agora utilizar o resultado precedente para obter mais um exemplo importante, e não trivial, de variedade holomorfa.

III.9.26 **(A variedade de Grassmann complexa)** Seja E um espaço hermitiano de dimensão n e seja $G(E) \subset L_{aa}(E; E)$ a variedade de Grassmann, cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais complexos de E (cf. II.5.13). Lembremos que, como se viu, se $F \subset E$ é um subespaço vectorial de dimensão k, $G(E)$ é uma variedade sem bordo em π_F com dimensão $2k(n-k)$ e com espaço tangente

$$\begin{aligned} T_{\pi_F}(G(E)) &= \{\alpha \in L_{aa}(E;E) \mid \alpha \circ \pi_F + \pi_F \circ \alpha = \alpha\} \\ &= \{\alpha \in L_{aa}(E;E) \mid \alpha(F) \subset F^\perp \wedge \alpha(F^\perp) \subset F\}, \end{aligned}$$

que também pode ser caracterizado, em termos de matrizes relativas à decomposição em soma directa ortogonal $E = F \oplus F^\perp$, como o conjunto dos α cuja matriz é do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{2,1}^* \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix},$$

com $\alpha_{2,1} \in L(F;F^\perp)$ arbitrária. Tem-se então:

a) Tem lugar uma estrutura quase complexa $(J_\lambda)_{\lambda \in G(E)}$ de $G(E)$, onde, para cada $\lambda = \pi_F \in G(E)$, a aplicação linear $J_\lambda \colon T_\lambda(G(E)) \to T_\lambda(G(E))$ está definida por

$$J_\lambda(\alpha) = -i(2\lambda - Id_E) \circ \alpha,$$

por outras palavras, quando α tem a matriz referida acima, relativa à soma directa ortogonal $E = F \oplus F^\perp$, a matriz de $J_\lambda(\alpha)$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & -i\alpha_{2,1}^* \\ i\alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (i\alpha_{2,1})^* \\ i\alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso $G(E)$, com esta estrutura quase complexa, é mesmo uma variedade holomorfa.

b) Consideremos o aberto $GL(E)$ do espaço vectorial complexo $L(E;E)$ cujos elementos são os isomorfismos $\xi \colon E \to E$ (cf. II.5.2). Fixado $\lambda = \pi_F \in G(E)$, tem lugar uma submersão holomorfa $\Psi_F \colon GL(E) \to G(E)$ que a cada isomorfismo ξ associa a projecção ortogonal $\pi_{\xi(F)}$ de E sobre $\xi(F)$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Fixemos um subespaço vectorial F e reparemos que $\lambda = \pi_F$ e $2\lambda - Id_E$ vão ter, relativamente à soma directa ortogonal $E = F \oplus F^\perp$, respectivamente matrizes

$$\begin{bmatrix} Id_F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Id_F & 0 \\ 0 & -Id_{F^\perp} \end{bmatrix},$$

pelo que, para cada $\alpha \in T_{\pi_F}(G(E))$ com matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{2,1}^* \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix},$$

$J_{\pi_F}(\alpha) = -i(2\lambda - Id_E) \circ \alpha$ vai ter matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -i\alpha_{2,1}^* \\ i\alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (i\alpha_{2,1})^* \\ i\alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix},$$

em particular vai pertencer a $T_{\pi_F}(G(E))$. Ficou assim bem definida uma aplicação linear $J_\lambda\colon T_\lambda(G(E)) \to T_\lambda(G(E))$ e a sua caracterização matricial mostra que se tem $J_\lambda(J_\lambda(\alpha)) = -\alpha$, isto é, que J_λ é uma estrutura complexa do espaço vectorial $T_\lambda(G(E))$. Consideremos então a estrutura quase complexa $(J_\lambda)_{\lambda\in G(E)}$ da variedade de Grassmann $G(E)$.

2) Provemos agora que cada aplicação $\Psi_F\colon GL(E) \to G(E)$ é suave. Para isso, tendo em conta III.1.18, basta-nos mostrar que tem lugar um fibrado vectorial de base $GL(E)$, que a cada $\xi \in GL(E)$ associa o subespaço vectorial $\xi(F) \subset E$. Ora, isso é uma consequência de que temos mesmo um fibrado vectorial trivial, uma vez que, sendo $w_1, \ldots, w_k$ uma base de F, obtemos um campo de referenciais associando a cada $\xi \in GL(E)$ a base $\xi(w_1), \ldots, \xi(w_k)$ de $\xi(F)$.

3) Tem-se $\Psi_F(Id_E) = \pi_F$. Apesar de não termos nenhuma fórmula explícita para a aplicação Ψ_F, vamos ver que podemos apresentar uma caracterização matricial da derivada $D(\Psi_F)_{Id_E}\colon L(E;E) \to T_{\pi_F}(G(E))$ relativamente à soma directa ortogonal $E = F \oplus F^\perp$, nomeadamente que, se $\beta \in L(E;E)$ tem matriz

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{bmatrix},$$

então $D(\Psi_F)_{Id_E}(\beta) \in T_{\pi_F}(G(E))$ tem matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_{2,1}^* \\ \beta_{2,1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para isso, começamos por lembrar que a caracterização matricial de $T_{\pi_F}(G(E))$ nos garante que a matriz de $D(\Psi_F)_{Id_E}(\beta)$ tem que ser do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma_{2,1}^* \\ \gamma_{2,1} & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que ficamos reduzidos a mostrar que se tem $\gamma_{2,1} = \beta_{2,1}$, isto é, que, para cada $w \in F$, tem-se $D(\Psi_F)_{Id_E}(\beta)(w) = \pi_{F^\perp}(\beta(w))$. Ora, sendo $w \in F$, tem-se, para cada $\xi \in GL(E)$, $\xi(w) \in \xi(F)$, portanto $\Psi_F(\xi)(\xi(w)) = \xi(w)$ pelo que, por derivação de ambos os membros como funções de ξ em Id_E na direcção de β, obtemos

$$D(\Psi_F)_{Id_E}(\beta)(Id_E(w)) + \Psi_F(Id_E)(\beta(w)) = \beta(w),$$

ou seja

$$D(\Psi_F)_{Id_E}(\beta)(w) = \beta(w) - \pi_F(\beta(w)) = \pi_{F^\perp}(\beta(w)),$$

como queríamos.

4) A caracterização matricial de $D(\Psi_F)_{Id_E}: L(E;E) \to T_{\pi_F}(G(E))$ obtida em 3) mostra que esta aplicação linear é sobrejectiva e, tendo em conta a caracterização matricial da estrutura complexa J_{π_F}, que ela é também uma aplicação linear complexa. Para provarmos que $\Psi_F: GL(E) \to G(E)$ é uma submersão holomorfa resta-nos ver que, para cada $\xi \in GL(E)$, $D(\Psi_F)_\xi: L(E;E) \to T_{\pi_{\xi(F)}}(G(E))$ é também uma aplicação linear complexa sobrejectiva. Para isso reparamos que, considerando $\xi \in GL(E)$ fixado, podemos escrever, para cada $\eta \in GL(E)$,

$$\Psi_F(\eta \circ \xi) = \pi_{\eta(\xi(F))} = \Psi_{\xi(F)}(\eta)$$

pelo que, por derivação para $\eta = Id_E$, obtemos

$$D(\Psi_F)_\xi(\beta \circ \xi) = D(\Psi_{\xi(F)})_{Id_E}(\beta),$$

igualdade que também pode ser escrita na forma

$$D(\Psi_F)_\xi(\gamma) = D(\Psi_{\xi(F)})_{Id_E}(\gamma \circ \xi^{-1}).$$

Concluímos assim que $D(\Psi_F)_\xi: L(E;E) \to T_{\pi_{\xi(F)}}(G(E))$ é uma aplicação linear complexa sobrejectiva, por ser a composta da aplicação linear complexa sobrejectiva $D(\Psi_{\xi(F)})_{Id_E}: L(E;E) \to T_{\pi_{\xi(F)}}(G(E))$ com o isomorfismo complexo $L(\xi^{-1}; Id_E): L(E;E) \to L(E;E)$.
5) Uma vez provado que $\Psi_F: GL(E) \to G(E)$ é uma submersão holomorfa, podemos aplicar III.9.25 para garantir que $G(E)$ é uma variedade holomorfa em $\pi_F = \Psi_F(Id_E)$. □

O facto de $G(E)$ ser uma parte do espaço vectorial complexo $L(E;E)$ poderia levar-nos a pensar que se tratasse de uma subvariedade quase complexa de $L(E;E)$. Que isso não acontece, salvo em situações limites triviais onde a dimensão de $G(E)$ é 0, torna-se claro se repararmos que os espaços tangentes a $G(E)$ têm que estar contidos no subespaço vectorial real $L_{aa}(E;E)$ de $L(E;E)$, o qual não contém subespaços vectoriais complexos de $L(E;E)$ diferentes de $\{0\}$, uma vez que, se $\alpha \in L_{aa}(E;E)$, tem-se $i\alpha \in L_{-aa}(E;E)$ e a única aplicação linear simultaneamente autoadjunta e antiautoadjunta é a aplicação 0.
Repare-se que, apesar de a estrutura quase complexa de $G(E)$ poder parecer algo artificial, ela é a que permite que as aplicações naturais Ψ_F fiquem holomorfas. O resultado que enunciamos a seguir mostra que é também holomorfa outra aplicação natural envolvendo as variedades de Grassmann.

III.9.27 Sejam E e $\widehat{E}$ espaços hermitianos e $\xi: E \to \widehat{E}$ uma aplicação linear injectiva, não necessariamente unitária. É então holomorfa a aplicação suave $\xi_*: G(E) \to G(\widehat{E})$, definida por $\xi_*(\pi_F) = \pi_{\xi(F)}$.[88]

[88]cf. III.1.21.

Dem: Tudo o que temos que verificar é que, para cada $\pi_F \in G(E)$, a derivada

$$D(\xi_*)_{\pi_F}: T_{\pi_F}(G(E)) \to T_{\pi_{\xi(F)}}(G(\widehat{E}))$$

é uma aplicação linear complexa. Ora, tendo em conta III.1.23 e a caracterização matricial dos espaços tangentes às variedades de Grassmann em II.5.13, vemos que aquela aplicação linear associa a cada $\alpha \in T_{\pi_F}(G(E))$ com matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{2,1}^* \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$$

relativa à soma directa ortogonal $E = F \oplus F^\perp$ o elemento de $T_{\pi_{\xi(F)}}(G(\widehat{E}))$ com matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & (\pi_{\xi(F)^\perp} \circ \xi \circ \alpha_{2,1} \circ (\xi_{/F})^{-1})^* \\ \pi_{\xi(F)^\perp} \circ \xi \circ \alpha_{2,1} \circ (\xi_{/F})^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

relativa à soma directa ortogonal $\widehat{E} = \xi(F) \oplus \xi(F)^\perp$ pelo que, para concluir o resultado, basta lembrar a caracterização matricial da estrutura complexa em III.9.26. □

Vamos agora associar a cada estrutura quase complexa suave sobre uma variedade M e a cada $x \in M$ uma aplicação bilinear, que apesar de ter uma definição que parece algo artificial, vai ter propriedades de invariância importantes. Trata-se de um fenómeno semelhante com o que já encontrámos com o tensor de curvatura de uma variedade e a sua invariância por isometria.

III.9.28 Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $(J_x)_{x \in M}$. Fixado um produto interno auxiliar em G, tem lugar, para cada $x \in M$, uma aplicação bilinear real

$$N_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M),$$

a que se dá o nome de *tensor de Nijenhuis* ou *tensor de torção* da estrutura quase complexa em x,[89] definida por

$$N_x(u, v) = \nabla J_x(u)(J_x(v)) - \nabla J_x(v)(J_x(u)) + \nabla J_x(J_x(u))(v) - \nabla J_x(J_x(v))(u)$$

(as derivadas covariantes são as do morfismo linear $J = (J_x)_{x \in M}$: $T(M) \to T(M)$, relativamente ao produto interno considerado em G). Esta aplicação bilinear é antissimétrica e antilinear em cada variável, isto é, verifica as igualdades

[89]Veremos adiante que esta aplicação não depende do produto interno considerado em G.

$$N_x(v,u) = -N_x(u,v),$$
$$N_x(J_x(u),v) = -J_x(N_x(u,v)), \qquad N_x(u,J_x(v)) = -J_x(N_x(u,v)).$$

Dem: O facto de termos uma aplicação bilinear antissimétrica é uma consequência imediata da definição. Podemos agora escrever, tendo em conta III.9.7,

$$\begin{aligned} N_x(J_x(u),v) &= \nabla J_x(J_x(u))(J_x(v)) + \nabla J_x(v)(u) - \\ &\quad - \nabla J_x(u)(v) - \nabla J_x(J_x(v))(J_x(u)) = \\ &= -J_x(\nabla J_x(J_x(u))(v)) + J_x(\nabla J_x(v)(J_x(u))) - \\ &\quad - J_x(\nabla J_x(u)(J_x(v))) + J_x(\nabla J_x(J_x(v))(u)) = \\ &= -J_x(N_x(u,v)), \end{aligned}$$

o que mostra que N_x é antilinear na primeira variável. A antilinearidade na segunda variável é análoga ou, alternativamente, resulta da antilinearidade na primeira, tendo em conta o facto de N_x ser antissimétrica. □

III.9.29 Nas condições anteriores, se a variedade M tem dimensão real 2, o tensor de torção $N_x\colon T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)$ é sempre 0.

Dem: Trata-se de uma consequência simples de N_x ser antissimétrica e antilinear em cada variável: Começamos por notar que, para cada $u \in T_x(M)$, a igualdade $N_x(u,u) = -N_x(u,u)$ implica que $N_x(u,u) = 0$; tomamos então $u \neq 0$ em $T_x(M)$ e reparamos que u é uma base complexa de $T_x(M)$, e portanto u, $J_x(u)$ é uma base real deste espaço e então as igualdades

$$\begin{aligned} &N_x(u,u) = 0, && N_x(u,J_x(u)) = -J_x(N_x(u,u)) = 0 \\ &N_x(J_x(u),J_x(u)) = 0, && N_x(J_x(u),u) = -J_x(N_x(u,u)) = 0 \end{aligned}$$

implicam que $N_x(w,w') = 0$ quaisquer que seja w, w' (começar por mostrar que $N_x(u,w') = 0 = N_x(J_x(u),w')$, para cada w'). □

III.9.30 Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $(J_x)_{x\in M}$ e seja $\overline{J} = (\overline{J}_x)_{x\in M}$ uma aplicação suave de M em $L(G;G)$ com cada J_x restrição de $\overline{J}_x$. Tem-se então

$$N_x(u,v) = D\overline{J}_x(u)(J_x(v)) - D\overline{J}_x(v)(J_x(u)) + D\overline{J}_x(J_x(u))(v) - D\overline{J}_x(J_x(v))(u)$$

fórmula que mostra, em particular, que o tensor de torção N_x não depende do produto interno auxiliar que se considera em G, e pode assim ser definido sem referência explícita a este.

Dem: Consideremos o produto interno auxiliar em G, utilizado para a definição de N_x. Tendo em conta a definição da derivada covariante de um morfismo linear em III.8.16, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\nabla J_x(u)(J_x(v)) = D\overline{J}_x(u)(J_x(v)) + \overline{J}_x(h_x(u, J_x(v))) - h_x(u, J_x(J_x(v)))\\
&-\nabla J_x(v)(J_x(u)) = -D\overline{J}_x(v)(J_x(u)) - \overline{J}_x(h_x(v, J_x(u))) + h_x(v, J_x(J_x(u)))\\
&\nabla J_x(J_x(u))(v) = D\overline{J}_x(J_x(u))(v) + \overline{J}_x(h_x(J_x(u), v)) - h_x(J_x(u), J_x(v))\\
&-\nabla J_x(J_x(v))(u) = -D\overline{J}_x(J_x(v))(u) - \overline{J}_x(h_x(J_x(v), u)) + h_x(J_x(v), J_x(u))
\end{aligned}$$

pelo que, tendo em conta o facto de $h_x\colon T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ ser uma aplicação bilinear simétrica, vemos que $N_x(u,v)$, igual à soma dos primeiros membros destas quatro igualdades, é também dado pela fórmula no enunciado. □

III.9.31 Seja $M \subset G$ e $M' \subset G'$ variedades sem bordo, munidas de estruturas quase complexas suaves $(J_x)_{x\in M}$ e $(J'_y)_{y\in M'}$ e seja $f\colon M \to M'$ uma aplicação holomorfa. Considerando os correspondentes tensores de torção

$$N_x\colon T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M), \quad N'_y\colon T_y(M') \times T_y(M') \to T_y(M'),$$

tem-se, para cada $x \in M$ e $u, v \in T_x(M)$,

$$Df_x(N_x(u,v)) = N'_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v)).$$

Dem: Por derivação covariante das identidades $Df_x \circ J_x = J'_{f(x)} \circ Df_x$, obtemos, tendo em conta III.8.25 e III.8.28,

$$\begin{aligned}
&(\nabla Df_x(u)) \circ J_x + Df_x \circ (\nabla J_x(u)) =\\
&\qquad = (\nabla J'_{f(x)}(Df_x(u))) \circ Df_x + J'_{f(x)} \circ (\nabla Df_x(u)),
\end{aligned}$$

portanto, aplicando ambos os membros a $v \in T_x(M)$,

$$\begin{aligned}
&\beta(f)_x(u, J_x(v)) + Df_x(\nabla J_x(u)(v)) =\\
&\qquad = \nabla J'_{f(x)}(Df_x(u))(Df_x(v)) + J'_{f(x)}(\beta(f)_x(u,v)).
\end{aligned}$$

Lembrando o facto de a Hessiana $\beta(f)_x\colon T_x(M) \times T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$ ser uma aplicação bilinear simétrica, podemos agora escrever

$$\begin{aligned}
N'_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v)) &= \nabla J'_{f(x)}(Df_x(u))(J'_{f(x)}(Df_x(v))) -\\
&\quad - \nabla J'_{f(x)}(Df_x(v))(J'_{f(x)}(Df_x(u))) + \nabla J'_{f(x)}(J'_{f(x)}(Df_x(u)))(Df_x(v)) -\\
&\quad - \nabla J'_{f(x)}(J'_{f(x)}(Df_x(v)))(Df_x(u)) =\\
&= \nabla J'_{f(x)}(Df_x(u))(Df_x(J_x(v))) -\\
&\quad - \nabla J'_{f(x)}(Df_x(v))(Df_x(J_x(u))) + \nabla J'_{f(x)}(Df_x(J_x(u)))(Df_x(v)) -\\
&\quad - \nabla J'_{f(x)}(Df_x(J_x(v)))(Df_x(u)) =\\
&= \beta(f)_x(u, -v)) + Df_x(\nabla J_x(u)(J_x(v))) - J'_{f(x)}(\beta(f)_x(u, J_x(v))) -\\
&\quad - \beta(f)_x(v, -u) - Df_x(\nabla J_x(v)(J_x(u))) + J'_{f(x)}(\beta(f)_x(v, J_x(u))) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta(f)_x(J_x(u),J_x(v))+Df_x(\nabla J_x(J_x(u))(v))-J'_{f(x)}(\beta(f)_x(J_x(u),v))-\\
&-\beta(f)_x(J_x(v),J_x(u))-Df_x(\nabla J_x(J_x(v))(u))+J'_{f(x)}(\beta(f)_x(J_x(v),u))=\\
=\ &Df_x(\nabla J_x(u)(J_x(v)))-Df_x(\nabla J_x(v)(J_x(u)))+Df_x(\nabla J_x(J_x(u))(v))-\\
&-Df_x(\nabla J_x(J_x(v))(u))=Df_x(N_x(u,v)).
\end{aligned}
$$
□

III.9.32 **(Corolário)** Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $J = (J_x)_{x\in M}$, e consideremos o correspondente tensor de torção $N_x\colon T_x(M)\times T_x(M)\to T_x(M)$. Seja $M' \subset M$ uma subvariedade quase complexa (cf. III.9.21), sobre a qual consideramos a estrutura quase complexa induzida. Para cada $x \in M'$, o tensor de torção $N'_x\colon T_x(M')\times T_x(M')\to T_x(M')$ é então uma restrição de N_x.

Dem: Basta aplicar III.9.31 à inclusão $\iota\colon M'\to M$, que é uma aplicação holomorfa, com derivada em cada ponto $x\in M'$ igual à inclusão $T_x(M')\to T_x(M)$. □

III.9.33 **(Corolário)** Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa $(J_x)_{x\in M}$. Se M é uma variedade holomorfa, então o tensor de torção $N_x\colon T_x(M)\times T_x(M)\to T_x(M)$ é 0.

Dem: Começamos por reparar que, se F é um espaço vectorial complexo e se $V\subset F$ é um aberto, sobre o qual consideramos a estrutura quase complexa constante, então, para cada $y\in V$, o tensor de torção $N'_y\colon F\times F\to F$ é 0, como resulta imediatamente do facto de a derivada covariante de um morfismo linear constante ser nula. Dados $x_0\in M$ e $u,v\in T_{x_0}(M)$, podemos agora considerar um aberto U de M, com $x_0\in U$ e um difeomorfismo holomorfo $\varphi\colon U\to V$, com V aberto de um espaço vectorial complexo F, podendo então escrever-se

$$D\varphi_{x_0}(N_{x_0}(u,v)) = N'_{\varphi(x_0)}(D\varphi_{x_0}(u), D\varphi_{x_0}(v)) = 0,$$

donde, uma vez que $D\varphi_{x_0}$ é um isomorfismo, $N_{x_0}(u,v)=0$. □

III.9.34 **(Nota)** Pode provar-se que, reciprocamente, toda a variedade sem bordo M munida de uma estrutura quase complexa suave cujo tensor de torção $N=(N_x)_{x\in M}$ é identicamente nulo é uma variedade holomorfa (teorema de Newlander-Nirenberg). Trata-se, no entanto de um resultado cuja demonstração é longa e envolvelve técnicas que saem do âmbito do nosso curso (cf. [20]). Mesmo o caso particular em que a dimensão real de M é 2, caso em que o teorema afirma que, qualquer que seja a estrutura quase complexa suave, a variedade M é holomorfa (cf. III.9.29), tem uma demonstração que não estamos em condições de apresentar aqui.

III.9.35 Seja G um espaço euclidiano e seja $M\subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $J=(J_x)_{x\in M}$. Dizemos que J é *compatível* com o produto interno de G se, para cada $x\in M$, a estrutura complexa J_x do espaço vectorial tangente $T_x(M)$ é compatível com o produto interno induzido neste espaço pelo de G. Dizemos que M é uma *variedade de Kähler* se a sua estrutura quase complexa é compatível e paralela, isto é, para cada $x \in M$ e $u \in T_x(M)$, $\nabla J_x(u) = 0$.

III.9.36 **(Notas) a)** Se $M \subset G$ é uma variedade de Kähler, então, lembrando a caracterização do tensor de torção $N_x : T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)$ em III.9.28, tem-se $N_x = 0$, para cada x, e portanto, se admitirmos o teorema de Newlander-Nirenberg citado atrás, M é automaticamente uma variedade holomorfa.
b) Se $M \subset G$ é uma variedade de dimensão real 2, munida de uma estrutura quase complexa suave compatível, então o que vimos em III.9.8 mostra que M é uma variedade de Kähler.
Em particular, a esfera de Riemann, definida em III.9.18, é uma variedade de Kähler. Repare-se que, nesse caso, foi provado, sem recurso ao teorema de Newlander-Nirenberg, que a esfera de Riemann é uma variedade holomorfa.

Além do exemplo da esfera de Riemann, que acabamos de referir e do exemplo trivial dos abertos dos espaços vectoriais complexos, com a estrutura quase complexa constante, veremos adiante, no exercício III.85, que a variedade de Grassmann complexa, referida em III.9.26, é também uma variedade de Kähler.

III.9.37 Sejam G e G' espaços euclidianos e $M \subset G$ e $M' \subset G'$ duas variedades de Kähler. Se $f: M \to M'$ é uma aplicação holomorfa, então a Hessiana $\beta(f)_x : T_x(M) \times T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$ é uma aplicação bilinear complexa.
Dem: Por derivação covariante das identidades $Df_x \circ J_x = J'_{f(x)} \circ Df_x$, obtemos, tendo em conta III.8.25 e III.8.28,

$$\begin{aligned}(\nabla Df_x(u)) \circ J_x + Df_x \circ (\nabla J_x(u)) &= \\ = (\nabla J'_{f(x)}(Df_x(u))) \circ Df_x &+ J'_{f(x)} \circ (\nabla Df_x(u)),\end{aligned}$$

ou seja, tendo em conta o paralelismo das estruturas quase complexas,

$$(\nabla Df_x(u)) \circ J_x = J'_{f(x)} \circ (\nabla Df_x(u)).$$

Aplicando ambos os membros a $v \in T_x(M)$, obtemos

$$\beta(f)_x(u, J_x(v)) = J'_{f(x)}(\beta(f)_x(u, v)),$$

o que mostra que a Hessiana é linear complexa na segunda variável. Uma vez que a Hessiana é uma aplicação bilinear simétrica, podemos agora escrever

$$\beta(f)_x(J_x(u), v) = \beta(f)_x(v, J_x(u)) = J'_{f(x)}(\beta(f)_x(v, u)) = J'_{f(x)}(\beta(f)_x(u, v)),$$

pelo que a Hessiana é também linear complexa na primeira variável. □

Vamos agora verificar que, no quadro das estruturas quase complexas suaves compatíveis com um produto interno no espaço ambiente, a condição de se ter $N_x = 0$ pode ser expressa em termos da derivada covariante da estrutura quase complexa de uma forma mais simples que aquela que envolve a definição do tensor de torção.

III.9.38 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade munida de uma estrutura quase complexa suave compatível $J = (J_x)_{x \in M}$. Podemos assim considerar, para cada $x \in M$, uma aplicação bilinear real

$$T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M), \quad (u, v) \mapsto \nabla J_x(u)(v)$$

e então:

a) Esta aplicação é sempre antilinear na segunda variável, isto é,

$$\nabla J_x(u)(J_x(v)) = -J_x(\nabla J_x(u)(v)).$$

b) Tem-se $N_x = 0$ se, e só se, esta aplicação é linear complexa na primeira variável, isto é,

$$\nabla J_x(J_x(u))(v) = J_x(\nabla J_x(u)(v)).$$

Dem: A conclusão de a) é simples e foi já estabelecida, num quadro mais geral, em III.9.7. Supondo que a aplicação bilinear referida é linear complexa na primeira variável, obtemos

$$\nabla J_x(J_x(u))(v) = J_x(\nabla J_x(u)(v)) = -\nabla J_x(u)(J_x(v))$$

e, do mesmo modo, $\nabla J_x(J_x(v))(u) = -\nabla J_x(v)(J_x(u))$ pelo que a definição do tensor de torção N_x em III.9.28 implica que este é 0. Resta-nos portanto admitir que $N_x = 0$ e provar que a aplicação bilinear referida no enunciado é linear complexa na primeira variável. Sejam $u, v, w \in T_x(M)$ arbitrários. Tendo em conta o facto de a derivada covariante de J em x, na direcção de qualquer vector de $T_x(M)$, ser antiautoadjunta e antilinear (cf. III.9.7) e o facto de J_x ser compatível com o, produto interno, podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 &= \langle N_x(u, v), w\rangle = \\
&= \langle \nabla J_x(u)(J_x(v)), w\rangle - \langle \nabla J_x(v)(J_x(u)), w\rangle + \\
&\quad + \langle \nabla J_x(J_x(u))(v), w\rangle - \langle \nabla J_x(J_x(v))(u), w\rangle = \\
&= -\langle J_x(\nabla J_x(u)(v)), w\rangle + \langle J_x(u), \nabla J_x(v)(w)\rangle - \\
&\quad + \langle \nabla J_x(J_x(u))(v), w\rangle + \langle u, \nabla J_x(J_x(v))(w)\rangle = \\
&= -\langle J_x(\nabla J_x(u)(v)), w\rangle - \langle u, J_x(\nabla J_x(v)(w))\rangle - \\
&\quad + \langle \nabla J_x(J_x(u))(v), w\rangle + \langle u, \nabla J_x(J_x(v))(w)\rangle.
\end{aligned}$$

Consideremos a igualdade

$$\begin{aligned}
0 = &-\langle J_x(\nabla J_x(u)(v)), w\rangle - \langle u, J_x(\nabla J_x(v)(w))\rangle + \\
&+ \langle \nabla J_x(J_x(u))(v), w\rangle + \langle u, \nabla J_x(J_x(v))(w)\rangle
\end{aligned}$$

que acabámos de obter, assim como as duas que se podem obter dela por permutação circular dos vectores u, v, w:

$$\begin{aligned}0 = &-\langle J_x(\nabla J_x(v)(w)), u\rangle - \langle v, J_x(\nabla J_x(w)(u))\rangle +\\ &+ \langle \nabla J_x(J_x(v))(w), u\rangle + \langle v, \nabla J_x(J_x(w))(u)\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = &-\langle J_x(\nabla J_x(w)(u)), v\rangle - \langle w, J_x(\nabla J_x(u)(v))\rangle +\\ &+ \langle \nabla J_x(J_x(w))(u), v\rangle + \langle w, \nabla J_x(J_x(u))(v)\rangle,\end{aligned}$$

e somemos membro a membro as três igualdades, depois de multiplicar ambos os membros da segunda por -1. Obtemos então

$$0 = -2\langle J_x(\nabla J_x(u)(v)), w\rangle + 2\langle \nabla J_x(J_x(u))(v), w\rangle,$$

portanto, tendo em conta a arbitrariedade de $w \in T_x(M)$, concluímos que

$$J_x(\nabla J_x(u)(v)) = \langle \nabla J_x(J_x(u))(v),$$

como queríamos. □

EXERCÍCIOS

Ex III.1 **a)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita. Mostrar que o subconjunto $L_{inj}(E; F)$ de $L(E; F)$, formado pelas aplicações lineares injectivas, é aberto em $L(E; F)$. **Sugestão:** Fixando uma base de E, considerar o correspondente isomorfismo de $L(E; F)$ sobre F^m e aplicar então III.1.16.
b) Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita. Mostrar que o subconjunto $L_{sob}(E; F)$ de $L(E; F)$, constituído pelas aplicações lineares sobrejectivas, é aberto em $L(E; F)$. **Sugestão:** Munir E e F de produtos internos e utilizar a alínea b) do exercício I.1.

Ex III.2 Para cada $n \geq 0$, notemos $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1,

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\},$$

e relembremos que S^n é uma variedade sem bordo, de dimensão n, e que, para cada $x \in S^n$, o espaço vectorial tangente $T_x(S^n)$ é o conjunto dos vectores $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $\langle x, u\rangle = 0$. Mostrar que o fibrado vectorial tangente $T(S^n)$ é trivial nos casos em que $n = 0$, $n = 1$, $n = 3$ e $n = 7$.
Nota: O primeiro caso é trivial, o segundo é simples, o terceiro exige um pouco de trabalho e o quarto é mais complicado. Apresentamos no fim dos exercícios deste capítulo uma solução dos casos não triviais. Pode-se demonstrar, mas isso é muito complicado, que aqueles valores de n são os únicos para os quais $T(S^n)$ é trivial. No caso em que n é par pode-se mesmo mostrar que qualquer secção suave de $T(S^n)$ anula-se em pelo menos um ponto.

Ex III.3 Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ a porção de superfície cilíndrica

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\, z \in [0, 1]\}.$$

Mostrar que C é uma variedade de dimensão 2 e que o fibrado vectorial tangente $T(C)$ é trivial.

Ex III.4 Seja E um espaço euclidiano ou hermitiano e consideremos a correspondente variedade de Grassmann $G(E)$, cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E, assim como os correspondentes subconjuntos $G_k(E)$, cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de dimensão k.
Utilizar o fibrado vectorial tautológico de base $G(E)$ (cf. a demonstração de III.1.21) para obter uma nova justificação para o facto de cada $G_k(E)$ ser um subconjunto aberto de $G(E)$.

Ex III.5 Seja E um espaço euclidiano ou hermitiano e sejam $\Omega^m(E)$ o aberto de E^m constituído pelos sistemas linearmente independentes e $V_m(E) \subset \Omega^m(E)$ o subconjunto constituído pelos sistemas ortonormados (a variedade de Stiefel, referida no exercício II.34).
a) Mostrar que, para a aplicação suave

$$\begin{aligned}
&\varphi\colon \Omega^m(E) \to V_m(E),\\
&\varphi(x_1, \ldots, x_m) = (g_1(x_1), g_2(x_1, x_2), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_m))
\end{aligned}$$

(cf. III.1.17), tem-se $\varphi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m)$, para $(x_1, \ldots, x_m) \in V_m(E)$. Deduzir que $\varphi(\Omega^m(E)) = V_m(E)$ e $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
b) Mostrar que tem lugar uma aplicação suave $H\colon [0, 1] \times \Omega^m(E) \to \Omega^m(E)$ definida por

$$H(t, (x_1, \ldots, x_m)) = (1 - t)(x_1, \ldots, x_m) + t\, \varphi(x_1, \ldots, x_m),$$

para a qual se tem

$$\begin{aligned}
H(0, (x_1, \ldots, x_m)) &= (x_1, \ldots, x_m),\\
H(1, (x_1, \ldots, x_m)) &= \varphi(x_1, \ldots, x_m)
\end{aligned}$$

(costuma-se dizer que H é uma *homotopia suave* entre a aplicação identidade de $\Omega^m(E)$ e a aplicação φ). **Sugestão:** Fixado $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega^m(E)$ considerar, para cada $0 \le k \le m$ o subespaço vectorial F_k de E gerado por $x_1, \ldots, x_k$ e reparar que, nas notações de III.1.16 e III.1.17, se pode escrever

$$\begin{aligned}
&(1 - t)x_k + tg_k(x_1, \ldots, x_k) =\\
&= \big((1 - t) + \frac{t}{\|f_k(x_1, \ldots, x_k)\|}\big) f_k(x_1, \ldots, x_k) + (1 - t)(x_k - f_k(x_1, \ldots, x_k)),
\end{aligned}$$

onde $x_k - f_k(x_1, \ldots, x_k) \in F_{k-1}$ e $f_k(x_1, \ldots, x_k) \notin F_{k-1}$, concluindo daqui que $(1 - t)x_k + tg_k(x_1, \ldots, x_k) \notin F_{k-1}$.

Ex III.6 Seja E um espaço vectorial real de dimensão $n \geq 1$, sobre o qual fixamos um produto interno e uma das suas orientações. Lembrar que, como se viu no exercício I.18, a variedade de Stiefel $V_n(E)$ tem duas componentes conexas $V_{n+}(E)$ e $V_{n-}(E)$, a saber, os conjuntos abertos em $V_n(E)$ constituídos respectivamente pelas bases ortonormadas directas e pelas bases ortonormadas retrógradas.

a) Verificar que o conjunto $\Omega^n(E)$ das bases de E é união de dois subconjuntos abertos $\Omega^n_+(E)$ e $\Omega^n_+(E)$, constituídos respectivamentes pelas bases directas e pelas bases retrógradas. Concluir que qualquer subconjunto conexo de $\Omega^n(E)$ tem que estar contido num destes dois abertos.

b) Mostrar que $\Omega^n_+(E)$ e $\Omega^n_+(E)$ são conexos e não vazios, e portanto são as componentes conexas de $\Omega^n(E)$. **Sugestão:** Nas notações do exercício anterior, mostrar que, se $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega^n(E)$ então existe um conexo de $\Omega^n(E)$ que contém $(x_1, \ldots, x_n)$ e $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, o conjunto dos $H(t, (x_1, \ldots, x_n))$ com $t \in [0, 1]$.

c) Concluir de b) que o grupo de Lie $GL(E)$ tem duas componentes conexas $GL_+(E)$ e $GL_-(E)$, constituídas respectivamente pelos isomorfismos que conservam as orientações e por aqueles que invertem as orientações.

Ex III.7 Seja E um espaço vectorial complexo de dimensão n. Proceder de modo análogo ao que se fez no exercício precedente, mas utilizando agora o exercício I.17, para concluir que o conjunto $\Omega^n(E)$ das bases de E é conexo e que o grupo de Lie $GL(E)$ é conexo.

Ex III.8 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n e $1 \leq k \leq n$ e consideremos o correspondente aberto $\Omega^k(E)$ de E^k, constituído pelos sistemas linearmente independentes $(x_1, \ldots, x_k)$. Seja

$$\mathcal{M} \subset \Omega^k(E) \times E \subset E^k \times E$$

o conjunto dos $((x_1, \ldots, x_k), x)$ tais que x pertence ao subespaço vectorial gerado por $x_1, \ldots, x_k$.

a) Mostrar que $\mathcal{M}$ é uma variedade sem bordo, com dimensão $(n+1)k$. **Sugestão:** $\mathcal{M}$ é o espaço total de um fibrado vectorial.

b) Mostrar que têm lugar aplicações suaves $f_j\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, onde $1 \leq j \leq k$, definidas pela condição de se ter, para cada $((x_1, \ldots, x_k), x) \in \mathcal{M}$,

$$x = \sum_{j=1}^{k} f_j((x_1, \ldots, x_k), x)\, x_j.$$

Sugestão: Aplicar III.1.13 a um fibrado vectorial trivial conveniente, com base $\mathcal{M}$.

Ex III.9 Sejam E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n munido de produto interno e $0 \leq k \leq n$ e consideremos a variedade de Grassmann $G_k(E)$ das projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de dimensão k (cf. II.5.13) e o aberto $\Omega^k(E)$ de E^k cujos elementos são os sistemas

linearmente independentes $(x_1, \dots, x_k)$.
a) Mostrar que tem lugar uma aplicação suave $\Psi: \Omega^k(E) \to G_k(E)$, que a cada $(x_1, \dots, x_k)$ associa a projecção ortogonal π_F, onde F é o subespaço vectorial gerado por por $x_1, \dots, x_k$ e que esta aplicação é sobrejectiva (comparar com o exercício II.62). **Sugestão:** Utilizar a alínea b) de III.1.18, reparando que tem lugar um fibrado vectorial trivial de base $\Omega^k(E)$ cuja fibra em $(x_1, \dots, x_k)$ é o subespaço vectorial gerado por estes vectores.
b) Verificar que a aplicação suave sobrejectiva $\Psi: \Omega^k(E) \to G_k(E)$ é homogénea e concluir, por aplicação do corolário do teorema de Sard em II.7.21, que esta aplicação é uma submersão. **Sugestão:** Cada isomorfismo, não necessariamente ortogonal, $\xi: E \to E$ determina um difeomorfismo natural $\Omega^k(E) \to \Omega^k(E)$ e um difeomorfismo natural $\xi_*: G_k(E) \to G_k(E)$, que a cada π_F associa $\pi_{\xi(F)}$ (cf. III.1.21).

Ex III.10 Sejam E um espaço euclidiano ou hermitiano de dimensão n, $0 \le k \le n$ e $G_k(E) \subset L_{aa}(E;E)$ a variedade de Grassmann cujos elementos são as projecções ortogonais π_F, com $F \subset E$ subespaço vectorial de dimensão k (cf. II.5.13). Seja $GL(E)$ o aberto de $L(E;E)$ constituído pelos isomorfismos $\xi: E \to E$.
a) Se $F_0 \subset E$ é um subespaço vectorial de dimensão k, mostrar que tem lugar uma aplicação suave sobrejectiva $\Psi_{F_0}: GL(E) \to G_k(E)$ definida por $\Psi_{F_0}(\xi) = \pi_{\xi(F_0)}$. **Sugestão:** Utilizar a alínea b) de III.1.18, reparando que tem lugar um fibrado vectorial trivial de base $GL(E)$ cuja fibra em ξ é $\xi(F_0)$.
b) Mostrar que a aplicação suave sobrejectiva $\Psi_{F_0}: GL(E) \to G_k(E)$ é uma submersão. **Sugestão:** Utilizar o corolário do teorema de Sard em II.7.21, depois de verificar que Ψ_{F_0} é uma aplicação suave homogénea. Para isso, considerar, para cada $\eta \in GL(E)$ o difeomorfismo $GL(E) \to GL(E)$, $\xi \mapsto \eta \circ \xi$ e o difeomorfismo natural $\eta_*: G_k(E) \to G_k(E)$ (cf. III.1.21).
c) Mostrar que é suave a aplicação $\Psi: GL(E) \times G_k(E) \to G_k(E)$ definida por $\Psi(\xi, \pi_F) = \pi_{\xi(F)}$. **Sugestão:** Fixado F_0, estudar a composta de Ψ com a submersão sobrejectiva

$$Id_{GL(E)} \times \Psi_{F_0}: GL(E) \times GL(E) \to G_k(E).$$ [90]

Ex III.11 Sejam $M \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Suponhamos que existe um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, uma aplicação suave $f: [a, b] \to M$ e um campo de referenciais $W_1, \dots, W_n$ do fibrado vectorial imagem recíproca $f^*\underline{E}$, tais que $f(a) = f(b)$ e que as bases $W_{1a}, \dots, W_{na}$ e $W_{1b}, \dots, W_{nb}$ de $E_{f(a)} = E_{f(b)}$ tenham orientações opostas. Mostrar que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial não orientável.

Ex III.12 A *banda de Möbius* é uma superfície em $\mathbb{R}^3$ que se pode construir colando as arestas opostas de uma tira de papel depois de ter dado uma rotação de 180° a uma delas. Mostrar intuitivamente, utilizando o exercício

[90]Para uma justificação alternativa ver o exercício III.58 adiante.

III.11, que a banda de Möbius é uma superfície não orientável. Redemonstrar intuitivamente o mesmo resultado utilizando também a propriedade III.2.15.

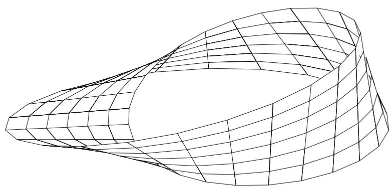

Figura 9

Ex III.13 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades difeomorfas. Mostrar que, se M é orientável então $\widehat{M}$ é também orientável. **Sugestão:** Dada uma orientação suave de M e sendo $f: M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo, definir em cada $T_{f(x)}(\widehat{M})$ a orientação para a qual o isomorfismo $Df_x: T_x(M) \to T_{f(x)}(\widehat{M})$ conserva as orientações.

Ex III.14 Sejam E e F espaços vectoriais, reais ou complexos, com dimensões m e n respectivamente e seja $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Notemos $L_{(k)}(E; F)$ o subconjunto de $L(E; F)$ constituído pelas aplicações lineares $\lambda: E \to F$ tais que $\lambda(E)$ tenha dimensão k.

a) (Lema de Álgebra Linear) Mostrar que, dados $\lambda, \gamma \in L(E; F)$, uma condição necessária e suficiente para que existam aplicações lineares $\alpha \in L(E; E)$ e $\beta \in L(F; F)$ tais que $\beta \circ \lambda + \lambda \circ \alpha = \gamma$ é que se tenha $\gamma(\ker(\lambda)) \subset \lambda(E)$. **Sugestão:** Escolher uma base $x_1, \ldots, x_{m-k}$ de $\ker(\lambda)$ e prolongá-la numa base de E por junção de vectores $x_{m-k+1}, \ldots, x_m$; reparar que $\lambda(x_{m-k+1}), \ldots, \lambda(x_m)$ são vectores linearmente independentes de F, aos quais se pode juntar $n - k$ vectores de modo a obter uma base de F; Começar por definir α de modo que, para cada $j \leq m - k$, os $\alpha(x_j)$ verifiquem a condição $\lambda(\alpha(x_j)) = \gamma(x_j)$ e que os restantes $\alpha(x_j)$ sejam 0; definir, por fim, β de modo que, para cada $j \geq m - k + 1$, se tenha $\beta(\lambda(x_j)) = \gamma(x_j)$.

b) Mostrar que existe um fibrado vectorial de dimensão k de base $L_{(k)}(E; F)$ cuja fibra em cada $\lambda \in L_{(k)}(E; F)$ é o subespaço vectorial $\lambda(E)$ de F. **Sugestão:** Dado $\lambda_0 \in L_{(k)}(E; F)$, escolher $x_1, \ldots, x_k \in E$ cujas imagens por λ_0 constituam uma base de $\lambda_0(E)$ e reparar que, para cada λ num certo aberto de $L_{(k)}(E; F)$, contendo λ_0, $\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_k)$ é uma base de $\lambda(E)$.

c) Dado $\lambda_0 \in L_{(k)}(E; F)$, mostrar que, para cada $\gamma \in T_{\lambda_0}(L_{(k)}(E; F))$, tem-se $\gamma(\ker(\lambda_0)) \subset \lambda_0(E)$. **Sugestão:** Se $w \in \ker(\lambda_0)$, considerar a secção suave $(\lambda(w))_{\lambda \in L_{(k)}(E;F)}$ do fibrado vectorial referido em b), que se anula em λ_0, e ter em conta III.3.15.

d) Mostrar que $L_{(k)}(E; F)$ é uma variedade sem bordo e que, para cada $\lambda_0 \in L_{(k)}(E; F)$, o espaço vectorial tangente $T_{\lambda_0}(L_{(k)}(E; F))$ é o conjunto dos $\gamma \in L(E; F)$ tais que $\gamma(\ker(\lambda_0)) \subset \lambda_0(E)$. Deduzir que a dimensão de

$L_{(k)}(E;F)$ é igual a

$$mn - (m-k)(n-k) = k(m+n-k).$$

Sugestão: Reparar que tem lugar uma aplicação suave

$$\Phi: GL(F) \times GL(E) \to L_{(k)}(E;F), \quad \Phi(\eta,\xi) = \eta \circ \lambda_0 \circ \xi,$$

e utilizar a conclusão da alínea a) para mostrar que a imagem de $D\Phi_{(Id_F,Id_E)}: L(F;F) \times L(E;E) \to L(E;F)$ contém o candidato a espaço vectorial tangente, aplicando em seguida o segundo teorema da submersão.

Ex III.15 Considerar o fibrado vectorial de Möbius $\underline{E}$, definido em III.2.13. Mostrar que, para cada $(x,y) \in S$, a projecção ortogonal $\pi_{(x,y)}$, de $\mathbb{R}^2$ sobre $E_{(x,y)}$, está definida por

$$\pi_{(x,y)}(u,v) = \frac{1}{2}(u + ux + vy, uy + v - vx)$$

e verificar que, a partir desta fórmula, se pode obter uma demonstração independente de que $\underline{E}$ é efectivamente um fibrado vectorial.

Ex III.16 Sejam E um espaço euclidiano, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Para cada $x \in U$, define-se o *gradiente* de f no ponto x como sendo o elemento $\mathrm{grad}(f)_x \in E$ cuja imagem pelo isomorfismo $\theta: E \to L(E;\mathbb{R})$ é Df_x. Por outras palavras, $\mathrm{grad}(f)_x$ é o elemento de E definido pela condição de se ter

$$\langle \mathrm{grad}(f)_x, w \rangle = Df_x(w),$$

para cada $w \in E$.
a) Mostrar que a aplicação $\mathrm{grad}(f): U \to E$ é suave.
b) No caso em que $E = \mathbb{R}^n$, com o produto interno usual, mostrar que

$$\mathrm{grad}(f)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

c) Sendo $f: E \to \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por $f(x) = \|x\|^2$, mostrar que se tem $\mathrm{grad}(f)_x = 2x$.

Ex III.17 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n, $U \subset E$ um aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave tal que, para cada $x \in U$ tal que $f(x) = 0$, se tenha $Df_x \neq 0$. Sendo então

$$M = \{x \in U \mid f(x) = 0\},$$

mostrar que a variedade sem bordo, de dimensão $n-1$, M é orientável. **Sugestão:** Munir E de um produto interno e mostrar que $\mathrm{grad}(f)$ constitui um campo de referenciais para o fibrado vectorial normal $T(M)^{\perp}$.

Ex III.18 Mais geralmente do que no exercício III.16, sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade e $f: M \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Para cada $x \in M$, define-se o *gradiente* de f no ponto x, $\text{grad}(f)_x \in T_x(M)$, como sendo o elemento de $T_x(M)$ cuja imagem pelo isomorfismo $\theta: T_x(M) \to L(T_x(M); \mathbb{R})$ é a aplicação linear $Df_x: T_x(M) \to \mathbb{R}$. Por outras palavras, $\text{grad}(f)_x$ é o elemento de $T_x(M)$ definido pela condição de se ter

$$\langle \text{grad}(f)_x, w \rangle = Df_x(w),$$

para cada $w \in T_x(M)$.
a) Nas condições anteriores, sejam U um aberto de E, com $M \subset U$, e $\overline{f}: U \to E$ uma aplicação suave prolongando f. Mostrar que, para cada $x \in M$, o vector $\text{grad}(f)_x \in T_x(M)$ é a projecção ortogonal sobre $T_x(M)$ do vector $\text{grad}(\overline{f})_x \in E$.
b) Deduzir de a) que, se $f: M \to \mathbb{R}$ é suave, então $\text{grad}(f): M \to E$ é suave.

Ex III.19 Sejam E um espaço euclidiano e $F \subset E$ um subespaço afim, com subespaço vectorial associado F_0. Mostrar que o único elemento de F que pertence a $F_0^\perp$ é um elemento de F com norma estritamente menor que a de todos os outros elementos de F.

Ex III.20 Sejam $M \subset G$, $\widehat{M} \subset \widehat{G}$ e $f: \widehat{M} \to M$ uma aplicação suave. Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, e consideremos o fibrado vectorial imagem recíproca $f^*\underline{E}$. Dados $y_0 \in \widehat{M}$, $v \in T_{y_0}(\widehat{M})$ e $w \in (f^*\underline{E})_{y_0} = E_{f(y_0)}$, mostrar que, para cada $z \in E$, tem-se

$$(v, z) \in T_{(y_0,w)}(f^*\underline{E}) \Leftrightarrow (Df_{y_0}(v), z) \in T_{(f(y_0),w)}(\underline{E}).$$

Sugestão: Dois subespaços afins, com o mesmo subespaço vectorial associado, que tenham um elemento comum, têm que coincidir.

Ex III.21 Utilizar a conclusão do exercício III.15 para obter uma fórmula para a segunda forma fundamental do fibrado de Möbius.

Ex III.22 Seja E um espaço euclidiano ou hermitiano de dimensão n e seja $O(E)$ o correspondente grupo ortogonal que, como já provámos, é uma variedade compacta e sem bordo com dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$, no caso real, e dimensão n^2, no caso complexo. Lembremos ainda que, como se viu, para cada $\xi \in O(E)$, $T_\xi(O(E))$ é o conjunto dos $\alpha \in L(E; E)$ tais que $\alpha^* \circ \xi = -\xi^* \circ \alpha$.
a) Mostrar que, considerando em $L(E; E)$ o produto interno de Hilbert-Schmidt, no caso real, e o produto interno real associado a este, no caso complexo, a projecção ortogonal $\pi_\xi: L(E; E) \to T_\xi(O(E))$ está definida por

$$\pi_\xi(\beta) = \frac{1}{2}(\beta - \xi \circ \beta^* \circ \xi).$$

Sugestão: Utilizar o exercício I.10 para começar por examinar o que se passa

no caso particular em que $\xi = Id_E$. Reparar então que tem lugar um isomorfismo ortogonal $L_\xi \colon L(E;E) \to L(E;E)$, definido por $L_\xi(\eta) = \xi \circ \eta$.
b) Mostrar que a segunda forma fundamental de $O(E)$ está definida por

$$h_\xi(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2}(\lambda \circ \mu^* \circ \xi + \xi \circ \mu^* \circ \lambda)$$

e que esta fórmula pode também ser escrita

$$h_\xi(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2}\,\xi \circ (\lambda^* \circ \mu + \mu^* \circ \lambda).$$

Ex III.23 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n e $M \subset E$ uma variedade de dimensão menor ou igual a m em cada ponto. Se $n \geq 2m+1$, mostrar que existe um vector $u \in E$ tal que, para cada $x \in M$, $u \notin T_x(M)$. **Sugestão:** Considerar o espaço total $T(M)$ do fibrado vectorial tangente de M e aplicar o teorema de Sard a uma certa aplicação $T(M) \to E$.

Ex III.24 **(Aproximação de funções contínuas por funções suaves)** Sejam $\widehat{E}$ e E espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais munido de um produto interno, $\widehat{B} \subset \widehat{A} \subset \widehat{E}$ conjuntos, com $\widehat{B}$ fechado em $\widehat{A}$, $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $f \colon \widehat{A} \to M$ uma aplicação contínua tal que $f_{/\widehat{B}} \colon \widehat{B} \to M$ seja suave.[91] Mostrar que, para cada aplicação contínua $\delta \colon \widehat{A} \to]0, +\infty[$, existe uma aplicação suave $g \colon \widehat{A} \to M$ tal que $g_{/\widehat{B}} = f_{/\widehat{B}}$ e que, para cada $x \in \widehat{A}$, $\|g(x) - f(x)\| < \delta(x)$ (comparar com II.3.15).
Sugestão: Começar por considerar uma vizinhança tubular U de M, com a correspondente retracção suave $\rho \colon U \to M$ (cf. III.3.30). Tendo em conta II.3.15, considerar uma aplicação suave $h \colon \widehat{A} \to E$ tal que $h_{/\widehat{B}} = f_{/\widehat{B}}$ e que, para cada $x \in \widehat{A}$, $\|h(x) - f(x)\| < \min\{\frac{\delta(x)}{2}, d(f(x), E \setminus U)\}$ e tomar $g(x) = \rho(h(x))$, lembrando que $\rho(y)$ é o ponto de M à distância mínima de y.

Ex III.25 Sejam A um subconjunto de um espaço vectorial G de dimensão finita, E um espaço vectorial de dimensão finita e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Mostrar que existe um aberto U de G, com $A \subset U$, e um fibrado vectorial $\underline{F} = (F_x)_{x \in U}$, com $F_x \subset E$, tal que $\underline{E} = \underline{F}_{/A}$, isto é, que $F_x = E_x$, para cada $x \in A$. **Sugestão:** Considerar a variedade de Grassmann $G(E)$ (cf. II.5.13) e aplicar o corolário III.3.31 à aplicação suave de A para $G(E)$, que a cada x associa a projecção ortogonal de E sobre E_x.

Ex III.26 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva, admitindo uma parametrização $f \colon J \to M$, e consideremos a orientação de M associada. Notemos, para cada $t \in J$, $\vec{t}_{f(t)}$ a tangente unitária positiva, $\vec{k}_{f(t)}$ o vector curvatura e $v_t = \|f'(t)\|$ a *velocidade escalar*. Mostrar que se tem então

[91] reparar que esta condição é trivial no caso em que $\widehat{B} = \emptyset$.

$$f''(t) = v_t' \vec{t}_{f(t)} + v_t^2 \vec{k}_{f(t)}$$

(Interpretação cinemática: Olhando para f como um movimento, o vector aceleração $f''(t)$ tem componente tangencial com norma v_t', derivada da velocidade escalar, e componente normal com norma igual a $v_t^2\, k_{f(t)}$, onde $k_{f(t)}$ é a curvatura.

Ex III.27 Dados $a > 0$ e $b \neq 0$, seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a aplicação suave definida por

$$f(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt).$$

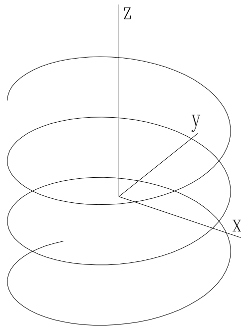

Figura 10

Mostrar que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre a *hélice* $M = f(\mathbb{R})$ e, considerando sobre a curva M a orientação associada à parametrização f, determinar, para cada $t \in \mathbb{R}$, a curvatura e a torção de M no ponto $f(t)$.

Ex III.28 Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual e seja $M \subset \mathbb{R}^2$ a *elipse* de semi-eixos a e b, com $a \geq b$.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}.$$

Mostrar que a curvatura de M no ponto (x, y) é dada por

$$k_{(x,y)} = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}$$

e deduzir que esta curvatura é máxima nos pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$, com o valor a/b^2, e é mínima nos pontos $(0, b)$ e $(0, -b)$, com o valor b/a^2.

Ex III.29 Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais que um ponto e seja $f\colon J \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Seja $M = \{(t, f(t))\}_{t \in J}$ o gráfico de f. Mostrar que M é uma variedade de dimensão 1 e que o vector curvatura de M no ponto $(t, f(t))$ é dado por

$$\vec{k}_{(t,f(t))} = \Big(\frac{-f''(t)f'(t)}{(1+f'(t)^2)^2}\,,\,\frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^2}\Big).$$

Deduzir daqui que a curvatura em $(t, f(t))$ é nula se, e só se, $f''(t) = 0$ (caso em que pode haver um *ponto de inflexão* do gráfico) e que o sinal de $f''(t)$ determina se o vector curvatura em $(t, f(t))$ aponta para cima ou para baixo (o *sentido da concavidade*).

Ex III.30 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva orientada com curvatura e torção não nulas em todos os pontos. Generalizando o processo que conduziu à definição dos vectores curvatura e torção, definir um vector "torção de segunda ordem" (ou, melhor talvez, "curvatura de terceira ordem") em cada ponto e, nos pontos em que este é não nulo, uma "trinormal principal". No mesmo espírito que em III.4.7 e III.4.15, verificar que a curva está contida num subespaço afim de dimensão 3 se, e só se, a curvatura de terceira ordem for nula. Obter neste quadro o resultado correspondente a III.4.12. No mesmo espírito que em III.4.19 e III.4.22, mostrar que, se $f\colon J \to M$ é uma parametrização de M, induzindo a orientação dada, então a curvatura de terceira ordem é igual ao produto de

$$\frac{1}{\tau_{f(t)} k_{f(t)} \|f'(t)\|^4}$$

pela projecção ortogonal de $f^{(4)}(t) = f''''(t)$ sobre o complementar ortogonal do subespaço vectorial gerado por $\vec{t}_{f(t)}, \vec{n}_{f(t)}, \vec{b}_{f(t)}$.

Ex III.31 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão 2 e $M \subset E$ uma curva e seja $\vec{n}_+ = (\vec{n}_{+x})_{x\in M}$ uma secção suave de $T(M)^\perp$, com $\|\vec{n}_{+x}\| = 1$, para cada $x \in M$. Escolhendo, para cada x, $\vec{n}_{+x}$ como normal unitária positiva e sendo k_{+x} a correspondente curvatura sinalizada, mostrar que se tem então

$$D\vec{n}_{+x}(\vec{t}_x) = -k_{+x}\,\vec{t}_x.$$

Sugestão: $\pi_x(w) = w - \langle w, \vec{n}_{+x}\rangle \vec{n}_{+x}$.

Ex III.32 Seja E um espaço euclidiano de dimensão 3 e seja $M \subset E$ uma curva suavemente orientada com curvatura diferente de 0 em todos os pontos. Sejam $\underline{F} = (F_x)_{x\in M}$ o fibrado osculador e $\vec{b}_+ = (\vec{b}_{+x})_{x\in M}$ uma secção suave de $\underline{F}^\perp$, tal que $\|\vec{b}_{+x}\| = 1$, para cada $x \in M$. Considere-se, para cada $x \in M$, $\vec{b}_{+x}$ como binormal positiva e seja τ_{+x} a correspondente torção sinalizada. Mostrar que se tem então

$$D\vec{b}_{+x}(\vec{t}_x) = -\tau_{+x}\,\vec{n}_x.$$

Sugestão: Análoga à do exercício anterior.
Nota: Costuma-se dizer que as fórmulas

$$\begin{aligned}
D\vec{t}_x(\vec{t}_x) &= k_x\,\vec{n}_x\\
D\vec{n}_x(\vec{t}_x) &= -k_x\,\vec{t}_x + \tau_{+x}\,\vec{b}_{+x}\\
D\vec{b}_{+x}(\vec{t}_x) &= -\tau_{+x}\,\vec{n}_x
\end{aligned}$$

são as *fórmulas de Frenet-Serret* da variedade M (repare-se que a segunda fórmula resulta de III.4.12 e da definição de τ_{+x} e a primeira fórmula resulta da definição de k_x e $\vec{n}_x$).

Ex III.33 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva. Diz-se que uma parametrização $f\colon J \to M$ é uma *parametrização por comprimento de arco* se se tem $\|f'(s)\| = 1$, para cada $s \in J$. Repare-se que, dados $a, b \in J$, o comprimento de f desde a até b é, por definição, igual a

$$\int_a^b \|f'(t)\|\,dt.$$

Dizer que temos uma parametrização por comprimento de arco é assim equivalente a dizer que, para cada $s \in J$, o comprimento de f de a até s é igual a $s - a$.
a) Mostrar que, se $f\colon J \to M$ é uma parametrização arbitrária, então existe um intervalo $\widehat{J} \subset \mathbb{R}$ e um difeomorfismo estritamente crescente $\varphi\colon \widehat{J} \to J$, tal que $f \circ \varphi\colon \widehat{J} \to M$ seja uma parametrização por comprimento de arco. **Sugestão:** Fixando $a \in J$, mostrar que tem lugar um difeomorfismo estritamente crescente ψ, de J sobre um intervalo $\widehat{J}$, definido por

$$\psi(t) = \int_a^t \|f'(s)\|\,ds,$$

e tomar para φ o inverso de ψ.
b) Se $f\colon J \to M$ é uma parametrização por comprimento de arco e se se considera em M a orientação associada, mostrar que se tem

$$\begin{aligned}
\vec{t}_{f(s)} &= f'(s),\\
\vec{k}_{f(s)} &= f''(s).
\end{aligned}$$

Ex III.34 Seja E um espaço euclidiano e notemos, para cada $r > 0$, $S_r \subset E$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio r,

$$S_r = \{x \in E \mid \|x\| = r\}.$$

Seja $M \subset E$ uma curva conexa.
a) Mostrar que M está contido nalgum S_r se, e só se, para cada $x \in M$, x é ortogonal a $T_x(M)$.
b) Suponhamos que M está contido em S_r, e notemos, para cada $x \in M$, $\vec{k}_x$ o vector curvatura de M no ponto x. Mostrar que se tem $\langle x, \vec{k}_x\rangle = -1$.
c) Suponhamos que a curva M está suavemente orientada e que está contida

em S_r e seja, para cada $x \in M$, $\vec{\tau}_x$ o vector torção de M no ponto x. Mostrar que a curvatura $k_x = \|\vec{k}_x\|$ é constante se, e só se, para cada $x \in M$, $\vec{\tau}_x$ é tangente a S_r no ponto x.

Ex III.35 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma curva plana (isto é, que esteja contida num certo plano afim P de E, com plano vectorial associado P_0), que seja conexa e cuja curvatura k_x tenha um valor constante $k \neq 0$. O objectivo deste exercício é demonstrar que M tem que estar contida numa certa circunferência de P.
a) Sendo, para cada $x \in M$, $\vec{n}_x$ a normal principal de M no ponto x, mostrar que $\vec{n}_x \in P_0$.
b) Mostrar que a aplicação suave $\varphi\colon M \to P$, definida por

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{k}\,\vec{n}_x,$$

tem derivada identicamente nula e toma portanto um valor constante x_0.
c) Deduzir que M está contido numa circunferência do plano P e dizer qual o centro e qual o raio.

Ex III.36 Consideremos em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, sejam $a, b, c > 0$ e seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o *elipsóide*

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1\}.$$

Escolher uma das normais unitárias a M no ponto $(a, 0, 0)$ e, relativamente a esse ponto e a essa escolha, determinar os correspondentes aplicação linear de Weingarten, curvaturas principais e pontos focais.

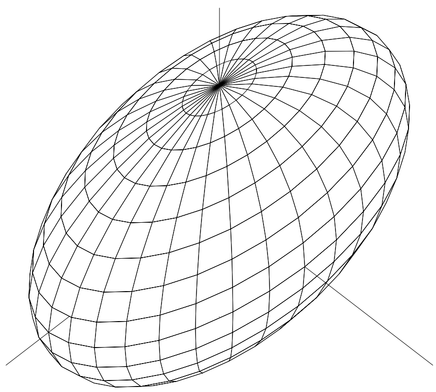

Figura 11

Ex III.37 Mesma questão que no exercício anterior, mas relativamente à superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$$

e a cada um dos pontos $(1, 1, 1)$ e $(1, 0, 0)$.

Ex III.38 Mesma questão que nos dois exercícios anteriores, mas relativamente à superfície cilíndrica

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

e a um ponto arbitrário desta superfície.

Ex III.39 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 3$, $M \subset E$ uma hipersuperfície sem bordo, $x \in M$ e $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias de M no ponto x. Seja $u \in T_x(M)$, com $\|u\| = 1$. Seja $\widehat{n}_x \in E$, tal que $\widehat{n}_x \notin T_x(M)$, $\|\widehat{n}_x\| = 1$ e $\langle \widehat{n}_x, u \rangle = 0$. Notemos P_0 o plano vectorial gerado por u e $\widehat{n}_x$ e seja $P = x + P_0$ o correspondente plano afim passando por x.

a) Mostrar que $\widehat{M} = M \cap P$ é, no ponto x, uma variedade de dimensão 1 e índice 0 e notar $\widehat{M}'$ um aberto de $\widehat{M}$, contendo x, tal que $\widehat{M}'$ seja uma curva sem bordo.

b) Seja $\widehat{h}_x : T_x(\widehat{M}') \times T_x(\widehat{M}') \to T_x(\widehat{M}')^\perp$ a segunda forma fundamental de $\widehat{M}'$ no ponto x e seja $\vec{k}_x$ o respectivo vector curvatura. Mostrar que $\vec{k}_x \in \mathbb{R}\widehat{n}_x$ e notar $\widehat{k}_x$ a correspondente curvatura sinalizada, definida por $\vec{k}_x = \widehat{k}_x \widehat{n}_x$.

c) Seja $h_x : T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ a segunda forma fundamental de M no ponto x. Mostrar que, para o vector $u \in T_x(M)$ que se está a considerar, tem-se

$$h_x(u, u) = \langle \widehat{h}_x(u, u), \vec{n}_x \rangle \vec{n}_x = \widehat{k}_x \langle \widehat{n}_x, \vec{n}_x \rangle \vec{n}_x.$$

Sugestão: Mostrar que $(u, \widehat{h}_x(u, u)) \in T_{(x,u)}(T(M))$.

d) Mostrar que a curvatura sinalizada $\widehat{k}_x$ é igual ao quociente da curvatura normal de M na direcção de u pelo cosseno do ângulo entre os vectores $\widehat{n}_x$ e $\vec{n}_x$ (*teorema de Meusnier*).

Ex III.40 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão 3 e $M \subset E$ uma superfície. Sejam $x \in M$ e $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias de M em x. Considerar uma base ortonormada u, v de $T_x(M)$, formada por vectores tangentes principais, com as correspondentes curvaturas principais k_1 e k_2. Seja $w \in T_x(M)$ com $\|w\| = 1$ e seja $\alpha \in [0, 2\pi[$ o definido pela condição de se ter

$$w = \cos(\alpha)u + \sin(\alpha)v$$

(α é o *ângulo orientado* de u para w, quando se considera o ângulo de u para v como positivo). Mostrar que a curvatura normal sinalizada de M na direcção de w é igual a

$$k_1\cos^2(\alpha) + k_2\sin^2(\alpha)$$

(*teorema de Euler*).

Ex III.41 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão 3 e $M \subset E$ uma superfície. Sejam $x \in M$ e $\vec{n}_x$ uma das normais unitárias de M em x e notemos $\lambda_x: T_x(M) \to T_x(M)$ a respectiva aplicação linear de Weingarten. Mostrar que a curvatura de Gauss e a curvatura média de M no ponto x são respectivamente iguais ao determinante de λ_x e a metade do traço de λ_x. Em consequência, para determinar estas curvaturas, não é necessário determinar as direcções principais.

Ex III.42 Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\sin(z) = y\cos(z)\}$$

(um *helicoide*).

a) Mostrar que M é uma superfície e que, para cada $(x,y,z) \in M$, os vectores

$$X_{(x,y,z)} = (\cos(z), \sin(z), 0)$$
$$Y_{(x,y,z)} = (-y, x, 1)$$

constituem uma base de $T_{(x,y,z)}(M)$.

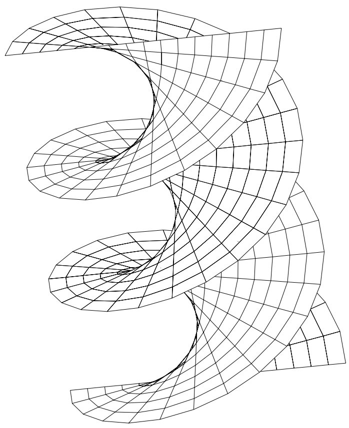

Figura 12

b) Determinar a matriz da aplicação linear de Weingarten de M na base atrás considerada e deduzir daí que a curvatura média de M é igual a 0 em todos os pontos (M é uma *superfície mínima*).

Ex III.43 Sejam $U \subset \mathbb{R}^p$ um aberto conexo, E um espaço vectorial real de dimensão finita e $f: U \to E$ uma aplicação suave tal que, para cada

$(x_1,\ldots,x_p)\in U$, sejam independentes as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_p),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1,\ldots,x_p).$$

Mostrar que $f(U)$ está contido num subespaço afim de dimensão p de E se, e só se, para cada $(x_1,\ldots,x_p)\in U$ e cada par i,j, a derivada de segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_j}(x_1,\ldots,x_p)$ é uma combinação linear das derivadas de primeira ordem $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_p),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1,\ldots,x_p)$. **Sugestão:** Considerar um fibrado vectorial de base U cujas fibras são os subespaços gerados pelas derivadas de primeira ordem e utilizar III.3.22, depois de munir E de um produto interno, para mostrar que a condição de a derivada de segunda ordem ser combinação linear das de primeira implica que a segunda forma fundamental deste fibrado é identicamente nula. Lembrar ainda a conclusão do lema III.4.6.

Ex III.44 Seja E um espaço euclidiano e consideremos sobre $L(E;E)$ o produto interno de Hilbert-Schmidt. Utilizando as fórmulas obtidas no exercício III.22, determinar o tensor de curvatura do grupo ortogonal $O(E)$.

Ex III.45 Seja E um espaço euclidiano ou hermitiano e seja $G(E)\subset L(E;E)$ o conjunto das aplicações lineares que são projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E. Determinar a segunda forma fundamental e o tensor de curvatura do fibrado vectorial tautológico, de base $G(E)$, definido na demonstração de III.1.21.

Ex III.46 **(A variedade de Grassmann)** Seja E um espaço vectorial, real ou complexo de dimensão n, munido de produto interno e consideremos a variedade de Grassmann $G(E)\subset L_{aa}(E;E)$ cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E (cf. II.5.13). Consideremos em $L_{aa}(E;E)$ o produto interno parte real do de Hilbert-Schmidt.

a) Mostrar que, se $\lambda=\pi_F\in G(E)$, então, considerando as matrizes associadas à decomposição em soma directa ortogonal $E=F\oplus F^\perp$, a projecção ortogonal de $L_{aa}(E;E)$ sobre o subespaço vectorial tangente $T_\lambda(G(E))$ está definida por

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{1,2}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0 & \alpha_{1,2}\\ \alpha_{2,1} & 0\end{bmatrix}.$$

Sugestão: Lembrar a caracterização matricial de $T_\lambda(G(E))$ no resultado referido, assim como a caracterização matricial do produto interno de Hilbert-Schmidt de $L(E;E)$ associada a uma decomposição em soma directa ortogonal (cf. I.3.10).

b) Utilizar a conclusão de a) para obter a seguinte caracterização não matricial da projecção ortogonal $\pi_\lambda\colon L_{aa}(E;E)\to T_\lambda(G(E))$:

$$\pi_\lambda(\beta)=\lambda\circ\beta+\beta\circ\lambda-2\lambda\circ\beta\circ\lambda.$$

c) Deduzir de b) as seguintes fórmulas alternativas para a segunda forma fundamental $h_\lambda \colon T_\lambda(G(E)) \times T_\lambda(G(E)) \to T_\lambda(G(E))^\perp$ da variedade $G(E)$,

$$\begin{aligned} h_\lambda(\alpha,\beta) &= \alpha\circ\beta + \beta\circ\alpha - 2\alpha\circ\beta\circ\lambda - 2\lambda\circ\beta\circ\alpha \\ h_\lambda(\alpha,\beta) &= (Id - 2\lambda)\circ(\alpha\circ\beta + \beta\circ\alpha) \\ h_\lambda(\alpha,\beta) &= (\alpha\circ\beta + \beta\circ\alpha)\circ(Id - 2\lambda) \end{aligned}$$

assim como a caracterização matricial desta segunda forma fundamental: Se α e β têm matrizes $\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$ então a matriz de $h_\lambda(\alpha,\beta)$ é

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,2}\circ\alpha_{2,1} - \alpha_{1,2}\circ\beta_{2,1} & 0 \\ 0 & \alpha_{2,1}\circ\beta_{1,2} - \beta_{2,1}\circ\alpha_{1,2} \end{bmatrix}.$$

d) Obter uma fórmula para o tensor de curvatura

$$R_\lambda \colon T_\lambda(G(E)) \times T_\lambda(G(E)) \times T_\lambda(G(E)) \to T_\lambda(G(E)).$$

Sugestão: Notar que a condição $\alpha\circ\lambda + \lambda\circ\alpha = \alpha$ para que um certo $\alpha \in L_{aa}(E;E)$ pertença a $T_\lambda(G(E))$ é equivalente a qualquer das duas condições $\alpha\circ\lambda = (Id - \lambda)\circ\alpha$ e $\lambda\circ\alpha = \alpha\circ(Id - \lambda)$.

Ex III.47 Seja E um espaço euclidiano de dimensão par $n = 2p$, consideremos no espaço vectorial $L_{-aa}(E;E)$, das aplicações lineares antiautoadjuntas, o produto interno de Hilbert-Schmidt e seja $\mathcal{F}(E) \subset L_{-aa}(E;E)$ a variedade das estruturas complexas compatíveis de E (cf. II.5.11).

a) Lembrar que, como se viu no resultado referido, $T_J(\mathcal{F}(E))$ é o conjunto dos $\alpha \in L_{-aa}(E;E)$ que verificam $\alpha\circ J = -J\circ\alpha$ e mostrar que a projecção ortogonal $\pi_J \colon L_{-aa}(E;E) \to T_J(\mathcal{F}(E))$ está definida por

$$\pi_J(\alpha) = \frac{\alpha + J\circ\alpha\circ J}{2}.$$

Sugestão: Mostrar que, se $\alpha,\beta \in L_{-aa}(E;E)$ verificam $\alpha\circ J = -J\circ\alpha$ e $\beta\circ J = J\circ\beta$, então $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$.

b) Deduzir de a) fórmulas para a segunda forma fundamental e para o tensor de curvatura

$$\begin{aligned} &h_J \colon T_J(\mathcal{F}(E)) \times T_J(\mathcal{F}(E)) \to T_J(\mathcal{F}(E))^\perp \\ &R_J \colon T_J(\mathcal{F}(E)) \times T_J(\mathcal{F}(E)) \times T_J(\mathcal{F}(E)) \to T_J(\mathcal{F}(E)). \end{aligned}$$

Ex III.48 Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ a superfície cilíndrica considerada no exercício III.38,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Determinar o tensor de curvatura de M em cada um dos seus pontos. Será que o resultado a que chegou era previsível, tendo em conta as conclusões do citado exercício?

Ex III.49 Sejam $M \subset G$ uma variedade conexa, E um espaço euclidiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$.
a) Mostrar que, se $X = (X_x)_{x \in M}$ é uma secção suave paralela de $\underline{E}$, então é constante a aplicação de M em $\mathbb{R}$, que a x associa $\|X_x\|$.
b) Mostrar que, no caso em que cada E_x tem dimensão 1, se $X = (X_x)_{x \in M}$ é uma secção suave de $\underline{E}$, com $\|X_x\|$ constante, então X é uma secção paralela. **Sugestão:** Mostrar que $\nabla X_x(u)$ é ortogonal a X_x.

Ex III.50 A experiência diz-nos que se pode *enrolar* uma parte aberta de um plano sobre uma parte aberta de uma superfície cónica, sem introduzir deformações, pelo que, de acordo com o teorema egrégio de Gauss, esta última, tal como o plano, deve ter curvatura de Gauss nula em todos os pontos. Considerar, para fixar ideias, a superfície cónica em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno canónico, de vértice em $(0,0,0)$ e tendo como directriz a circunferência de equações $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ e $z = 1$ (mais precisamente, e para termos uma variedade, retiramos o vértice).
a) Determinar uma equação que defina a superfície cónica.
b) Calcular, para cada (x, y, z) na superfície cónica, as direcções principais, as curvaturas principais e a curvatura de Gauss.
c) Arranjar uma expressão analítica para uma isometria de um aberto de $\mathbb{R}^2$ sobre um aberto da superfície cónica.

Ex III.51 Recortar um círculo sobre uma folha de papel colocando-o sobre uma superfície cilíndrica de revolução. Fixar o centro do círculo à superfície e fazer o círculo rodar, de modo a mantê-lo sempre em contacto total com a superfície. De que modo esta *experiência* poderá contribuir para nos convencer de que a derivada de uma isometria não tem que aplicar as direcções principais sobre as direcções principais?

Ex III.52 Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset G$ um conjunto, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Seja, para cada $x \in A$, $E'_x \subset E_x$ um subespaço vectorial e $\widehat{\pi}_x \colon E_x \to E'_x$ a projecção ortogonal.
a) Mostrar que, se $\pi_x \colon E \to E_x$ e $\pi'_x \colon E \to E'_x$ são as projecções ortogonais, então $\pi'_x = \widehat{\pi}_x \circ \pi_x$ e $\widehat{\pi}_x = \pi'_{x/E_x}$. **Sugestão:** Um dos processos é lembrar que a projecção ortogonal é a aplicação linear adjunta da inclusão.
b) Deduzir de a) que $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ é também um fibrado vectorial se, e só se, $\widehat{\pi} = (\widehat{\pi}_x)_{x \in A} \colon \underline{E} \to \underline{E}$ é um morfismo linear suave. Mostrar que, quando isso acontecer, a segunda forma fundamental $\widehat{h}_x \colon T_x(A) \times E'_x \to E_x$ de $\underline{E'}$ relativamente a $\underline{E}$ (cf. III.8.21) está definida por

$$\widehat{h}_x(u, w) = \nabla \widehat{\pi}_x(u)(w).$$

c) Mostrar que, sendo E''_x o complementar ortogonal de E'_x em E_x, $\underline{E''} = (E''_x)_{x \in A}$ é um fibrado vectorial se, e só se $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in A}$ é um fibrado vectorial.

Ex III.53 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, onde E e E' estão munidos de produto interno e notemos π_x e π'_x as projecções ortogonais de E sobre E_x e de E' sobre E'_x, respectivamente. Seja $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear suave e consideremos o prolongamento $\lambda^\perp = (\lambda^\perp_x)_{x\in A}: A \to L(E;E')$ correspondente, com $\lambda^\perp_x = \lambda_x \circ \pi_x$. Mostrar que, para cada $x \in A$ e $u \in T_x(A)$, a derivada covariante $\nabla\lambda_x(u): E_x \to E'_x$ está definida por

$$\nabla\lambda_x(u)(w) = D(\lambda^\perp)_x(u)(w) - h'_x(u, \lambda_x(w)) = \pi'_x(D(\lambda^\perp)_x(u)(w)).$$

Deduzir que, para cada $x \in A$, $u \in T_x(A)$, $w \in E_x$ e $w' \in E'_x$, tem-se

$$\langle \nabla\lambda_x(u)(w), w'\rangle = \langle D(\lambda^\perp)_x(u)(w), w'\rangle.$$

Ex III.54 **(O morfismo linear adjunto)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, onde E e E' estão munidos de produto interno, e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear.

a) Mostrar que, se $\lambda^\perp_x = \lambda_x \circ \pi_x: E \to E'$ é o prolongamento de λ_x associado ao produto interno de E, então o prolongamento $(\lambda^*_x)^\perp = \lambda^*_x \circ \pi'_x: E \to E$ da aplicação linear adjunta $\lambda^*_x: E'_x \to E_x$ é igual a $(\lambda^\perp_x)^*$. **Sugestão:** Reparar que $\lambda^\perp_x$, como aplicação $E \to E'$, é a composta $\iota'_x \circ \lambda_x \circ \pi_x$, onde $\iota'_x: E'_x \to E'$ é a inclusão e $\pi_x: E \to E_x$ é a projecção ortogonal, e lembrar que a adjunta de uma inclusão é a correspondente projecção ortogonal.

b) Deduzir de a) e da última igualdade no exercício precedente que, se $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear suave, então o morfismo linear $\lambda^* = (\lambda^*_x)_{x\in A}: \underline{E'} \to \underline{E}$ é também suave e que a sua derivada covariante está definida por

$$\nabla(\lambda^*)_x(u) = (\nabla\lambda_x(u))^*.$$

Ex III.55 Sejam $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E'_x \subset E$, onde E está munido de produto interno. Diz-se que $\underline{E}$ é um *subfibrado vectorial paralelo* de $\underline{E'}$ se, sendo $\iota_x: E_x \to E'_x$ as aplicações lineares inclusão, $\iota = (\iota_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ é um morfismo linear paralelo.

a) Mostrar que $\underline{E}$ é um subfibrado vectorial paralelo se, e só se, notando $\widehat{\pi}_x$ a projecção ortogonal de E'_x sobre E_x, $\widehat{\pi} = (\widehat{\pi}_x)_{x\in A}: \underline{E'} \to \underline{E}$ é um morfismo linear paralelo. **Sugestão:** Lembrar que $\widehat{\pi}_x: E'_x \to E_x$ é a aplicação linear adjunta de $\iota_x: E_x \to E'_x$.

b) Mostrar que $\underline{E}$ é um subfibrado vectorial paralelo se, e só se, para cada $x \in A$, a segunda forma fundamental $h_x: T_x(A) \times E_x \to E^\perp_x$ é uma restrição da segunda forma fundamental $h'_x: T_x(A) \times E'_x \to {E'_x}^\perp$, ou, o que é equivalente, se, e só se, para cada $x \in A$, a segunda forma fundamental $\underline{E}$ relativamente a $\underline{E'}$, $\widehat{h}_x: T_x(A) \times E_x \to E'_x$, é nula .

c) Mostrar que $\underline{E}$ é um subfibrado vectorial paralelo se, e só se, para cada

$x \in A$, $u \in T_x(A)$ e $w \in E_x$, $h_x(u,w) \in E_x'^{\perp}$.

d) Suponhamos que $W_1 = (W_{1x})_{x\in A}, \dots, W_p = (W_{p_x})_{x\in A}$ são secções suaves paralelas de $\underline{E'}$ tais que, para cada $x \in A$, $W_{1x}, \dots, W_{p_x}$ seja uma base de E_x. Mostrar que $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ é então um subfibrado vectorial paralelo de $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$. **Sugestão:** Reparar que os W_j também são secções suaves paralelas de $\underline{E}$ e deduzir que, para cada $x \in A$ e $u \in T_x(A)$, tem-se $\nabla\iota_x(u)(W_{jx}) = 0$.

Ex III.56 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset M' \subset G$ duas variedades. Diz-se que M é uma *subvariedade totalmente geodésica* de M' se a inclusão $\iota: M \to M'$ é uma aplicação paralela (cf. III.8.29).

a) Verificar que M é uma subvariedade totalmente geodésica de M' se, e só se, $T(M)$ é um subfibrado vectorial paralelo de $T(M')_{/M}$.

b) Verificar que M é uma subvariedade totalmente geodésica de M' se, e só se, a segunda forma fundamental $h_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^{\perp}$ é uma restrição da segunda forma fundamental $h_x: T_x(M') \times T_x(M') \to T_x(M')^{\perp}$, para cada $x \in M$.

c) Verificar M é uma subvariedade totalmente geodésica de M' se, e só se, para cada $x \in U$ e $u, v \in T_x(M)$, $h_x(u,v) \in T_x(M')^{\perp}$.

Ex III.57 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear suave. Mostrar que são equivalentes as três propriedades seguintes:

1) Para cada $x_0 \in A$ existe um aberto U de A, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, a dimensão de $\lambda_x(E_x)$ coincide com a de $\lambda_{x_0}(E_{x_0})$ (a característica de λ_x é localmente constante).

2) $(\lambda_x(E_x))_{x\in A}$ é um fibrado vectorial.

3) Sendo $E''_x = \ker(\lambda_x) \subset E_x$, $(E''_x)_{x\in A}$ é um fibrado vectorial.

Sugestão: Na implicação 1) $\Rightarrow$ 2) utilizar campos de referenciais locais. Ter em conta III.8.13.

Ex III.58 **(Justificação alternativa da alínea c) do exercício III.10)** Sejam E um espaço euclidiano ou hermitiano de dimensão n, $0 \le k \le n$ e $G_k(E) \subset L_{aa}(E;E)$ a variedade de Grassmann cujos elementos são as projecções ortogonais π_F, com $F \subset E$ subespaço vectorial de dimensão k (cf. II.5.13). Seja $GL(E)$ o aberto de $L(E;E)$ constituído pelos isomorfismos $\xi: E \to E$.

a) Reparar que tem lugar um morfismo linear suave do fibrado vectorial constante de base $GL(E) \times G_k(E)$ e fibra E para ele mesmo, que a cada (ξ, π_F) associa a aplicação linear $\xi: E \to E$ e que tem lugar um fibrado vectorial de base $GL(E) \times G_k(E)$ cuja fibra em (ξ, π_F) é o subespaço vectorial F de E.

b) Utilizar III.8.13 para deduzir que tem lugar um fibrado vectorial de base $GL(E) \times G_k(E)$ cuja fibra em (ξ, π_F) é $\xi(F)$ e utilizar esta conclusão para obter uma nova justificação do facto de ser suave a aplicação $GL(E) \times G_k(E) \to G_k(E)$ definida por $(\xi, \pi_F) \mapsto \pi_{\xi(F)}$.

Ex III.59 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}\colon \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear. Mostrar que λ é suave se, e só se, qualquer que seja a secção suave $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$, a secção $\lambda(W) = (\lambda_x(W_x))_{x\in A}$ de $\underline{E'}$ é também suave. **Sugestão:** Uma das implicações é já conhecida; para a outra lembrar que a suavidade de um morfismo linear é uma questão local e reparar que, dado $x_0 \in A$, se pode considerar uma base $w_1, \ldots, w_n$ de $T_{x_0}(A)$ e que então têm lugar secções suaves $(\pi_x(w_j))_{x\in A}$ de $\underline{E}$ que, restringidas convenientemente, vão dar um campo de referenciais da restrição de $\underline{E}$ tendo então em conta III.8.11.
Enunciar e demonstrar uma condição análoga para a suavidade de um morfismo bilinear.

Ex III.60 **(Morfismos lineares como secções)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, onde E e E' estão munidos de produto interno e notemos π_x e π'_x as projecções ortogonais de E sobre E_x e de E' sobre E'_x, respectivamente.
a) Mostrar que, para cada $x \in A$, tem lugar um isomorfismo de $L(E_x; E'_x)$ sobre um subespaço vectorial $L^\perp(E_x; E'_x)$ de $L(E; E')$, que a cada λ associa o seu prolongamento $\lambda^\perp = \lambda \circ \pi_x$ associado ao produto interno de E.
b) Verificar que $L^\perp(E_x; E'_x)$ é o conjunto dos $\lambda \in L(E; E')$ tais que $\lambda(E) \subset E'_x$ e $\lambda_{/E_x^\perp} = 0$, isto é, em termos de matrizes de aplicações lineares relativas às decomposições em soma directa ortogonal $E = E_x \oplus E_x^\perp$ e $E' = E'_x \oplus {E'_x}^\perp$, o conjunto daqueles cuja matriz é do tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e que o isomorfismo referido em a) está definido, em termos matriciais, por

$$\lambda_{1,1} \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Utilizar a caracterização matricial do produto interno de Hilbert-Schmidt em $L(E; E')$ referida em I.3.10 para mostrar que o isomorfismo referido em a) é um isomorfismo ortogonal e para mostrar que a projecção ortogonal $\widehat{\pi}_x$ de $L(E; E')$ sobre $L^\perp(E_x; E'_x)$ está definida por

$$\widehat{\pi}_x(\lambda) = \pi'_x \circ \lambda \circ \pi_x,$$

ou seja, em termos matriciais, por

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Mostrar que a família $L^\perp(\underline{E}; \underline{E'}) = (L^\perp(E_x; E'_x))_{x\in A}$ de subespaços vectoriais de $L(E; E')$ é um fibrado vectorial e determinar a respectiva segunda forma fundamental

$$\widehat{h}_x: T_x(A) \times L^{\perp}(E_x; E'_x) \to L^{\perp}(E_x; E'_x)^{\perp}.$$

e) Verificar que um morfismo linear $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ é suave se, e só se, $(\lambda_x^{\perp})_{x\in A}$ é uma secção suave do fibrado vectorial $L^{\perp}(\underline{E}; \underline{E'})$ e que, nesse caso, para cada $x \in A$ e $u \in T_x(A)$, o elemento de $L^{\perp}(E_x; E'_x)$ associado a $\nabla\lambda_x(u) \in L(E_x; E'_x)$ coincide com a derivada covariante da secção $(\lambda_x^{\perp})_{x\in A}$ no ponto x na direcção de u.

Ex III.61 **(Paralelismo do traço)** Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, onde E está munido de produto interno, e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E}$ um morfismo linear suave. Seja $\varphi: A \to \mathbb{K}$ a aplicação definida por $\varphi(x) = \mathrm{Tr}(\lambda_x)$.
a) Reparando que, para cada $x \in A$, a matriz do prolongamento $\lambda_x^{\perp}: E \to E$ de λ_x, associado ao produto interno, relativamente à decomposição em soma directa ortogonal $E = E_x \oplus E_x^{\perp}$ é

$$\begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mostrar que se tem $\mathrm{Tr}(\lambda_x) = \mathrm{Tr}(\lambda_x^{\perp})$.
b) Deduzir de a) que $\varphi: A \to \mathbb{K}$ é suave e que, para cada $x \in A$ e $u \in T_x(A)$,

$$D\varphi_x(u) = \mathrm{Tr}(D(\lambda^{\perp})_x(u)).$$

c) Mostrar que a matriz da aplicação linear $D(\lambda^{\perp})_x(u): E \to E$ relativamente à decomposição atrás referida é da forma

$$\begin{bmatrix} \nabla\lambda_x(u) & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix},$$

para aplicações lineares convenientes $\alpha_{1,2}: E_x^{\perp} \to E_x$ e $\alpha_{2,1}: E_x \to E_x^{\perp}$, e deduzir que se tem também

$$D\varphi_x(u) = \mathrm{Tr}(\nabla\lambda_x(u)).$$

Sugestão: Para cada $w \in E$, derivar ambos os membros da identidade $\pi_x(\lambda_x^{\perp}(w)) = \lambda_x^{\perp}(w)$ e atender à caracterização de $\nabla\lambda_x(u)(w)$ no exercício III.53.

Ex III.62 Sejam $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, onde E e E' estão munidos de produto interno, e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ e $\mu = (\mu_x)_{x\in A}: \underline{E} \to \underline{E'}$ dois morfismos lineares suaves. Sendo $\psi: A \to \mathbb{K}$ a aplicação definida por $\psi(x) = \langle \lambda_x, \mu_x \rangle$ (produto interno de Hilbert-Schmidt), mostrar que ψ é suave e que

$$D\psi_x(u) = \langle \nabla\lambda_x(u), \mu_x \rangle + \langle \lambda_x, \nabla\mu_x(u) \rangle.$$

Sugestão: Reparar que se tem $\langle \lambda_x, \mu_x \rangle = \langle \lambda_x^{\perp}, \mu_x^{\perp} \rangle$, pela caracterização matricial do produto interno de Hilbert-Schmidt, e utilizar uma propriedade análoga à da alínea c) do exercício precedente.

Ex III.63 Sejam $A \subset G$, E e E' espaços vectoriais de dimensão finita munidos de produto interno e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in A}$ fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$, e consideremos o correspondente fibrado vectorial produto $\underline{E} \times \underline{E'} = (E_x \times E'_x)_{x\in A}$. Mostrar que têm lugar morfismos lineares suaves paralelos

$$\pi_1 = (\pi_{1x})_{x\in A} \colon \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E}, \quad \pi_2 = (\pi_{2x})_{x\in A} \colon \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E'},$$

onde $\pi_{1x} \colon E_x \times E'_x \to E_x$ e $\pi_{2x} \colon E_x \times E'_x \to E'_x$ são as projecções canónicas.

Ex III.64 **(Paralelismo e curvatura)** Sejam $M \subset G$ uma variedade, E e E' espaços vectoriais de dimensão finita munidos de produto interno e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x\in M}$ fibrados vectoriais, com $E_x \subset E$ e $E'_x \subset E'$. Seja $\lambda = (\lambda_x)_{x\in M} \colon \underline{E} \to \underline{E'}$ um morfismo linear suave paralelo. Sendo R_x e R'_x os tensores de curvatura de $\underline{E}$ e $\underline{E'}$, respectivamente, mostrar que se tem

$$R'_x(u, v, \lambda_x(w)) = \lambda_x(R_x(u, v, w)),$$

quaisquer que sejam $u, v \in T_x(M)$ e $w \in E_x$. **Sugestão:** Utilizar a caracterização do tensor de curvatura em III.6.9 (por esse motivo é que pedimos que a base fosse uma variedade).
Mostrar analogamente que, para um morfismo bilinear suave paralelo $\mu \colon \underline{E} \times \underline{E'} \to \underline{E''}$, tem-se

$$R''_x(u, v, \mu_x(w, w')) = \mu_x(R_x(u, v, w), w') + \mu_x(w, R'_x(u, v, w')).$$

Ex III.65 **(Paralelismo das operações de espaço vectorial)** Sejam $A \subset G$, E um espaços vectorial de dimensão finita, real ou complexo, munido de produto interno e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$.
a) Mostrar que tem lugar um morfismo linear suave paralelo

$$+ = (+_x)_{x\in A} \colon \underline{E} \times \underline{E} \to \underline{E},$$

onde, $+_x \colon E_x \times E_x \to E_x$ é a operação de soma.
b) Mostrar que tem lugar um morfismo bilinear suave paralelo

$$\mu = (\mu_x)_{x\in A} \colon \mathbb{K}_A \times \underline{E} \to \underline{E},$$

onde $\mu_x \colon \mathbb{K} \times E_x \to E_x$ é a multiplicação pelos escalares.

Ex III.66 Lembrar que, como se viu em III.5.24, se E é um espaço euclidiano, a segunda forma fundamental da hipersuperície esférica de centro 0 e raio r, $S_r = \{x \in E \mid \|x\| = r\}$ é a aplicação $h_x \colon T_x(S_r) \times T_x(S_r) \to T_x(S_r)^\perp$ definida por

$$h_x(v,w) = -\frac{1}{r^2}\,\langle v,w\rangle\,x.$$

Mostrar que S_r tem segunda forma fundamental paralela, isto é, que o morfismo bilinear suave $(h_x)_{x\in S_r}: T(S_r)\times T(S_r)\to T^\perp(S_r)$ é paralelo.

Ex III.67 Sejam $A\subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E}=(E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial com $E_x\subset E$. Sejam $\theta:\overline{E}\to L(E;\mathbb{K})$ e, para cada $x\in A$, $\theta_x:\overline{E_x}\to L(E_x;\mathbb{K})$ os isomorfismos associados aos produtos internos (cf. I.2.9). Sejam $W=(W_x)_{x\in A}$ uma secção de $\underline{E}$ e $\lambda=(\lambda_x)_{x\in A}:\underline{E}\to\mathbb{K}_A$ o morfismo linear definido por $\lambda_x=\theta_x(W_x)$. Mostrar que a secção W é suave se, e só se, o morfismo linear λ é suave e que, quando isso acontecer, tem-se $\nabla\lambda_x(u)=\theta_x(\nabla W_x(u))$. **Sugestão:** Mostrar que o prolongamento de $\lambda_x=\theta_x(W_x)$ associado ao produto interno, $\lambda_x^\perp: E\to\mathbb{K}$, não é mais do que $\theta(W_x)$ e atender à conclusão do exercício III.53.

Ex III.68 Sejam $A\subset G$, E e E' espaços euclidianos ou hermitianos e $\underline{E}=(E_x)_{x\in A}$ e $\underline{E'}=(E'_x)_{x\in A}$ fibrados vectoriais, com $E_x\subset E$ e $E'_x\subset E'$. Seja $\lambda:\underline{E}\times\underline{E}\to\underline{E'}$ um morfismo bilinear suave simétrico (respectivamente, antissimétrico), isto é, tal que cada $\lambda_x: E_x\times E_x\to E'_x$ seja uma aplicação bilinear simétrica (respectivamente antissimétrica). Mostrar que, para cada $x\in A$ e $u\in T_x(A)$, $\nabla\lambda_x(u): E_x\times E_x\to E'_x$ é uma aplicação bilinear simétrica (respectivamente antissimétrica). **Sugestão:** Reparar que os prolongamentos $\lambda_x^\perp: E\times E\to E'$ associados ao produto interno de E são ainda aplicações bilineares simétricas (respectivamente antissimétricas) e utilizá-los para calcular a derivada covariante.

Ex III.69 Sejam G um espaço euclidiano, $M\subset G$ uma variedade e $f: M\to\mathbb{R}$ uma aplicação suave com gradiente $\mathrm{grad}(f)=(\mathrm{grad}(f)_x)_{x\in M}$, que sabemos ser uma secção suave de $T(M)$ (cf. o exercício III.18). Mostrar que a Hessiana $\beta(f)_x: T_x(M)\times T_x(M)\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\beta(f)_x(u,v)=\langle\nabla\,\mathrm{grad}(f)_x(u),v\rangle=\langle D\,\mathrm{grad}(f)_x(u),v\rangle.$$

Sugestão: Lembrar que, nas notações do exercício precedente, tem-se $Df_x=\theta_x(\mathrm{grad}(f)_x)$.

Ex III.70 Sejam G, G' e G'' espaços euclidianos, $M\subset G$, $M'\subset G'$ e $M''\subset G''$ variedades e $f: M\to M'$ e $g: M'\to M''$ duas aplicações suaves. Mostrar que a Hessiana da aplicação composta $g\circ f: M\to M''$ é caracterizada por

$$\beta(g\circ f)_x(u,v)=\beta(g)_{f(x)}(Df_x(u),Df_x(v))+Dg_{f(x)}(\beta(f)_x(u,v)).$$

Deduzir, em particular, que, se f e g são aplicações paralelas, também $g\circ f$ é uma aplicação paralela.

Ex III.71 Sejam G um espaço euclidiano, $M\subset G$ uma variedade sem bordo e $f: M\to\mathbb{R}$ uma aplicação suave. Seja $x_0\in M$ tal que $Df_{x_0}=0$ e que a

Hessiana $\beta(f)_{x_0}: T_{x_0}(M) \times T_{x_0}(M) \to \mathbb{R}$ seja uma aplicação bilinear definida positiva (cf. o exercício I.37). Mostrar que f tem em x_0 um mínimo local estrito. **Sugestão:** Considerar um aberto V de um espaço vectorial de dimensão finita, com $0 \in V$, e um difeomorfismo φ de V sobre um aberto U de M, com $\varphi(0) = x_0$, e aplicar o exercício I.38 à composta $f \circ \varphi: V \to \mathbb{R}$, tendo em conta o exercício precedente.

Ex III.72 **(A derivada exterior de uma forma diferencial de grau 1)** Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita, que munimos dum produto interno auxiliar, $M \subset G$ uma variedade, F um espaço vectorial de dimensão finita e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}: T(M) \to F_M$ um morfismo linear suave (uma *forma diferencial de grau* 1 com valores em F).

a) Mostrar que, para cada $x \in M$, tem lugar uma aplicação bilinear antissimétrica $d\omega_x: T_x(M) \times T_x(M) \to F$ (a *derivada exterior* de ω no ponto x) definida por

$$d\omega_x(u,v) = \nabla\omega_x(u)(v) - \nabla\omega_x(v)(u).$$

Mostrar ainda que, se $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_x)_{x \in M}$ é uma aplicação suave de M em $L(G; F)$, com cada ω_x restrição de $\overline{\omega}_x$, então tem-se também

$$d\omega_x(u,v) = D\overline{\omega}_x(u)(v) - D\overline{\omega}_x(v)(u),$$

o que mostra, em particular, que a derivada exterior não depende do produto interno auxiliar que se considerou em G.

b) Mostrar que $d\omega = (d\omega_x)_{x \in M}: T(M) \times T(M) \to F_M$ é um morfismo bilinear suave.

c) Mostrar que, se $f: M \to F$ é uma aplicação suave, então tem lugar uma forma diferencial de grau 1, $df: T(M) \to F_M$, definida por $df_x = Df_x$, e que se tem então $ddf = 0$.

Ex III.73 **(A derivada exterior de uma forma diferencial de grau 2)[92]** Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita, que munimos dum produto interno auxiliar, $M \subset G$ uma variedade, F um espaço vectorial de dimensão finita e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}: T(M) \times T(M) \to F_M$ um morfismo bilinear suave antissimétrico, isto é, verificando $\omega_x(v,u) = -\omega_x(u,v)$ (uma *forma diferencial de grau* 2, com valores em F).

a) Mostrar que, para cada $x \in M$, tem lugar uma aplicação trilinear

$$d\omega_x: T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \to F$$

(a *derivada exterior* de ω no ponto x) definida por

[92]Este exercício pode ser generalizado para formas diferenciais de grau p (o exercício precedente correspondendo então ao caso $p = 1$) mas preferimos não apresentar essa generalização para evitar expressões mais pesadas e a necessidade de examinar alguns instrumentos algébricos que não nos interessam de momento.

$$d\omega_x(u,v,w) = \nabla\omega_x(u)(v,w) - \nabla\omega_x(v)(u,w) + \nabla\omega_x(w)(u,v),$$

e que esta aplicação bilinear é antissimétrica (isto é, antissimétrica em cada par de variáveis). **Sugestão:** Lembrar a conclusão do exercício III.68.
b) Mostrar que, sendo $A^2(G;F)$ o espaço vectorial das aplicações bilineares antissimétricas $G \times G \to F$, existe uma aplicação suave $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_x)_{x\in M}$ de M em $A^2(G;F)$ tal que cada ω_x seja uma restrição de $\overline{\omega}_x$ (pensar no prolongamento de ω_x associado a um produto interno de G) e que, qualquer que seja a aplicação suave $\overline{\omega}$ nessas condições, tem-se também

$$d\omega_x(u,v,w) = D\overline{\omega}_x(u)(v,w) - D\overline{\omega}_x(v)(u,w) + D\overline{\omega}_x(w)(u,v),$$

o que mostra, em particular, que a derivada exterior não depende do produto interno auxiliar que se considerou em G.
c) Mostrar que $d\omega = (d\omega_x)_{x\in M}: T(M) \times T(M) \times T(M) \to F_M$ é um morfismo trilinear suave.
d) Mostrar que, se $\omega = (\omega_x)_{x\in M}: T(M) \to F_M$ é uma forma diferencial de grau 1, com valores em F, então a forma diferencial de grau 2, com valores em F, $d\omega: T(M) \times T(M) \to F_M$ referida no exercício precedente, verifica $dd\omega = 0$. **Sugestão:** Partir de uma aplicação suave $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_x)_{x\in M}$ de M em $L(G;F)$ e prolongá-la a um aberto de G contido em M, como caminho para obter um prolongamento para $d\omega$.

Ex III.74 **(Derivada de Lie de um morfismo linear)** Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita, que munimos dum produto interno auxiliar, $M \subset G$ uma variedade, $X = (X_x)_{x\in M}$ um campo vectorial suave e $\lambda = (\lambda_x)_{x\in M}$: $T(M) \to T(M)$ um morfismo linear suave. Para cada $x \in M$ define-se então uma aplicação linear $\mathcal{L}_X(\lambda)_x: T_x(M) \to T_x(M)$, a *derivada de Lie* de λ *associada ao campo vectorial* X, por

$$\mathcal{L}_X(\lambda)_x(u) = \nabla\lambda_x(X_x)(u) + \lambda_x(\nabla X_x(u)) - \nabla X_x(\lambda_x(u)).$$

Mostrar que, se $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_x)_{x\in M}$ é uma aplicação suave de M em $L(G;G)$ tal que cada λ_x é uma restrição de $\overline{\lambda}_x$, então

$$\mathcal{L}_X(\lambda)_x(u) = D\overline{\lambda}_x(X_x)(u) + \overline{\lambda}_x(DX_x(u)) - DX_x(\lambda_x(u))$$

e deduzir daqui que a derivada de Lie de λ não depende do produto interno auxiliar considerado em G e que $\mathcal{L}_X(\lambda) = (\mathcal{L}_X(\lambda)_x)_{x\in M}: T(M) \to T(M)$ é também um morfismo linear suave.

Ex III.75 **(Derivada de Lie de um morfismo bilinear)[93]** Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita, que munimos dum produto interno auxiliar,

---

[93]Este exercício e o precedente, são mais exemplos do que uma teoria geral da derivada de Lie. Pode-se definir, mais geralmente, a derivada de Lie de um morfismo multilinear suave cujo domínio é um produto de factores $T(M)$ e o espaço de chegada é $T(M)$ ou um fibrado vectorial constante F_M.

$M \subset G$ uma variedade, $X = (X_x)_{x\in M}$ um campo vectorial suave, F um espaço vectorial de dimensão finita e $\mu = (\mu_x)_{x\in M}\colon T(M) \times T(M) \to F_M$ um morfismo bilinear suave. Para cada $x \in M$ define-se então uma aplicação linear $\mathcal{L}_X(\mu)_x\colon T_x(M) \times T_x(M) \to F$, a *derivada de Lie* de μ *associada ao campo vectorial* X, por

$$\mathcal{L}_X(\mu)_x(u,v) = \nabla\mu_x(X_x)(u,v) + \mu_x(\nabla X_x(u),v) + \mu_x(u,\nabla X_x(v)).$$

Mostrar que, se $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_x)_{x\in M}$ é uma aplicação suave de M em $L(G,G;F)$ tal que cada μ_x é uma restrição de $\overline{\mu}_x$, então

$$\mathcal{L}_X(\mu)_x(u,v) = D\overline{\mu}_x(X_x)(u,v) + \overline{\mu}_x(DX_x(u),v) + \overline{\mu}_x(u,DX_x(v))$$

e deduzir daqui que a derivada de Lie de μ não depende do produto interno auxiliar tomado em G e que $\mathcal{L}_X(\mu) = (\mathcal{L}_X(\mu)_x)_{x\in M}\colon T(M) \times T(M) \to F_M$ é também um morfismo linear suave.

Ex III.76 Seja E um espaço euclidiano ou hermitiano e consideremos em $L(E;E)$ o produto interno real, parte real do de Hilbert-Schmidt. Sendo $G(E)$ a variedade de Grassmann cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E e $O(E)$ o grupo ortogonal, lembrar que, como se viu no exercício II.40, tem lugar um difeomorfismo

$$\varphi\colon G(E) \to \widehat{\mathcal{R}}_2(E) \subset O(E)$$

definido por $\varphi(\lambda) = 2\lambda - Id$. Mostrar que $\varphi\colon G(E) \to O(E)$ é uma aplicação paralela. **Sugestão:** Lembrar as caracterizações das segundas formas fundamentais de $G(E)$ e de $O(E)$ nos exercícios III.22 e III.46.

Ex III.77 Sejam G e G' espaços euclidianos, $M \subset G$ e $M' \subset G'$ duas variedades sem bordo e $f\colon M \to M'$ uma aplicação suave. Diz-se que f é uma *submersão riemaniana* se $Df_x\colon T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$ é uma aplicação linear coortogonal, qualquer que seja $x \in M$ (cf. o exercício I.9), isto é

$$Df_x \circ (Df_x)^* = Id_{T_{f(x)}(M')},$$

qualquer que seja $x \in M$. Em particular, cada $Df_x\colon T_x(M) \to T_{f(x)}(M')$ é sobrejectiva, pelo que f é uma submersão.
Seja $f\colon M \to M'$ uma submersão riemaniana. Para cada $y \in M'$, notamos $M_y \subset M$, $M_y = \{x \in M \mid f(x) = y\}$ a *fibra* correspondente a y e lembramos que, pelo teorema de construção de variedades como imagens recíprocas, M_y é uma variedade sem bordo com espaços tangentes $T_x(M_y) = \ker(Df_x)$ (aos vectores de $T_x(M)$ em $\ker(Df_x)$ também se costuma dar o nome de *vectores tangentes verticais*).
a) Aos vectores de $T_x(M)$ em $\ker(Df_x)^\perp$ também se costuma dar o nome de *vectores tangentes horizontais*. Lembrar que, pelo exercício I.1, estes vectores são os que estão na imagem de $(Df_x)^*\colon T_{f(x)}(M') \to T_x(M)$ e que, pelo exercício I.9, a restrição de Df_x é um isomorfismo ortogonal de

$\ker(Df_x)^\perp$ sobre $T_{f(x)}(M')$.
b) Mostrar que se tem, para cada $x \in M$ e $u \in T_x(M)$,

$$(\nabla Df_x(u)) \circ (Df_x)^* + Df_x \circ (\nabla Df_x(u))^* = 0$$

e deduzir que, sendo $u \in T_x(M)$ e $v', w' \in T_{f(x)}(M')$, a Hessiana $\beta(f)_x$ verifica

$$\langle \beta(f)_x(u, (Df_x)^*(v')), w' \rangle + \langle \beta(f)_x(u, (Df_x)^*(w')), v' \rangle = 0.$$

Sugestão: Considerar a derivada covariante de ambos os membros da identidade $Df \circ (Df)^* = Id_{f^*T(M')}$.
c) Mostrar que, se $u, v \in T_x(M)$ são horizontais, então $\beta(f)_x(u, v) = 0$.
Sugestão: Pôr $u = (Df_x)^*(u')$ e $v = (Df_x)^*(v')$. Substituir u por $(Df_x)^*(u')$ na última igualdade em b) e utilizar o "truque" já encontrado de juntar a igualdade obtida com as outras duas que se obtêm por permutação circular das variáveis u', v', w', somando então as três igualdades depois de multiplicar a última por -1.
d) Seja $\widehat{h}_x: T_x(M_{f(x)}) \times T_x(M_{f(x)}) \to T_x(M)$ a segunda forma fundamental da fibra $M_{f(x)}$, que contém x, relativamente a M (cf. III.8.21). Mostrar que, se $u, v \in T_x(M)$ são verticais (isto é, $u, v \in T_x(M_{f(x)})$), então

$$\beta(f)_x(u, v) = -Df_x(\widehat{h}_x(u, v)).$$

Sugestão: Aplicar a fórmula para a Hessiana da aplicação composta, examinada no exercício III.70, à composta de f com a inclusão $\iota: M_{f(x)} \to M$, que é uma aplicação constante (reparar que nesta alínea não se utiliza o facto de a submersão ser riemaniana).

Ex III.78 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma hipersuperfície relativamente à qual se fixou uma secção suave $(\vec{n}_x)_{x \in M}$ de $T(M)^\perp$ com $\|\vec{n}_x\| = 1$, para cada x, e sejam $\lambda_x: T_x(M) \to T_x(M)$ as correspondentes aplicações lineares de Weingarten. Seja $S = \{x \in G \mid \|x\| = 1\}$ e consideremos a *aplicação de Gauss* $\psi: M \to S$ definida por $\psi(x) = \vec{n}_x$ e consideremos a respectiva Hessiana

$$\beta(\psi)_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_{\psi(x)}(S).$$

Lembrar que, como se viu em III.5.6, tem-se $\lambda_x(v) = -D\psi_x(v)$, para cada $v \in T_x(M)$.
a) Mostrar que $T_{\psi(x)}(S) = T_x(M)$, que $\lambda = (\lambda_x)_{x \in M}: T(M) \to T(M)$ é um morfismo linear suave e que, quaisquer que sejam $u, v \in T_x(M)$,

$$\nabla \lambda_x(u)(v) = -\beta(\psi)_x(u, v).$$

Sugestão: Considerar um aberto U de G, contendo M, e um prolongamento suave $\overline{\psi}: U \to G$ de ψ. Exprimir a primeiro membro através da fórmula em III.8.16 que faz intervir a projecção ortogonal sobre $T_x(M)$ e o segundo

membro através da fórmula em III.8.31 que faz intervir a projecção ortogonal sobre $T_{\psi(x)}(S)$.
b) Concluir de a) a *identidade de Codazzi* $\nabla\lambda_x(u)(v) = \nabla\lambda_x(v)(u)$.

Ex III.79 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade e notemos π_x a projecção ortogonal de G sobre $T_x(M)$ e $h_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)^\perp$ a segunda forma fundamental. Sejam E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial e notemos $\widehat{\pi}_x$ a projecção ortogonal de E sobre E_x e $\widehat{h}_x: T_x(M) \times E_x \to E_x^\perp$ a segunda forma fundamental. Consideremos em $L(E;E)$ o produto interno real, parte real do de Hilbert-Schmidt e consideremos a variedade de Grassmann $G(E) \subset L_{aa}(E;E)$ cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E (cf. II.5.13). Seja $\varphi: M \to G(E)$ a *aplicação de Gauss*, definida por $\varphi(x) = \widehat{\pi}_x$ e consideremos a respectiva Hessiana

$$\beta(\varphi)_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_{\varphi(x)}(G(E)) \subset L_{aa}(E;E).$$

Lembrar que, por definição da segunda forma fundamental, tem-se, para cada $v \in T_x(M)$ e $w \in E_x$,

$$\widehat{h}_x(v,w) = D\varphi_x(v)(w).$$

a) (Ruh e Vilms) Mostrar que, quaisquer que sejam $u, v \in T_x(M)$ e $w \in E_x$,

$$\nabla\widehat{h}_x(u)(v,w) = \beta(\varphi)_x(u,v)(w),$$

onde, no primeiro membro, se considera $\widehat{h}$ como morfismo bilinear suave $T(M) \times \underline{E} \to \underline{E}^\perp$. **Sugestão:** Considerar um aberto U de G, contendo M, e um prolongamento suave $\overline{\varphi}: U \to L_{aa}(E;E)$ de φ. Exprimir a primeiro membro através da fórmula em III.8.45 que faz intervir a projecção ortogonal sobre $E_x^\perp$ e o segundo membro através da fórmula em III.8.31 que faz intervir a projecção ortogonal de $L_{aa}(E;E)$ sobre $T_{\varphi(x)}(G(E))$, utilizando a caracterização desta última no exercício III.46.
b) Deduzir que, no caso particular em que $E = G$ e $\underline{E} = T(M)$, é simétrica a aplicação trilinear $T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)$ definida por

$$(u,v,w) \mapsto \nabla\widehat{h}_x(u)(v,w) = \beta(\varphi)_x(u,v)(w).$$

Sugestão: O segundo membro da igualdade é simétrico em u e v e o primeiro é simétrico em v e w, tendo em conta o exercício III.68.

Ex III.80 **a)** Sejam $M \subset G$, $M' \subset G'$ e $M'' \subset G''$ variedades sem bordo, munidas de estruturas quase complexas, e $f: M \times M' \to M''$ uma aplicação suave e *separavelmente holomorfa* (no sentido que, para cada $x \in M$, é holomorfa a aplicação $M' \to M''$, $y \mapsto f(x,y)$, e, para cada $y \in M'$, é holomorfa a aplicação $M \to M''$, $x \mapsto f(x,y)$. Mostrar que, quando se considera em $M \times M'$ a estrutura quase complexa produto (cf. III.9.19), f é uma aplicação holomorfa.

b) Aplicar a conclusão anterior para mostrar que, se E é um espaço hermitiano, é holomorfa a aplicação suave $\Psi: GL(E) \times G_k(E) \to G_k(E)$ definida por $\Psi(\xi, \pi_F) = \pi_{\xi(F)}$ (cf. a alínea c) do exercício III.10 ou o exercício III.58).

Ex III.81 Sejam $M \subset G$ e $M' \subset G'$ variedades sem bordo munidas de estruturas quase complexas e consideremos em $M \times M'$ a estrutura quase complexa produto. Verificar que são válidas as propriedades usualmente associadas a uma estrutura produto, nomeadamente:
a) As projecções canónicas $M \times M' \to M$ e $M \times M' \to M'$ são aplicações holomorfas;
b) Se $M'' \subset G''$ é outra variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa, e se, $f: M'' \to M$ e $g: M'' \to M'$ são aplicações holomorfas, então é também holomorfa a aplicação $h: M'' \to M \times M'$ definida por $h(z) = (f(z), g(z))$.

Ex III.82 Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa $J = (J_x)_{x \in M}$. Mostrar que $-J = (-J_x)_{x \in M}$ é outra estrutura quase complexa de M e que, se M, com a primeira estrutura, é uma variedade holomorfa, então M, com a segunda estrutura, é também uma variedade holomorfa.

Ex III.83 Na parte 3) da demonstração de III.9.26 foi referido que não se dispunha de uma fórmula explícita para a aplicação $\Psi_F: GL(E) \to G(E)$, que a cada isomorfismo $\xi: E \to E$ associa a projecção ortogonal sobre o subespaço vectorial $\xi(F)$. Mostrar que, utilizando o exercício II.37, é possível obter uma tal fórmula explícita. **Sugestão:** Reparar que $\xi(F)$ coincide com a imagem do elemento $\xi \circ \pi_F \circ \xi^{-1} \in G'(E)$.

Ex III.84 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $(J_x)_{x \in M}$. Verificar que o tensor de torção $N_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)$ admite a seguinte caracterização, que também não faz intervir o produto interno de G: Dados $x_0 \in M$ e $u, v \in T_{x_0}(M)$, tem-se, quaisquer que sejam os campos vectoriais suaves X e Y sobre M, com $X_{x_0} = u$ e $Y_{x_0} = v$,

$$N_{x_0}(u, v) = -[X, Y]_{x_0} - J_{x_0}([X, J(Y)]_{x_0}) - J_{x_0}([J(X), Y]_{x_0}) + [J(X), J(Y)]_{x_0}.$$

Ex III.85 **(A variedade de Grassmann como variedade de Kähler)** Seja E um espaço hermitiano de dimensão n e consideremos a variedade de Grassmann $G(E) \subset L_{aa}(E; E)$, cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais complexos de E, com a estrutura complexa $(J_\lambda)_{\lambda \in G(E)}$ definida por $J_\lambda(\alpha) = -i(2\lambda - Id_E) \circ \alpha$ (cf. III.9.26). Consideremos no espaço ambiente $L_{aa}(E; E)$ o produto interno parte real do de Hilbert-Schmidt. Mostrar que a estrutura quase complexa é compatível com o produto interno de $L_{aa}(E; E)$ e que $G(E)$ é mesmo uma variedade de Kähler. **Sugestão:** Utilizar a primeira caracterização da derivada covariante de um morfismo linear na definição III.8.16, para calcular $\nabla J_\lambda(\alpha)(\beta)$, e, para simplificar o resultado, ter em conta as caracterizações matriciais de J_λ, em III.9.26, e da segunda forma fundamental da variedade de Grassmann, no exercício III.46.

Ex III.86 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $J = (J_x)_{x\in M}$, compatível com o produto interno.
a) Mostrar que tem lugar uma forma diferencial $\omega = (\omega_x)_{x\in M}$, de grau 2, onde $\omega_x\colon T_x(M) \times T_x(M) \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\omega_x(u, v) = \langle J_x(u), v\rangle$$

(cf. o exercício III.73). Diz-se que $\omega = (\omega_x)_{x\in M}$ é a *forma de Kähler* de M, associada ao produto interno de G e à estrutura quase complexa compatível.
b) Verificar que se tem

$$\nabla\omega_x(u)(v, w) = \langle \nabla J_x(u)(v), w\rangle$$

e deduzir que a derivada exterior $d\omega$ está definida por

$$d\omega_x(u, v, w) = \langle \nabla J_x(u)(v), w\rangle - \langle \nabla J_x(v)(u), w\rangle + \langle \nabla J_x(w)(u), v\rangle.$$

c) Diz-se que a variedade quase complexa $M \subset G$, compatível com o produto interno de G, é uma *variedade simpléctica* se se tem $d\omega_x = 0$, para cada $x \in M$. Reparar que se M é variedade de Kähler, então M é simpléctica e tem tensor de torção $N_x = 0$, para cada $x \in M$ e mostrar que, reciprocamente, se M é uma variedade simpléctica com $N_x = 0$, para cada x, então M é uma variedade de Kähler (em particular, se M é holomorfa e simpléctica, então M é variedade de Kähler).
Sugestão: Ter em conta a caracterização de $d\omega_x$ na alínea b), assim como as alíneas a) e b) de III.9.38 para subtrair a expressões iguais aos reais nulos $d\omega_x(u, v, w)$ e $d\omega_x(u, J_x(v), J_x(w))$.

Ex III.87 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa compatível $J = (J_x)_{x\in M}$. Seja $M' \subset M$ uma subvariedade quase complexa (cf. III.9.21).
a) Reparar que, tendo em conta III.9.32, se a variedade M tem tensor de torção identicamente nulo, o mesmo acontece à variedade M'. Mostrar, tendo em conta a caracterização da derivada exterior na alínea b) de III.9.38 que, se a variedade M é simpléctica, o mesmo acontece à variedade M'.
b) Deduzir de a), tendo em conta o exercício precedente, que, se a variedade M é de Kähler, o mesmo acontece à variedade M'.

Ex III.88 Nas condições do exercício III.85, mostrar que a forma de Kähler da variedade de Grassmann complexa $G(E) \subset L_{aa}(E; E)$, $(\omega_\lambda)_{\lambda\in G(E)}$ está definida por

$$\omega_\lambda(\alpha, \beta) = \langle -i(2\lambda - Id_E) \circ \alpha, \beta\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Deduzir daqui, utilizando a caracterização da derivada exterior na alínea b) do exercício III.73, que se tem $d\omega_\lambda = 0$, obtendo assim uma nova prova do facto de $G(E)$ ser uma variedade de Kähler. **Sugestão:** Utilizar a caracterização matricial de $T_\lambda(G(E))$ para mostrar que, se $\alpha, \beta, \gamma \in T_\lambda(G(E))$, então $\langle \alpha \circ \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{C}} = 0$.

Ex III.89 **(lemas de Álgebra Linear) a)** Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$, igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e seja $\Phi\colon L(E;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ uma aplicação linear. Mostrar que existe um, e um só, vector $w \in E$ tal que, para cada $\lambda \in L(E;\mathbb{K})$, $\Phi(\lambda) = \lambda(w)$. **Sugestão:** Reparar que o espaço vectorial "bidual" $L(L(E;\mathbb{K});\mathbb{K})$ tem também dimensão n e verificar que é injectiva a aplicação linear $E \to L(L(E;\mathbb{K});\mathbb{K})$, que a cada w associa a aplicação linear $\lambda \mapsto \lambda(w)$.

b) Nesta alínea e nas seguintes E vai ser um espaço vectorial real de dimensão n e lembramos que $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ é então um espaço vectorial complexo, que tem também dimensão n (uma vez que a sua dimensão real é $2n$). Para cada $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$, vamos notar $\overline{\lambda} \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ a *aplicação linear conjugada*, definida por $\overline{\lambda}(w) = \overline{\lambda(w)}$ e reparamos que é antilinear a aplicação $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}) \to L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$, $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$. Para cada subespaço vectorial complexo $\mathcal{E} \subset L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$, notamos $\overline{\mathcal{E}} \subset L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ o subespaço vectorial complexo constituído pelos $\overline{\lambda}$, com $\lambda \in \mathcal{E}$.

Se $\Phi\colon L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é uma aplicação linear complexa tal que, para cada $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$, $\Phi(\overline{\lambda}) = \overline{\Phi(\lambda)}$, mostrar que existe um, e um só, $w \in E$ tal que, para cada $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$, $\Phi(\lambda) = \lambda(w)$. **Sugestão:** Aplicar a conclusão de a) à restrição de Φ a $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{R})$, que toma valores em $\mathbb{R}$, e reparar que cada $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ se pode escrever na forma $\lambda_1 + i\lambda_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{R})$.

c) Suponhamos que $n = 2p$ e que J é uma estrutura complexa do espaço vectorial real E. Sendo

$$L_{J+}(E;\mathbb{C}) = \{\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}) \mid \underset{w}{\forall}\, \lambda(J(w)) = i\lambda(w)\},$$
$$L_{J-}(E;\mathbb{C}) = \{\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}) \mid \underset{w}{\forall}\, \lambda(J(w)) = -i\lambda(w)\}$$

(os espaços das aplicações lineares complexas e das antilineares, respectivamente), mostrar que se trata de subespaços vectoriais complexos de dimensão p, que $L_{J-}(E;\mathbb{C}) = \overline{L_{J+}(E;\mathbb{C})}$ e que tem lugar a soma directa

$$L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}) = L_{J+}(E;\mathbb{C}) \oplus L_{J-}(E;\mathbb{C}),$$

as projecções correspondentes associando a cada $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ os elementos $\lambda_+ \in L_{J+}(E;\mathbb{C})$ e $\lambda_- \in L_{J-}(E;\mathbb{C})$ definidos por

$$\lambda_+(w) = \frac{\lambda(w) - i\lambda(J(w))}{2}, \quad \lambda_-(w) = \frac{\lambda(w) + i\lambda(J(w))}{2}.$$

d) Seja, reciprocamente, $\mathcal{E} \subset L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ um subespaço vectorial complexo tal que tenha lugar a soma directa $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}) = \mathcal{E} \oplus \overline{\mathcal{E}}$. Mostrar que existe uma, e uma só, estrutura complexa J de E tal que $\mathcal{E} = L_{J+}(E;\mathbb{C})$ (e portanto também $\overline{\mathcal{E}} = L_{J-}(E;\mathbb{C})$). Mais precisamente, mostrar que, para cada $w \in E$, $J(w)$ é o único vector de E tal que, para cada $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$,

$$\lambda(J(w)) = i(\lambda_+(w) - \lambda_-(w)),$$

onde $\lambda_+ \in \mathcal{E}$, $\lambda_- \in \overline{\mathcal{E}}$ e $\lambda = \lambda_+ + \lambda_-$. **Sugestão:** A existência e unicidade de $J(w)$ é uma consequência do que se viu em b), desde que se repare que, para cada $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$, tem-se $\overline{\lambda}_+ = \overline{\lambda_-}$ e $\overline{\lambda}_- = \overline{\lambda_+}$.
Reparar que as conclusões de c) e d) estabelecem uma correspondência biunívoca entre estruturas complexas do espaço vectorial real E e subespaços vectoriais complexos $\mathcal{E} \subset L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ tais que $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}) = \mathcal{E} \oplus \overline{\mathcal{E}}$.
e) Suponhamos que o espaço vectorial real E, de dimensão n, está munido de um produto interno e consideremos em $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ o produto interno complexo cuja parte real é o de Hilbert-Schmidt, isto é, o definido por

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda(w_j)\, \overline{\mu(w_j)},$$

onde $w_1, \dots, w_n$ é uma base ortonormada arbitrária de E (cf. I.3.5).
Mostrar que, se J é uma estrutura complexa de E, a aplicação linear adjunta J^* é também uma estrutura complexa e os subespaços vectoriais $L_{J^*+}(E;\mathbb{C})$ e $L_{J+}(E;\mathbb{C})$ de $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ são mutuamente ortogonais, portanto cada um é o complementar ortogonal do outro. **Sugestão:** Lembrar as fórmulas na alínea c) de I.3.5.
f) Nas condições de e), mostrar que, se J é uma estrutura complexa de E, então $J - J^*\colon E \to E$ é um isomorfismo e a projecção ortogonal $\varphi(J)$ de $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ sobre $L_{J+}(E;\mathbb{C})$ está definida por

$$\varphi(J)(\lambda) = \lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ J + i\, \lambda \circ (J - J^*)^{-1}.$$

Sugestão: Para a primeira afirmação, reparar que, se $J(x) = J^*(x)$, então

$$\langle x, x \rangle = -\langle J(J(x)), x \rangle = -\langle J(x), J(x) \rangle;$$

Para a segunda, reparar que cada $\lambda \in L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ se pode escrever na forma $\lambda' + \lambda''$, com

$$\lambda' = \lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ J + i\, \lambda \circ (J - J^*)^{-1}$$
$$\lambda'' = -\lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ J^* - i\, \lambda \circ (J - J^*)^{-1},$$

tendo-se $\lambda' \in L_{J+}(E;\mathbb{C})$ e $\lambda'' \in L_{J^*+}(E;\mathbb{C})$.
g) Nas condições de e), mostrar que uma estrutura complexa J de E é compatível com o produto interno se, e só se, os subespaços vectoriais $L_{J+}(E;\mathbb{C})$ e $L_{J-}(E;\mathbb{C})$ de $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ são mutuamente ortogonais (ou seja, cada um é o complementar ortogonal do outro). **Sugestão:** Lembrar que J é compatível com o produto interno se, e só se, $J^* = -J$ (cf. I.2.31).

Ex III.90 **(A variedade das estruturas complexas como variedade holomorfa)** Seja E um espaço vectorial real de dimensão $n = 2p$ e consideremos o conjunto $\mathcal{F}'(E) \subset L(E;E)$ das estruturas complexas $J: E \to E$, que sabemos ser uma variedade sem bordo com dimensão $2p^2$ e com cada espaço vectorial tangente $T_J(\mathcal{F}'(E)) \subset L(E;E)$ constituído pelas aplicações lineares $\alpha \in L(E;E)$ tais que $\alpha \circ J = -J \circ \alpha$ (cf. II.5.10).

a) Mostrar que, para cada $J \in \mathcal{F}'(E)$, tem lugar uma estrutura complexa $\mathcal{J}_J$ do espaço vectorial tangente $T_J(\mathcal{F}'(E))$ definida por

$$\mathcal{J}_J(\alpha) = J \circ \alpha,$$

pelo que a variedade $\mathcal{F}'(E)$ fica assim munida de uma estrutura quase complexa $(\mathcal{J}_J)_{J \in \mathcal{F}'(E)}$.

b) Fixemos um produto interno em E e consideremos o correspondente produto interno complexo em $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ (cf. a alínea e) do exercício III.89). Seja φ a aplicação suave de $\mathcal{F}'(E)$ para a variedade de Grassmann $G(L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}))$ que a cada J associa a projecção ortogonal de $L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})$ sobre $L_{J+}(E;\mathbb{C})$, definida, como se viu na alínea f) do referido exercício, por

$$\varphi(J)(\lambda) = \lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ J + i\,\lambda \circ (J - J^*)^{-1}.$$

Para cada $\alpha \in T_J(\mathcal{F}'(E))$, obter as seguintes três caracterizações equivalentes da derivada $D\varphi_J(\alpha) \in T_{\varphi(J)}(G(L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C})))$:

$$\begin{aligned}
D\varphi_J(\alpha)(\lambda) = &-\lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ (\alpha - \alpha^*) \circ (J - J^*)^{-1} \circ J + \\
&+ \lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha - i\,\lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ (\alpha - \alpha^*) \circ (J - J^*)^{-1} \\
D\varphi_J(\alpha)(\lambda) = &-\lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha \circ (J - J^*)^{-1} \circ J^* + \\
&+ \lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha^* \circ (J - J^*)^{-1} \circ J - \\
&- i\,\lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha \circ (J - J^*)^{-1} + \\
&+ i\,\lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha^* \circ (J - J^*)^{-1} \\
D\varphi_J(\alpha)(\lambda) = &(\lambda \circ J^* - i\,\lambda) \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha \circ (J - J^*)^{-1} - \\
&- (\lambda \circ J - i\,\lambda) \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha^* \circ (J - J^*)^{-1}
\end{aligned}$$

Sugestão: Reparar que $(J - J^*)^{-1} \circ J - (J - J^*)^{-1} \circ J^* = Id_E$. Reparar também que se tem $J \circ (J - J^*) = -(J - J^*) \circ J^*$ e $J^* \circ (J - J^*) = -(J - J^*) \circ J$, assim como as igualdades que se obtêm destas compondo à esquerda e à direita com $(J - J^*)^{-1}$.

c) Utilizar a primeira caracterização da derivada na alínea precedente para mostrar que a aplicação suave $\varphi: \mathcal{F}'(E) \to G(L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}))$ é uma imersão.

Sugestão: Supondo $D\varphi_J(\alpha) = 0$, reparar que, para cada $\lambda \in L(E;\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ (\alpha - \alpha^*) \circ (J - J^*)^{-1} \circ J + \lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha \\
0 &= \lambda \circ (J - J^*)^{-1} \circ (\alpha - \alpha^*) \circ (J - J^*)^{-1}
\end{aligned}$$

e deduzir que

$$0 = -(J - J^*)^{-1} \circ (\alpha - \alpha^*) \circ (J - J^*)^{-1} \circ J + (J - J^*)^{-1} \circ \alpha$$
$$0 = (J - J^*)^{-1} \circ (\alpha - \alpha^*) \circ (J - J^*)^{-1}$$

e portanto $\alpha = 0$.
d) Notar que, quando $\lambda \in L_{J+}(E;\mathbb{C})$, a terceira fórmula para $D\varphi_J(\alpha)(\lambda)$ na alínea b) reduz-se a

$$D\varphi_J(\alpha)(\lambda) = (\lambda \circ J^* - i\,\lambda) \circ (J - J^*)^{-1} \circ \alpha \circ (J - J^*)^{-1}$$

e deduzir daqui que, quando se considera na variedade de Grassmann complexa a sua estrutura quase complexa referida em III.9.26 a imersão $\varphi\colon \mathcal{F}'(E) \to G(L_{\mathbb{R}}(E;\mathbb{C}))$ é uma aplicação holomorfa. **Sugestão:** Lembrar a caracterização matricial da estrutura quase complexa.
e) Deduzir da alínea precedente que $\mathcal{F}'(E)$ é mesmo uma variedade holomorfa.

Ex III.91 **(A variedade das estruturas complexas compatíveis)** Seja E um espaço vectorial real de dimensão $n = 2p$, munido de produto interno e consideremos o conjunto $\mathcal{F}(E) \subset L(E;E)$ das estruturas complexas compatíveis $J\colon E \to E$, que sabemos ser uma variedade sem bordo com dimensão $p^2 - p$ e com cada espaço vectorial tangente $T_J(\mathcal{F}(E)) \subset L(E;E)$ constituído pelas aplicações lineares $\alpha \in L(E;E)$ tais que $\alpha^* = -\alpha$ e $\alpha \circ J = -J \circ \alpha$ (cf. II.5.11).
a) Mostrar que $\mathcal{F}(E)$ é uma subvariedade quase complexa de $\mathcal{F}'(E)$, e portanto também uma variedade holomorfa, e que a sua estrutura quase complexa é compatível com o produto interno de Hilbert-Schmidt de $L(E;E)$.
b) Mostrar que a forma de Kähler $(\omega_J)_{J\in\mathcal{F}(E)}$ está definida por

$$\omega_J(\alpha,\beta) = \langle J \circ \alpha, \beta\rangle,$$

deduzir daqui, utilizando a caracterização da derivada exterior na alínea b) do exercício III.73, que se tem $d\omega_\lambda = 0$ e concluir que $\mathcal{F}(E)$ é uma variedade de Kähler. **Sugestão:** Reparar que, se $\alpha,\beta,\gamma \in T_J(\mathcal{F}(E))$, então $\langle \alpha\circ\beta,\gamma\rangle = 0$ por $\alpha\circ\beta$ ser linear complexa e γ ser antilinear, relativamente a J.

Ex III.92 **(A estrutura quase complexa associada do fibrado vectorial tangente)** Sejam E um espaço vectorial real de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase-complexa suave $J = (J_x)_{x\in M}$. Mostrar que se pode então definir, sobre o espaço total $T(M)$, uma *estrutura quase-complexa associada* $\tilde{J} = (\tilde{J}_{(x,u)})_{(x,u)\in T(M)}$ (cf. [28]) do seguinte modo:
Qualquer que seja a aplicação suave $\overline{J} = (\overline{J}_x)_{x\in M}$, $M \to L(E;E)$ tal que cada $J_x\colon T_x(M) \to T_x(M)$ seja uma restrição de $\overline{J}_x\colon E \to E$, tem-se, para cada $(x,u) \in T(M)$ e $(v,z) \in T_{(x,u)}(T(M))$,

$$\tilde{J}_{(x,u)}(v,z) = \big(J_x(v), \overline{J}_x(z) + D\overline{J}_x(u)(v)\big).$$

Sugestão: Para verificar que $\tilde{J}_{(x,u)}$ aplica $T_{(x,u)}(T(M))$ em $T_{(x,u)}(T(M))$ e não depende do prolongamento $\overline{J}$ escolhido, considerar uma aplicação suave $\varphi: T(M) \to T(M)$, definida por

$$\varphi(x,v) = (x, J_x(v)) = (x, \overline{J}_x(v)),$$

e derivá-la em (x,v) na direcção de (u,z), utilizando duas vezes a propriedade de simetria na alínea a) de III.3.23.

Ex III.93 Sejam E um espaço vectorial complexo, com estrutura complexa $J: E \to E$, e $U \subset E$ um aberto, sobre o qual se considera a estrutura quase-complexa constante J. Mostrar que a estrutura quase-complexa associada sobre $T(U) = U \times E$ é a estrutura quase-complexa constante $J \times J$.

Ex III.94 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $(J_x)_{x\in M}$, e consideremos no espaço total do fibrado tangente $T(M)$ a estrutura quase complexa associada. Seja $M' \subset M$ uma subvariedade quase complexa, sobre a qual se considera, naturalmente, a estrutura quase complexa induzida. Mostrar que $T(M')$ é uma subvariedade quase complexa de $T(M)$ e que a estrutura quase complexa induzida em $T(M')$ é a estrutura associada à estrutura quase complexa de M'.

Ex III.95 Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ duas variedades sem bordo, munidas de estruturas quase complexas suaves $(J_x)_{x\in M}$ e $(J'_y)_{y\in M'}$ e consideremos nos espaços totais dos fibrados vectoriais tangentes $T(M)$ e $T(M')$ as estruturas quase complexas associadas. Mostrar que, se $f: M \to M'$ é uma aplicação holomorfa, então a aplicação suave associada

$$T(f): T(M) \to T(M'), \quad T(f)(x,u) = (f(x), Df_x(u))$$

é também holomorfa.
Sugestão: Considerar um prolongamento $\overline{f}$ de f a um aberto de E contendo M e aplicações suaves $\overline{J} = (\overline{J}_x)_{x\in M}$, de M em $L(E;E)$ e $\overline{J}' = (\overline{J}'_y)_{y\in M'}$, de M' em $L(E';E')$, com $\overline{J}_x$ prolongando J_x e $\overline{J}'_y$ prolongando J'_y. Para provar a igualdade

$$DT(f)_{(x,u)}(\tilde{J}_{(x,u)}(v,z)) = \tilde{J}'_{(f(x),Df_x(u))}(DT(f)_{(x,u)}(v,z)),$$

para $(x,u) \in T(M)$ e $(v,z) \in T_{(x,u)}(T(M))$, lembrar que se tem também $(u,z) \in T_{(x,v)}(T(M))$ e derivar em (x,v) na direcção de (u,z) ambos os membros da identidade

$$\overline{J}'_{f(x)}(D\overline{f}_x(v)) = J'_{f(x)}(Df_x(v)) = Df_x(J_x(v)) = D\overline{f}_x(\overline{J}_x(v)).$$

Ex III.96 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $(J_x)_{x\in M}$, e consideremos no espaço total do fibrado tangente $T(M)$ a estrutura quase complexa associada. Mostrar que, se M é uma variedade holomorfa, então $T(M)$ é também uma variedade holomorfa.

Ex III.97 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $(J_x)_{x\in M}$, e consideremos no espaço total do fibrado tangente $T(M)$ a estrutura quase complexa associada $(\tilde{J}_{(x,u)})_{(x,u)\in T(M)}$. Consideremos tensor de torção $N_x: T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)$ (cf. III.9.28) e a aplicação suave

$$\varphi: T(M) \to T(M), \quad \varphi(x,u) = (x, J_x(u)).$$

a) Mostrar que se tem, para cada $(x,u) \in T(M)$ e $(v,z) \in T_{(x,u)}(T(M))$,

$$\tilde{J}_{\varphi(x,u)}(D\varphi_{(x,u)}(v,z)) - D\varphi_{(x,u)}(\tilde{J}_{(x,u)}(v,z)) = (0, N_x(u,v)).$$

Sugestão: Considerar uma aplicação suave $\overline{J} = (\overline{J}_x)_{x\in M}$ de M em $L(E;E)$ com $\overline{J}_x$ prolongamento de J_x, lembrar a caracterização do tensor de torção em III.9.30 e considerar a fórmula que se obtém derivando ambos os membros da identidade $J_x(J_x(v)) = -v$ ($(x,v) \in T(M)$) na direcção de (u,z).
b) Deduzir que a aplicação φ é holomorfa se, e só se, $N_x = 0$, para cada $x \in M$.

Ex III.98 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $(J_x)_{x\in M}$, e consideremos no espaço total do fibrado tangente $T(M)$ a estrutura quase complexa associada. Mostrar que:
a) A aplicação $\pi: T(M) \to M$, definida por $\pi(x,v) = x$, é uma aplicação holomorfa.
b) Para cada $x \in M$, $\{x\} \times T_x(M)$ é uma subvariedade quase complexa de $T(M)$ e tem lugar um difeomorfismo holomorfo $T_x(M) \to \{x\} \times T_x(M)$, $v \mapsto (x,v)$, onde no domínio se considera a estrutura quase complexa constante J_x e no espaço de chegada a estrutura quase complexa induzida pela de $T(M)$.

Ex III.99 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, munida da uma estrutura quase-complexa suave $(J_x)_{x\in M}$. Diz-se que um campo vectorial suave $X = (X_x)_{x\in M}$ é um *campo vectorial holomorfo* se for holomorfa a aplicação suave $M \to T(M)$, $x \mapsto (x, X_x)$, quando se considera em $T(M)$ a estrutura quase-complexa associada $(\tilde{J}_{(x,u)})_{(x,u)\in T(M)}$. Mostrar que:
a) Se $\overline{J} = (\overline{J}_x)_{x\in M}$ é uma aplicação suave de M em $L(E;E)$ com $\overline{J}_x$ prolongando J_x, então o campo vectorial suave $X = (X_x)_{x\in M}$ é holomorfo se, e só se, para cada $x \in M$ e $u \in T_x(M)$,

$$DX_x(J_x(u)) = \overline{J}_x(DX_x(u)) + D\overline{J}_x(X_x)(u)$$

por outras palavras, se, e só se, a derivada de Lie $\mathcal{L}_X(J): T(M) \to T(M)$ é identicamente nula (cf. o exercício III.74).

b) Mostrar que, no caso em que E é um espaço vectorial complexo e $M \subset E$ é uma subvariedade quase complexa, sobre a qual se considera, naturalmente, a estrutura quase complexa induzida, então um campo vectorial suave $X = (X_x)_{x\in M}$ é holomorfo se, e só se, for uma aplicação holomorfa de M para E.
c) Mostrar que, se $X = (X_x)_{x\in M}$ e $Y = (Y_x)_{x\in M}$ são campos vectoriais holomorfos e $a \in \mathbb{R}$, então $X + Y = (X_x + Y_x)_{x\in M}$ e $aX = (aX_x)_{x\in M}$ são também campos vectoriais holomorfos.
d) No caso em que M, com a sua estrutura quase complexa, é mesmo uma variedade holomorfa, mostrar que, se $X = (X_x)_{x\in M}$ é um campo vectorial holomorfo, então $J(X) = (J_x(X_x))_{x\in M}$ é também um campo vectorial holomorfo.
e) No caso em que E está munido de um produto interno para o qual M é uma variedade de Kähler, mostrar que o campo vectorial suave $X = (X_x)_{x\in M}$ é holomorfo se, e só se, para cada $x \in M$ e $u \in T_x(M)$,

$$\nabla X_x(J_x(u)) = J_x(\nabla X_x(u)).$$

Ex III.100 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, munida da uma estrutura quase-complexa suave $(J_x)_{x\in M}$. Mostrar que, se $X = (X_x)_{x\in M}$ e $Y = (Y_x)_{x\in M}$ são campos vectoriais holomorfos, então o parêntesis de Lie $[X, Y]$ (cf. III.3.24) é também um campo vectorial holomorfo.
Sugestão: Considerar um aberto U de E, contendo M, aplicações suaves $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ de U em E, prolongando X e Y, respectivamente, e uma aplicação suave $\overline{J} = (\overline{J}_x)_{x\in U}$ de U em $L(E; E)$ tal que, para cada $x \in M$, $\overline{J}_x$ seja um prolongamento de J_x. Derivar ambos os membros da identidade

$$DY_x(J_x(u)) = \overline{J}_x(DY_x(u)) + D\overline{J}_x(Y_x)(u)$$

como funções de $(x, u) \in T(M)$ na direcção de $(X_x, DX_x(u)) \in T_{(x,u)}(T(M))$ (reparar que $(u, DX_x(u)) \in T_{(x,X_x)}(T(M))$).

Solução do exercício III.2 — No caso $n = 1$, podemos considerar o campo de referenciais ortonormado constituído pela secção X definida por

$$X(x, y) = (-y, x).$$

No caso $n = 3$, podemos considerar o campo de referenciais ortonormado X, Y, Z, definido por

$$\begin{aligned} X_{(x,y,z,w)} &= (-y, x, w, -z) \\ Y_{(x,y,z,w)} &= (-z, -w, x, y) \\ Z_{(x,y,z,w)} &= (-w, z, -y, x). \end{aligned}$$

No caso $n = 7$, podemos considerar o campo de referenciais ortonormado $X_1, X_2, \ldots, X_7$, definido por

$$
\begin{aligned}
X_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_2,x_1,x_5,-x_6,-x_3,x_4,x_8,-x_7)\\
X_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_3,-x_5,x_1,x_8,x_2,-x_7,x_6,-x_4)\\
X_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_4,x_6,-x_8,x_1,-x_7,-x_2,x_5,x_3)\\
X_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_5,x_3,-x_2,x_7,x_1,x_8,-x_4,-x_6)\\
X_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_6,-x_4,x_7,x_2,-x_8,x_1,-x_3,x_5)\\
X_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_7,-x_8,-x_6,-x_5,x_4,x_3,x_1,x_2)\\
X_7(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) &= (-x_8,x_7,x_4,-x_3,x_6,-x_5,-x_2,x_1).
\end{aligned}
$$

Estas soluções, embora possam ser encontradas experimentalmente, têm a sua origem na existência de estruturas algébricas excepcionais em $\mathbb{R}^2$ (álgebra dos complexos), $\mathbb{R}^4$ (álgebra dos quaterniões) e $\mathbb{R}^8$ (álgebra não associativa dos números de Cayley).

CAPÍTULO IV
Equações Diferenciais Ordinárias em Variedades

§1. Solução geral e fluxo de um campo vectorial.

IV.1.1 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto e $X\colon A \to E$ uma aplicação. Dado um intervalo J de $\mathbb{R}$, diz-se que uma aplicação $f\colon J \to A$ é uma *curva integral* de X se, para cada $t \in J$, f é diferenciável em t e $f'(t) = X(f(t)) = X_{f(t)}$. Para cada $t \in J$, diz-se então que $(t, f(t))$ é uma *condição inicial* da curva integral. É cómodo, pelo menos de momento, não exigir que o intervalo J seja aberto. No caso em que J não tem mais do que um ponto, a derivada $f'(t)$ não está definida, mas consideramos, por convenção, que toda a aplicação de J em A é uma curva integral.

IV.1.2 **(Notas) a)** Nos casos interessantes, a aplicação X será um *campo vectorial*, isto é, ter-se-á $X_x \in T_x(A)$, para cada $x \in A$, mas não ganhamos nada de momento em fazer essa hipótese suplementar. Repare-se, no entanto, que, se J é um intervalo aberto e se $f\colon J \to A$ é uma curva integral de classe C^1, então, para cada $t \in J$, $X_{f(t)} = f'(t) = Df_t(1)$ e $-X_{f(t)} = Df_t(-1)$ estão em $t_{f(t)}(A)$, em particular também em $T_{f(t)}(A)$, o que explica a razão da nossa primeira afirmação.

b) Tal como referimos em I.5.15, no caso em que o intervalo J não é aberto, embora tenha interior não vazio, a diferenciabilidade de f numa extremidade c de J não entra formalmente na teoria que resumimos no capítulo 1 (relativamente aos restantes pontos de J já não há problema porque podemos sempre pensar na restrição de f ao interior de J). A diferenciabilidade de f numa extremidade c é definida então a partir da existência do limite lateral

$$\lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c},$$

limite que se nota ainda $f'(c)$. A fim de aplicarmos comodamente as propriedades que estudámos, é cómodo reparar que, se $f\colon J \to E$ é diferenciável em todos os pontos, então podemos prolongar f a um intervalo aberto contendo J, de modo a obter ainda uma aplicação diferenciável em todos os pontos, aplicação que é mesmo de classe C^1 no caso em que a aplicação $f'\colon J \to E$ é contínua. Esse prolongamento pode ser obtido trivialmente do seguinte modo:

b1) No caso em que J é do tipo $[a, b[$, obtemos um prolongamento ao

intervalo $]-\infty, b[$, aplicando cada $t < a$ em $(t-a)f'(a)$,
b2) No caso em que J é do tipo $]a, b]$, obtemos um prolongamento ao intervalo $]a, +\infty[$, aplicando cada $t > b$ em $(t-b)f'(b)$;
b3) No caso em que J é do tipo $[a, b]$, obtemos um prolongamento a $\mathbb{R}$, aplicando cada $t < a$ em $(t-a)f'(a)$ e $t > b$ em $(t-b)f'(b)$.

À curva integral $f\colon J \to A$ também se costuma dar o nome de *solução* da equação diferencial definida por X, equação diferencial que é independente do tempo, por oposição às equações diferenciais do tipo $f'(t) = \widehat{X}(t, f(t))$, onde $\widehat{X}$ é uma aplicação definida numa parte de $\mathbb{R} \times E$. Estas últimas equações serão estudadas mais adiante. Intuitivamente, é frequente olhar para a variável t como sendo uma variável temporal e para a aplicação f como descrevendo um movimento; por exemplo é comum referirmo-nos a $f(t)$ como o valor de f "no instante" t.

IV.1.3 **(Lema)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto e $X\colon A \to F$ uma aplicação de classe C^1. Para cada $z \in A$, existem então $r, R > 0$ tais que, quaisquer que sejam $x, y \in A$, com $\|x - z\| \le r$ e $\|y - z\| \le r$, se tenha $\|X(y) - X(x)\| \le R\|y - x\|$ (o que se pode traduzir pela afirmação que X é *localmente lipschitziana*).
Dem: Tendo em conta a definição de aplicação de classe C^1, podemos já supor que A é um conjunto aberto e, nesse caso, a afirmação do enunciado resulta da fórmula da média (cf. I.5.18), tendo em conta o facto de a aplicação $Df\colon A \to L(E; F)$, sendo contínua, ser localmente limitada. □

IV.1.4 **(Lema de Gronwall)** Sejam $a < b$ dois números reais e $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua tal que, para um certo par de constantes $k, r \ge 0$, se tenha, para todo o $t \in [a, b]$,

$$f(t) \le k + r \int_a^t f(s)\, ds.$$

Tem-se então, para cada $t \in [a, b]$,

$$f(t) \le k\, e^{r(t-a)}.$$

Dem: Seja $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$g(t) = k + r \int_a^t f(s)\, ds,$$

e reparemos que $g'(t) = rf(t)$ assim como, por hipótese, $f(t) \le g(t)$. Seja $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$h(t) = g(t)\, e^{-r(t-a)}.$$

Vem $h(a) = k$ e

$$h'(t) = g'(t)\, e^{-r(t-a)} - r\, g(t)\, e^{-r(t-a)} = e^{-r(t-a)}(r\, f(t) - r\, g(t)) \leq 0,$$

pelo que $h(t) \leq h(a) = k$ e portanto

$$f(t) \leq g(t) = h(t)\, e^{r(t-a)} \leq k\, e^{r(t-a)}. \qquad \square$$

IV.1.5 **(Lema de unicidade)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Sejam $f, g: [0,1] \to A$ duas curvas integrais de X, com a mesma condição inicial $(0, x)$. Tem-se então $f = g$.

Dem: Seja T o conjunto dos $t \in [0,1]$ tais que f e g coincidem no intervalo $[0,t]$. T é não vazio por conter 0 e podemos portanto considerar o supremo a de T. A continuidade de f e g implica então que se tem ainda $f(a) = g(a)$, de onde se deduz imediatamente que $a \in T$. O resultado ficará demonstrado se virmos que $a = 1$. Suponhamos, por absurdo, que se tinha $a < 1$. Seja $\widehat{x} = f(a) = g(a)$. Sejam $r, R > 0$ tais que, para $y, z \in B_r(\widehat{x}) \cap A$, se tenha $\|X(y) - X(z)\| \leq R\|y - z\|$. A continuidade de f e g implica a existência de b, com $a < b < 1$, tal que, para cada $t \in [a,b]$, $\|f(t) - \widehat{x}\| < r$ e $\|g(t) - \widehat{x}\| < r$. Reparando que as igualdades $f'(t) = X_{f(t)}$ e $g'(t) = X_{g(t)}$ implicam a continuidade de f' e de g', podemos escrever, para cada $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
\|f(t) - g(t)\| &= \Big\|\int_a^t f'(s) - g'(s)\, ds\Big\| = \\
&= \Big\|\int_a^t X_{f(s)} - X_{g(s)}\, ds\Big\| \leq \\
&\leq \int_a^t \|X_{f(s)} - X_{g(s)}\|\, ds \leq \\
&\leq R\int_a^t \|f(s) - g(s)\|\, ds,
\end{aligned}$$

donde, pelo lema de Gronwall, com $k = 0$, $\|f(t) - g(t)\| = 0$, ou seja, $f(t) = g(t)$, para cada $t \in [a,b]$. Concluímos daqui que $b \in T$, o que é uma contradição por a ser o supremo de T. $\square$

IV.1.6 **(Unicidade)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Sejam $f: J \to A$ e $g: \widehat{J} \to A$ duas curvas integrais de X com uma mesma condição inicial (a, x). Tem-se então $f(t) = g(t)$, para cada $t \in J \cap \widehat{J}$.

Dem: Seja $t \in J \cap \widehat{J}$ arbitrário. Para cada $s \in [0,1]$, tem-se ainda

$$(1-s)a + st \in J \cap \widehat{J}$$

pelo que podemos definir aplicações $\widehat{f}, \widehat{g}: [0,1] \to A$, por

$$\widehat{f}(s) = f((1-s)a + st),$$
$$\widehat{g}(s) = g((1-s)a + st),$$

as quais verificam $\widehat{f}(0) = f(a) = x = g(a) = \widehat{g}(0)$ e, para cada s,

$$\widehat{f}'(s) = (t-a)f'((1-s)a + st) = (t-a)X_{\widehat{f}(s)},$$
$$\widehat{g}'(s) = (t-a)g'((1-s)a + st) = (t-a)X_{\widehat{g}(s)},$$

pelo que $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ são duas curvas integrais da aplicação de classe C^1 $\widehat{X}: A \to E$ definida por $\widehat{X}_y = (t-a)X_y$, com a mesma condição inicial $(0, x)$. Pelo lema anterior, podemos concluir que $\widehat{f} = \widehat{g}$, em particular

$$f(t) = \widehat{f}(1) = \widehat{g}(1) = g(t). \qquad \square$$

IV.1.7 **(Existência de curva integral máxima)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $x \in A$, existe então uma, e uma só, curva integral $f: J \to A$ de X, com a condição inicial (a, x), tal que qualquer outra curva integral de X com a mesma condição inicial seja uma restrição de f. Diz-se então que $f: J \to A$ é a *curva integral máxima* de X para a condição inicial (a, x).

Dem: A unicidade é clara. Para provarmos a existência, consideremos a família de todas as curvas integrais $f_i: J_i \to A$ de X com a condição inicial (a, x), família que é não vazia por conter pelo menos a aplicação de domínio $\{a\}$, que toma em a o valor x. Seja J a união de todos os J_i, que é um intervalo contendo a (é conexo…). Seja $f: J \to A$ a aplicação definida pela condição de se ter $f(t) = f_i(t)$, para cada i tal que $t \in J_i$, aplicação que está bem definida, tendo em conta o resultado anterior. Por construção, toda a curva integral de X com a condição inicial (a, x) é uma restrição de f, pelo que tudo o que resta verificar é que f é efectivamente uma curva integral. Essa verificação resume-se a uma discussão, talvez um pouco longa, mas de qualquer modo trivial, que, para poupar espaço, deixamos para o leitor (os pontos essenciais são o facto de a diferenciabilidade ser uma noção local e o facto de a existência de derivada num ponto interior ao domínio ser equivalente à existência e igualdade das duas derivadas laterais). $\square$

Repare-se que a existência a que se refere o resultado anterior é uma existência um pouco fraca, na medida em que nada garante que a curva integral máxima não se limite a ter o domínio trivial $\{a\}$. Normalmente costuma-se dar o nome de teorema de existência de solução ao resultado que garante que o domínio da solução máxima é uma vizinhança de a, mas esse resultado só será válido com hipóteses suplementares, que estudaremos adiante.

IV.1.8 Nas condições anteriores, notaremos, em geral, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $x \in A$,

$$f_{t,x}: J_{t,x} \to A$$

a curva integral máxima de X, com a condição inicial (t, x). Notaremos Ω o subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times A$, formado pelos (s, t, x) tais que $s \in J_{t,x}$ e $\omega: \Omega \to A$ a aplicação definida por

$$\omega(s, t, x) = f_{t,x}(s),$$

aplicação a que daremos o nome de *solução geral*[94] de X, uma vez que ela contém informação sobre todas as curvas integrais de X.

> Usando a linguagem corrente, $\omega(s, t, x)$ vai ser o local onde estaremos no instante s, se no instante t estivermos em x. Um dos objectivos fundamentais deste capítulo é o de estabelecer algumas propriedades básicas de ω; veremos, por exemplo, que ω é uma aplicação de classe C^1 e que, no caso em que a aplicação $X: A \to E$ é de classe C^k, com $k \geq 1$, o mesmo vai acontecer á aplicação ω.

IV.1.9 Sejam $A \subset E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $x \in A$ e $f_{a,x}: J_{a,x} \to A$ a curva integral máxima de X, com a condição inicial (a, x). Para cada $t \in J_{a,x}$, tem-se então que $f_{a,x}: J_{a,x} \to A$ é também a curva integral máxima de X, para a condição inicial $(t, f_{a,x}(t))$. Por outras palavras, sendo $\omega: \Omega \to A$ a solução geral de X, para cada $(t, a, x) \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$, tem-se $(s, a, x) \in \Omega$ se, e só se, $(s, t, \omega(t, a, x)) \in \Omega$ e, nesse caso,

$$\omega(s, a, x) = \omega(s, t, \omega(t, a, x)).$$

Dem: Uma vez que $f_{a,x}: J_{a,x} \to A$ é uma curva integral admitindo a condição inicial $(t, f_{a,x}(t))$, concluímos que, sendo $f: J \to A$ a curva integral máxima com esta última condição inicial, tem-se $J_{a,x} \subset J$ e $f_{a,x}$ é uma restrição de f. Em particular, vem $f(a) = f_{a,x}(a) = x$, pelo que f admite a condição inicial (a, x), o que implica que $J \subset J_{a,x}$, donde $J = J_{a,x}$. □

IV.1.10 **(Invariância por translação)** Sejam $A \subset E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Para cada $a, t \in \mathbb{R}$ e $x \in A$, tem-se então $J_{a+t,x} = a + J_{t,x}$ e, para cada $u \in J_{a+t,x}$, $f_{a+t,x}(u) = f_{t,x}(u - a)$. Por outras palavras, fazendo $u = a + s$, podemos dizer que $(a + s, a + t, x) \in \Omega$ se, e só se, $(s, t, x) \in \Omega$ e que, nesse caso,

$$\omega(a + s, a + t, x) = \omega(s, t, x).$$

---

[94]Se quiséssemos ser mais precisos, diríamos que ω é a solução geral do problema de valores iniciais para a equação diferencial definida por X, mas trata-se manifestamente de uma frase demasiado longa.

Dem: Seja $f: a + J_{t,x} \to A$ a aplicação definida por $f(u) = f_{t,x}(u - a)$. Tem-se então $f(a + t) = f_{t,x}(t) = x$ e

$$f'(u) = f'_{t,x}(u - a) = X(f_{t,x}(u - a)) = X(f(u)),$$

o que mostra que f é uma curva integral de X com a condição inicial $(a + t, x)$. Resulta daqui que $a + J_{t,x} \subset J_{a+t,x}$ e que, se $u \in a + J_{t,x}$, $f_{a+t,x}(u) = f_{t,x}(u - a)$. Aplicando a conclusão a que se acaba de chegar, com $-a$ no lugar de a e $a + t$ no lugar de t, vemos agora que $-a + J_{a+t,x} \subset J_{t,x}$, donde $J_{a+t,x} \subset a + J_{t,x}$. Concluímos portanto que $J_{a+t,x} = a + J_{t,x}$. □

IV.1.11 **(Corolário)** Nas condições anteriores, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $x \in A$, tem-se $J_{t,x} = t + J_{0,x}$ e, para cada $u \in J_{t,x}$, $f_{t,x}(u) = f_{0,x}(u - t)$. Por outras palavras, $(s, t, x) \in \Omega$ se, e só se, $(s - t, 0, x) \in \Omega$ e, nesse caso,

$$\omega(s, t, x) = \omega(s - t, 0, x).$$

Os dois resultados anteriores são característicos das equações diferenciais independentes do tempo, ao contrário dos que os precederam, que podem ser generalizados às equações diferenciais dependentes do tempo. Eles permitem-nos concluir que a solução geral duma equação diferencial independente do tempo pode ser resumida numa função com menos uma variável, o fluxo, que definimos em seguida.

IV.1.12 Sejam $A \subset E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1, e seja $\omega: \Omega \to A$ a respectiva solução geral. Sejam $\widehat{\Omega}$ a parte de $\mathbb{R} \times A$ constituída pelos pares (s, x) tais que $(s, 0, x) \in \Omega$, e $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to A$ a aplicação definida por $\widehat{\omega}(s, x) = \omega(s, 0, x)$. Diremos então que $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to A$ é o *fluxo* de X (em inglês, *flow* e, em francês, *coulée*).

§2. Continuidade da solução geral.

IV.2.1 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais será olhado como um espaço de parâmetros. Seja A uma parte de $F \times E$ e seja $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Para cada valor $y \in F$ do parâmetro, podemos considerar o subconjunto $A_{(y)}$, eventualmente vazio, de E, constituído pelos pontos x tais que $(y, x) \in A$, e a aplicação de classe C^1 $X_{(y)}: A_{(y)} \to E$, definida por $X_{(y)}(x) = X_{(y)_x} = X(y, x)$. Sendo, para cada $y \in F$, $\omega_{(y)}: \Omega_{(y)} \to A_{(y)}$ a solução geral de $X_{(y)}$, podemos notar $\Omega \subset F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ o conjunto dos (y, s, t, x) tais que $(s, t, x) \in \Omega_{(y)}$, e $\omega: \Omega \to E$ a aplicação definida por

$$\omega(y, s, t, x) = \omega_{(y)}(s, t, x).$$

Diz-se então que $\omega\colon \Omega \to E$ é a *solução geral paramétrica* de X. Analogamente se define o *fluxo paramétrico* $\widehat{\omega}\colon \widehat{\Omega} \to E$ de X, onde $\widehat{\Omega} \subset F \times \mathbb{R} \times E$ é o conjunto dos (y, t, x) tais que $(y, t, 0, x) \in \Omega$ e $\widehat{\omega}(y, t, x) = \omega(y, t, 0, x)$.

Usando mais uma vez uma linguagem corrente, $\omega(y, s, t, x)$ vai ser o local onde estaremos no instante s, se fixarmos o valor y do parâmetro e se estivermos em x no instante t.

IV.2.2 Repare-se que existe uma maneira trivial de aplicar ao caso não paramétrico os resultados sobre soluções gerais, que vamos demonstrar no caso paramétrico. Com efeito, se $A \subset E$ e se $X\colon A \to E$ é uma aplicação de classe C^1, com a respectiva solução geral $\omega\colon \Omega \to A$, podemos tomar qualquer espaço vectorial F de dimensão finita (por exemplo $F = \{0\}\ldots$) e considerá-lo artificialmente como espaço de parâmetros, definindo a aplicação de classe C^1, $\widehat{X}\colon F \times A \to E$, $\widehat{X}(y, x) = X(x)$. Nota-se então que a respectiva solução geral paramétrica $\widehat{\omega}$ está trivialmente definida em $F \times \Omega$ por $\widehat{\omega}(y, s, t, x) = \omega(s, t, x)$. Observação análoga se pode evidentemente fazer sobre a aplicação ao caso não paramétrico de resultados sobre os fluxos paramétricos.

IV.2.3 **(Lema)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ e $X\colon A \to F$ uma aplicação de classe C^1. Para cada parte compacta $K \subset A$, existem então $r, R > 0$ tais que, para $z \in K$ e $x, y \in A$, com $\|x - z\| \le r$ e $\|y - z\| \le r$, se tenha $\|X(y) - X(x)\| \le R\|y - x\|$.[95]
Dem: Suponhamos que este resultado era falso. Podíamos então escolher sucessões de números reais estritamente positivos r_n e R_n, com $r_n \to 0$ e $R_n \to +\infty$ (por exemplo $r_n = \frac{1}{n}$ e $R_n = n\ldots$) e escolher então, para cada n, elementos $z_n \in K$ e $x_n, y_n \in A$, com $\|x_n - z_n\| \le r_n$, $\|y_n - z_n\| \le r_n$ e

$$\|X(y_n) - X(x_n)\| > R_n\|y_n - x_n\|.$$

Pela compacidade de K, podemos supor, eventualmente tomando subsucessões, que existe $z \in K$ tal que $z_n \to z$. Sejam $r, R > 0$ tais que, quaisquer que sejam $x, y \in B_r(z) \cap A$, se tenha $\|X(y) - X(x)\| \le R\|y - x\|$ (cf. IV.1.3). Fixemos n_0 tal que, para cada $n \ge n_0$, $\|z_n - z\| < r/2$, $r_n < r/2$ e $R_n > R$. Para cada $n \ge n_0$, tem-se então que x_n e y_n estão em $B_r(z) \cap A$, portanto

$$\|X(y_n) - X(x_n)\| \le R\|y_n - x_n\| \le R_n\|y_n - x_n\|,$$

o que é absurdo. □

[95] Este lema não é mais do que uma versão uniforme de IV.1.3.

IV.2.4 **(Lema)** Sejam $A \subset F \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Sejam $y \in F$ e $f: [0,1] \to E$ uma curva integral de $X_{(y)}: A_{(y)} \to E$, com a condição inicial $(0,0)$. Para cada $\delta > 0$, existe então $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $\tilde{y} \in F$, com $\|\tilde{y} - y\| \leq \varepsilon$, e cada curva integral $g: [0,1] \to E$ de $X_{(\tilde{y})}$, com a condição inicial $(0,0)$, se tenha $\|g(1) - f(1)\| \leq \delta$.

Dem: $\{y\} \times f([0,1])$ é uma parte compacta de A, pelo que o lema anterior permite-nos fixar $r, R > 0$ tais que, para cada $t \in [0,1]$ e (y', x') e (y'', x'') em A, verificando as condições

$$\|(y', x') - (y, f(t)\| \leq r,$$
$$\|(y'', x'') - (y, f(t)\| \leq r,$$

se tenha

$$\|X((y', x')) - X((y'', x''))\| \leq R\|(y', x') - (y'', x'')\|$$

(tomamos, para fixar ideias, a norma do máximo em $F \times E$). Seja dado $\delta > 0$. Fixemos $\delta' > 0$, com $\delta' < \min(\delta, r)$. Seja $\varepsilon = \delta' e^{-R}$. Seja $\tilde{y} \in F$ tal que $\|\tilde{y} - y\| \leq \varepsilon$ e que exista uma curva integral $g: [0,1] \to E$ de $X_{(\tilde{y})}$, com a condição inicial $(0,0)$.

Seja T o conjunto dos $t \in [0,1]$ tais que, para cada $s \in [0,t]$, se tenha $\|g(s) - f(s)\| \leq \delta'$. Tem-se $0 \in T$, pelo que podemos considerar o supremo a de T, e a continuidade de f e de g implica que se tem ainda $\|g(a) - f(a)\| \leq \delta' < \delta$, pelo que tudo o que temos que provar é que $a = 1$. Suponhamos que se tinha $a < 1$ e tentemos chegar a uma contradição.

O facto de se ter $\|g(a) - f(a)\| < r$ implica, pela continuidade de f e de g, que existe $b \in [0,1]$, com $a < b < 1$, tal que, para cada $s \in [a,b]$, $\|g(s) - f(s)\| < r$, esta desigualdade sendo também trivialmente verificada para $s \in [0,a]$. Para cada $s \in [0,b]$, temos agora, uma vez que $\|\tilde{y} - y\| \leq \varepsilon \leq \delta' < r$,

$$\|X(\tilde{y}, g(s)) - X(y, f(s))\| \leq R\|(\tilde{y}, g(s)) - (y, f(s))\|,$$

donde

$$\begin{aligned}\|g(s) - f(s)\| &= \Big\|\int_0^s X(\tilde{y}, g(u)) - X(y, f(u))\, du\Big\| \leq \\ &\leq R\int_0^s \|(\tilde{y}, g(u)) - (y, f(u))\|\, du,\end{aligned}$$

portanto

$$\|(\tilde{y}, g(s)) - (y, f(s))\| \leq \varepsilon + R\int_0^s \|(\tilde{y}, g(u)) - (y, f(u))\|\, du,$$

o que, pelo lema de Gronwall, implica que

$$\|g(s) - f(s)\| \leq \|(\tilde{y}, g(s)) - (y, f(s))\| \leq \varepsilon\, e^{Rs} \leq \delta',$$

ou seja, $b \in T$. Chegámos portanto a uma contradição, por a ser o supremo de T. □

IV.2.5 **(Continuidade da solução geral)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset F \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Seja $\omega: \Omega \to E$ a solução geral paramétrica de X, onde $\Omega \subset F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$. Tem-se então que ω é uma aplicação contínua.

Dem: Para cada $(y, x) \in A$ e $t \in \mathbb{R}$, seja $f_{y,t,x}: J_{y,t,x} \to E$ a curva integral máxima de $X_{(y)}: A_{(y)} \to E$, com a condição inicial (t, x). Se $(y, s, t, x) \in \Omega$, vem $(y, x) \in A$ e $s \in J_{y,t,x}$ e podemos considerar uma aplicação $\widehat{f}_{y,s,t,x}: [0, 1] \to E$, definida por

$$\widehat{f}_{y,s,t,x}(u) = f_{y,t,x}((1-u)t + us) - x.$$

Vem $\widehat{f}_{y,s,t,x}(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}\widehat{f}'_{y,s,t,x}(u) &= (s-t)f'_{y,t,x}((1-u)t + us) = \\ &= (s-t)X(y, f_{y,t,x}((1-u)t + us)) = \\ &= (s-t)X(y, x + \widehat{f}_{y,s,t,x}(u)).\end{aligned}$$

Consideremos um novo espaço de parâmetros, $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$, e sejam $\widehat{A} \subset (F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E) \times E$,

$$\widehat{A} = \{((y, s, t, x), z) \mid (y, x + z) \in A\},$$

e $\widehat{X}: \widehat{A} \to E$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$\widehat{X}((y, s, t, x), z) = (s-t)X(y, x + z).$$

Tem-se $\widehat{f}'_{y,s,t,x}(u) = \widehat{X}((y, s, t, x), \widehat{f}_{y,s,t,x}(u))$, pelo que temos uma curva integral $\widehat{f}_{y,s,t,x}: [0, 1] \to E$ de $\widehat{X}$, com a condição inicial $(0, 0)$. Podemos passar agora à prova da continuidade de ω. Sejam $(y, s, t, x) \in \Omega$ e $\delta > 0$. Aplicando o lema anterior, com $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ como espaço de parâmetros, vemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada elemento $(\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, com $\|(\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}) - (y, s, t, x)\| \leq \varepsilon$, se tenha

$$\|\widehat{f}_{\tilde{y},\tilde{s},\tilde{t},\tilde{x}}(1) - \widehat{f}_{y,s,t,x}(1)\| \leq \frac{\delta}{2},$$

de onde podemos deduzir, supondo já que ε foi escolhido de modo a ser $\varepsilon < \delta/2$,

$$\begin{aligned}\|\omega(\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}) - \omega(y, s, t, x)\| &= \|f_{\tilde{y},\tilde{t},\tilde{x}}(\tilde{s}) - f_{y,s,t}(s)\| = \\ &= \|\widehat{f}_{\tilde{y},\tilde{s},\tilde{t},\tilde{x}}(1) - \widehat{f}_{y,s,t,x}(1) + \tilde{x} - x\| \leq\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + \varepsilon \leq \delta,$$

o que demonstra a continuidade. □

§3. Propriedades da solução geral quando o domínio é aberto.

IV.3.1 Recordemos que, se E é um espaço vectorial de dimensão finita, sobre o qual consideramos qualquer das suas normas, então E é completo, e portanto, para cada intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, o espaço vectorial de dimensão infinita $C(I, E)$, cujos elementos são as aplicações contínuas $f\colon I \to E$, é um espaço de Banach, com a norma $\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|$.

IV.3.2 **(Lema)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais será olhado como espaço de parâmetros. Sejam $F_0 \subset F$ uma parte arbitrária, A um conjunto aberto *em* $F_0 \times E$ e $X\colon A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Seja $K \subset A$ um conjunto compacto não vazio. Existe então um número real $c > 0$, tal que, qualquer que seja $(y, x) \in F_0 \times E$, com $d((y, x), K) \leq c$, se tenha $(y, x) \in A$ e exista uma curva integral $f\colon [0, c] \to E$ de $X_{(y)}\colon A_{(y)} \to E$, com a condição inicial $(0, x)$.

Dem: Pelo lema IV.2.3, podemos fixar $r, R > 0$ tais que, sempre que $(y_0, x_0) \in K$, e $(y, x), (\tilde{y}, \tilde{x}) \in A$ verificam $\|(y, x) - (y_0, x_0)\| \leq r$ e $\|(\tilde{y}, \tilde{x}) - (y_0, x_0)\| \leq r$, se tenha

$$\|X(y, x) - X(\tilde{y}, \tilde{x})\| \leq R\|(y, x) - (\tilde{y}, \tilde{x})\|,$$

onde, para fixar ideias, se considera em $F \times E$ a norma do máximo.

Fixemos $N > N_0 = \max_{(y,x) \in K} \|X(y, x)\|$. A continuidade uniforme (no sentido forte) de X no conjunto compacto K permite-nos deduzir que, se necessário tomando para r um valor mais pequeno, tem-se, para cada $(y_0, x_0) \in K$ e $(y, x) \in A$, com $\|(y, x) - (y_0, x_0)\| \leq r$, $\|X(y, x) - X(y_0, x_0)\| \leq N - N_0$, donde $\|X(y, x)\| \leq N$. Vamos supor também que r foi escolhido suficientemente pequeno de forma a ser menor do que o mínimo sobre o compacto K da distância ao fechado $(F_0 \times E) \setminus A$ de $F_0 \times E$ (condição ignorada se $A = F_0 \times E$). Assim, se $(y_0, x_0) \in K$ e se $(y, x) \in F_0 \times E$ verifica $\|(y, x) - (y_0, x_0)\| \leq r$, tem-se $(y, x) \in A$.

Fixemos $c > 0$ tal que $cN < r/2$, $cR < 1$ e $c \leq r/2$, e verifiquemos que um tal c está nas condições do enunciado. Suponhamos que $(y, x) \in F_0 \times E$ verifica $d((y, x), K) \leq c$. Existe então $(y_0, x_0) \in K$, com

$$\|(y, x) - (y_0, x_0)\| = d((y, x), K) \leq c,$$

em particular $\|(y, x) - (y_0, x_0)\| \leq r$, donde $(y, x) \in A$. Notemos $\mathcal{B}$ a bola fechada do espaço de Banach $C([0,c],E)$, com centro na aplicação de valor constante x e raio $r/2$. Se $f \in \mathcal{B}$, tem-se, para cada $s \in [0,c]$,

$$\begin{aligned}\|(y,f(s))-(y_0,x_0)\| &\le \|(y,f(s))-(y_0,x)\|+\|(y_0,x)-(y_0,x_0)\| \le\\ &\le \frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r,\end{aligned}$$

pelo que $(y,f(s)) \in A$ e $\|X(y,f(s))\| \le N$, o que nos permite definir uma aplicação contínua $Tf\colon [0,c] \to E$, por

$$Tf(t) = x + \int_0^t X(y,f(s))\,ds,$$

para a qual se tem

$$\|Tf(t)-x\| \le \int_0^t \|X(y,f(s))\|\,ds \le Nt \le \frac{r}{2},$$

o que mostra que $Tf \in \mathcal{B}$. Se $f \in \mathcal{B}$ e $g \in \mathcal{B}$, tem-se, para cada $s \in [0,c]$,

$$\|X(y,f(s))-X(y,g(s))\| \le R\|(y,f(s))-(y,g(s))\| = R\|f(s)-g(s)\|,$$

donde

$$\begin{aligned}\|Tf(t)-Tg(t)\| &= \Big\|\int_0^t X(y,f(s))-X(y,g(s))\,ds\Big\| \le\\ &\le R\int_0^t \|f(s)-g(s)\|\,ds \le\\ &\le R\,c\,\|f-g\|,\end{aligned}$$

o que implica que $\|Tf-Tg\| \le R\,c\,\|f-g\|$. O facto de $\mathcal{B}$ ser não vazio e, sendo fechado em $C([0,c],E)$, ser um espaço métrico completo implica, pelo teorema do ponto fixo para aplicações contractantes, a existência de $f \in \mathcal{B}$ tal que $Tf = f$, isto é, a existência de uma aplicação contínua $f\colon [0,c] \to E$ tal que, para cada $t \in [0,c]$,

$$f(t) = x + \int_0^t X(y,f(s))\,ds,$$

o que implica que $f(0)=x$ e $f'(t) = X(y,f(t))$. Concluímos portanto que f é uma curva integral de $X_{(y)}$, com a condição inicial $(0,x)$. □

IV.3.3 **(Lema)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $F_0 \subset F$, A um conjunto aberto em $F_0 \times E$ e $X\colon A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Seja $y \in F_0$ tal que exista uma curva integral $f\colon [0,1] \to E$ de $X_{(y)}\colon A_{(y)} \to E$, com a condição inicial $(0,0)$. Existe então $r>0$ tal que, qualquer que seja $\tilde{y} \in F_0$, com $\|\tilde{y}-y\| \le r$, existe uma curva integral $g\colon [0,1] \to E$ de $X_{(\tilde{y})}\colon A_{(\tilde{y})} \to E$, com a condição inicial $(0,0)$.

Dem: Seja $\omega\colon \Omega \to E$ a solução geral paramétrica de X. Uma vez que

$\{y\} \times f([0,1])$ é uma parte compacta de A, podemos, pelo lema anterior, fixar $c>0$ tal que, para cada $(\tilde{y},\tilde{x}) \in F_0 \times E$, verificando a condição $d((\tilde{y},\tilde{x}),\{y\} \times f([0,1])) \le c$, se tenha $(\tilde{y},\tilde{x}) \in A$ e exista uma curva integral $h\colon [0,c] \to E$ de $X_{(\tilde{y})}$, com a condição inicial $(0,\tilde{x})$, por outras palavras, $(\tilde{y},c,0,\tilde{x}) \in \Omega$. Por IV.2.5, sabemos que ω é uma aplicação contínua, pelo que ω vai ser uniformemente contínua (no sentido forte) no conjunto compacto $\{y\} \times [0,1] \times \{0\} \times \{0\} \subset \Omega$. Isto implica que podemos fixar r, com $0 < r \le c$, tal que, para cada $(\tilde{y},s,0,0) \in \Omega$, com $s \in [0,1]$ e $\|\tilde{y}-y\| \le r$, se tenha

$$\|\omega(\tilde{y},s,0,0) - f(s)\| = \|\omega(\tilde{y},s,0,0) - \omega(y,s,0,0)\| \le c,$$

donde também (consideramos em $F \times E$ a norma do máximo),

$$\|(\tilde{y},\omega(\tilde{y},s,0,0)) - (y,f(s))\| \le c,$$

portanto, pelo que vimos atrás,

$$(\tilde{y},\omega(\tilde{y},s,0,0)) \in A,$$
$$(\tilde{y},c,0,\omega(\tilde{y},s,0,0)) \in \Omega,$$

este último facto implicando sucessivamente, por IV.1.11 e IV.1.9,

$$(\tilde{y},c+s,s,\omega(\tilde{y},s,0,0)) \in \Omega,$$
$$(\tilde{y},c+s,0,0) \in \Omega.$$

Seja portanto $\tilde{y} \in F_0$ tal que $\|\tilde{y}-y\| \le r$. Tem-se então

$$\|(\tilde{y},0) - (y,f(0)\| \le r \le c,$$

donde $(\tilde{y},0) \in A$, pelo que podemos considerar a curva integral máxima $g\colon J \to E$ de $X_{(\tilde{y})}$, com a condição inicial $(0,0)$, e tudo o que temos que provar é que $1 \in J$. Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia. Seja $b \in [0,1]$ o supremo de J. Seja $s \in J$ tal que $s \ge \max(0, b-\frac{c}{2})$. Então $s \in [0,1]$ e $(\tilde{y},s,0,0) \in \Omega$, pelo que, como vimos atrás, $(\tilde{y},c+s,0,0) \in \Omega$, ou seja, $c+s \in J$, o que é absurdo, por se ter $c+s>b$. □

IV.3.4 **(Teorema Fundamental)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais funcionará como espaço de parâmetros. Sejam $F_0 \subset F$ uma parte arbitrária, A um conjunto aberto *em* $F_0 \times E$ e $X\colon A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Sendo $\omega\colon \Omega \to E$ a solução geral paramétrica de X, tem-se então que Ω é aberto *em* $F_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$.

Dem: (Comparar com a demonstração de IV.2.5) Seja (y,s,t,x) em Ω. Tem-se então $(y,x) \in A$ e podemos considerar a curva integral máxima $f_{y,t,x}\colon J_{y,t,x} \to E$ de $X_{(y)}$, com a condição inicial (t,x). Podemos então considerar a aplicação $\widehat{f}_{y,s,t,x}\colon [0,1] \to E$, definida por

$$\widehat{f}_{y,s,t,x}(u) = f_{y,t,x}((1-u)t+us) - x,$$

a qual verifica $\widehat{f}_{y,s,t,x}(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}\widehat{f}'_{y,s,t,x}(u) &= (s-t)f'_{y,t,x}((1-u)t+us) = \\ &= (s-t)X(y, f_{y,t,x}((1-u)t+us)) = \\ &= (s-t)X(y, x+\widehat{f}_{y,s,t,x}(u)),\end{aligned}$$

o que mostra que $\widehat{f}_{y,s,t,x}$ é uma curva integral, com condição inicial $(0,0)$ e com parâmetro (y,s,t,x), da aplicação de classe C^1 $\widehat{X}\colon \widehat{A} \to E$, definida por

$$\widehat{X}((\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}), \tilde{z}) = (\tilde{s} - \tilde{t})X(\tilde{y}, \tilde{x} + \tilde{z}),$$

no conjunto

$$\widehat{A} = \{((\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}), \tilde{z}) \mid (\tilde{y}, \tilde{x} + \tilde{z}) \in A\},$$

que é aberto em $(F_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E) \times E$. Podemos portanto aplicar o lema anterior para garantir a existência de uma vizinhança V de (y,s,t,x) em $F_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ tal que, para cada $(\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}) \in V$, exista uma curva integral $g\colon [0,1] \to E$ de $\widehat{X}$, com o parâmetro $(\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x})$ e a condição inicial $(0,0)$. Vamos ver que se tem então $(\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, o que terminará a demonstração. O facto de se ter $((\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}), 0) \in \widehat{A}$ implica que $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in A$, pelo que a asserção anterior é trivial no caso em que $\tilde{s} = \tilde{t}$. Suponhamos portanto que $\tilde{s} \neq \tilde{t}$. Podemos então notar J o intervalo $[\tilde{t}, \tilde{s}]$, se $\tilde{t} < \tilde{s}$, e o intervalo $[\tilde{s}, \tilde{t}]$, se $\tilde{s} < \tilde{t}$, e definir uma aplicação $h\colon J \to E$, por

$$h(v) = \tilde{x} + g(\frac{v - \tilde{t}}{\tilde{s} - \tilde{t}}).$$

Vem $h(\tilde{t}) = \tilde{x}$ e

$$h'(v) = \frac{1}{\tilde{s} - \tilde{t}} g'(\frac{v - \tilde{t}}{\tilde{s} - \tilde{t}}) = X(\tilde{y}, \tilde{x} + g(\frac{v - \tilde{t}}{\tilde{s} - \tilde{t}})) = X(\tilde{y}, h(v)),$$

pelo que h é uma curva integral de $X_{(\tilde{y})}$, com a condição inicial $(\tilde{t}, \tilde{x})$, o que mostra que $(\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$, como queríamos. □

A demonstração anterior, como aliás já acontecera com a da continuidade da solução geral (cf. IV.2.5), mostra uma das aplicações dos resultados paramétricos: Além do interesse que apresentam em si mesmos, eles servem para apoiar as demonstrações mesmo nos casos não paramétricos. Assim, se tentássemos demonstrar as versões não paramétricas de IV.2.5 e de IV.3.2, pelo caminho que seguimos, teríamos necessidade das versões paramétricas dos lemas que antecederam aqueles resultados. É claro que, de acordo com o que se disse em IV.2.2, as versões não paramétricas destes resultados, que nos abstemos mesmo de enunciar, são consequências triviais das respectivas versões paramétricas, que estudámos.

IV.3.5 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ um aberto e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Se $f: J \to A$ é a curva integral máxima de X, com uma condição inicial (t, x), então J é um intervalo aberto.

Dem: Pela versão não paramétrica do resultado anterior, a solução geral $\omega: \Omega \to A$ de X está definida num aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$, bastando agora notar que o intervalo J é o conjunto dos $s \in \mathbb{R}$ tais que $(s, t, x) \in \Omega$. □

IV.3.6 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ um aberto e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Sejam $t \in \mathbb{R}$, $x \in A$ e $f:]a, b[\to A$ a curva integral máxima de X com a condição inicial (t, x). Tem-se então:

a) Se a é finito, então, para cada compacto $K \subset A$, existe $c > 0$ tal que, para cada $a < s < a + c$, tem-se $f(s) \notin K$;

b) Se b é finito, então, para cada compacto $K \subset A$, existe $c > 0$ tal que, para cada $b - c < s < b$, tem-se $f(s) \notin K$.

Dem: Suponhamos que $K \subset A$ é um compacto, que podemos já supor não vazio. Tem-se então que $\{0\} \times \{0\} \times K$ é um compacto contido no domínio Ω da solução geral $\omega: \Omega \to A$ de X, domínio esse que sabemos ser aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$, pelo que podemos fixar $c > 0$, que seja menor que o mínimo sobre o compacto $\{0\} \times \{0\} \times K$ da distância ao fechado $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E) \setminus \Omega$. Para cada $s \in]a, b[$ tal que $f(s) \in K$, tem-se portanto que $(c, 0, f(s))$ e $(-c, 0, f(s))$ estão em Ω, donde, pela invariância por translação, $(c + s, s, f(s))$ e $(-c + s, s, f(s))$ estão em Ω, o que, por IV.1.9, implica que $c + s$ e $-c + s$ estão em $]a, b[$ (reparar que $f(s) = \omega(s, t, x)$), em particular $s + c < b$ e $s - c > a$. As alíneas a) e b) do enunciado deduzem-se agora do que acabamos de dizer, por passagem ao contra-recíproco. □

O resultado anterior pode ser interpretado, de modo intuitivo, dizendo que toda a solução, que não seja eterna, *foge* dos compactos que estão contidos no domínio do campo vectorial. Para quem conheça a noção de *compactificado de Alexandrov* de um espaço topológico localmente compacto e separado, as conclusões de a) e b) podem ser expressas em termos de convergência de $f(t)$ para o ponto do infinito de A.

§4. Equações diferenciais dependentes do tempo.

IV.4.1 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, A uma parte de $\mathbb{R} \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação. Se $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, diz-se que uma aplicação $f: J \to E$ é uma *solução* da equação diferencial (dependente do tempo) definida por X, se, para cada $t \in J$, $(t, f(t)) \in A$ e $f'(t) = X(t, f(t))$ (como no primeiro parágrafo, consideramos, por convenção, esta última condição verificada no caso trivial em que o intervalo J não tem mais que um ponto). Para cada $t \in J$, diz-se ainda que $(t, f(t))$ é uma *condição inicial* da solução.

IV.4.2 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset \mathbb{R} \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Para cada $(t, x) \in A$, existe então uma, e uma só, solução $f: J \to E$ da equação diferencial definida por X, com a condição inicial (t, x), com a propriedade de qualquer outra solução, com a mesma condição inicial, ser uma restrição dela. Além disso, sendo $\widehat{X}: A \to \mathbb{R} \times E$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$\widehat{X}(s, x) = (1, X(s, x)),$$

a curva integral máxima de $\widehat{X}$, com a condição inicial $(t, (t, x))$, está definida em J por $s \mapsto (s, f(s))$.

Dem: Seja $\widehat{f}: J \to A \subset \mathbb{R} \times E$ a curva integral máxima de $\widehat{X}$, com a condição inicial $(t, (t, x))$ e sejam $f_1: J \to \mathbb{R}$ e $f: J \to E$ as duas componentes de $\widehat{f}$. De se ter $\widehat{f}(t) = (t, x)$, concluímos que $f_1(t) = t$ e $f(t) = x$. Uma vez que $f_1'(s) = 1$, sai $f_1(s) = s$, para cada s, pelo que podemos agora concluir que

$$f'(s) = X(f_1(s), f(s)) = X(s, f(s)),$$

o que mostra que $f: J \to E$ é uma solução da equação diferencial definida por X, com a condição inicial (t, x). Por outro lado, sendo $g: J' \to E$ outra solução desta equação diferencial, com a mesma condição inicial, podemos considerar a aplicação $\widehat{g}: J' \to A$, definida por $\widehat{g}(s) = (s, g(s))$, que verifica $\widehat{g}(t) = (t, x)$ e

$$\widehat{g}'(s) = (1, g'(s)) = (1, X(s, g(s))) = \widehat{X}(\widehat{g}(s)),$$

pelo que $\widehat{g}$ é uma restrição de $\widehat{f}$, e portanto g é uma restrição de f. □

IV.4.3 Nas condições anteriores, dizemos que $f: J \to E$ é a *solução máxima* da equação diferencial definida por X, com a condição inicial (t, x). Como no caso das equações diferenciais independentes do tempo, notando, para cada $(t, x) \in A$, $f_{t,x}: J_{t,x} \to E$ a solução máxima da equação diferencial definida por X, com a condição inicial (t, x), podemos considerar o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$, formado pelos (s, t, x) tais que $s \in J_{t,x}$, e a aplicação $\omega: \Omega \to E$, definida por $\omega(s, t, x) = f_{t,x}(s)$, e dizemos que $\omega: \Omega \to E$ é a *solução geral* da equação diferencial dependente do tempo definida por X.

IV.4.4 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, A uma parte de $\mathbb{R} \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1, e seja $\omega: \Omega \to E$ a solução geral da equação diferencial dependente do tempo definida por X. Seja $\widehat{X}: A \to \mathbb{R} \times E$ a aplicação de classe C^1 associada, definida por $\widehat{X}(s, x) = (1, X(s, x))$, e seja $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to \mathbb{R} \times E$ a solução geral respectiva. Tem-se então que Ω é o conjunto dos (s, t, x) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ tais que

$(s,t,(t,x)) \in \widehat{\Omega}$ e, para cada $(s,t,x) \in \Omega$, tem-se

$$\widehat{\omega}(s,t,(t,x)) = (s,\omega(s,t,x)).$$

Dem: Trata-se simplesmente de uma reformulação da conclusão de IV.4.2. □

IV.4.5 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, A uma parte de $\mathbb{R} \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1, e seja $\omega: \Omega \to E$ a solução geral da equação diferencial dependente do tempo definida por X. Dados $(s,t,x) \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}$, tem-se que $(u,t,x) \in \Omega$ se, e só se, $(u,s,\omega(s,t,x)) \in \Omega$ e, nesse caso, vem

$$\omega(u,t,x) = \omega(u,s,\omega(s,t,x)).$$

Dem: É uma consequência do resultado anterior e de IV.1.9. □

Repare-se que, ao contrário do que acontecia com as equações diferenciais independentes do tempo, deixa de ser interessante, para as equações diferenciais dependentes do tempo, a consideração do fluxo. Com efeito, neste caso, o conhecimento da solução máxima com a condição inicial $(0,x)$ já não é suficiente para determinar a solução máxima com a condição inicial (t,x).

IV.4.6 Tal como no caso das equações diferenciais independentes do tempo, podemos também estudar o comportamento das equações diferenciais dependentes do tempo e de parâmetros. Assim, dados os espaços vectoriais de dimensão finita E e F, o segundo dos quais funcionando como espaço de parâmetros, o subconjunto A de $F \times \mathbb{R} \times E$ e a aplicação de classe C^1 $X: A \to E$, podemos, para cada $y \in F$, considerar o subconjunto $A_{(y)}$ de $\mathbb{R} \times E$, formado pelos (t,x) tais que $(y,t,x) \in A$, e a aplicação de classe C^1 $X_{(y)}: A_{(y)} \to E$, definida por $X_{(y)}(t,x) = X(y,t,x)$, e a solução máxima da equação diferencial dependente do tempo definida por $X_{(y)}$, com uma certa condição inicial, é também chamada solução máxima da equação diferencial, paramétrica e dependente do tempo, definida por X, com o parâmetro y e a condição inicial considerada. Como antes, sendo, para cada $(y,t,x) \in A$, $f_{y,t,x}: J_{y,t,x} \to E$ a solução máxima referente ao parâmetro y e à condição inicial (t,x), podemos considerar o subconjunto Ω de $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ formado pelos (y,s,t,x) tais que $s \in J_{y,t,x}$, e a aplicação $\omega: \Omega \to E$, definida por $\omega(y,s,t,x) = f_{y,t,x}(s)$, dizendo-se então que $\omega: \Omega \to E$ é a *solução geral paramétrica* da equação diferencial definida por X.
É claro que, tal como em IV.4.4, sendo $\widehat{X}: A \to \mathbb{R} \times E$ a aplicação de classe C^1 associada, definida por $\widehat{X}(y,s,z) = (1, X(y,s,z))$, e, sendo $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to \mathbb{R} \times E$ a solução geral da equação diferencial paramétrica, independente do tempo, definida por $\widehat{X}$, Ω vai ser o conjunto dos elementos (y,s,t,x) em $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ tais que $(y,s,t,(t,x)) \in \widehat{\Omega}$ e, para cada

$(y,s,t,x) \in \Omega$, vai-se ter

$$\widehat{\omega}(y,s,t,(t,x)) = (s,\omega(y,s,t,x)).$$

IV.4.7 **(Corolário)** Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $F_0 \subset F$ uma parte arbitrátria, $A \subset F_0 \times \mathbb{R} \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Seja $\omega: \Omega \to E$ a solução geral paramétrica da equação diferencial dependente do tempo definida por X, onde $\Omega \subset F_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$. Tem-se então:

a) $\omega: \Omega \to E$ é uma aplicação contínua;

b) No caso em que A é aberto em $F_0 \times \mathbb{R} \times E$, Ω é aberto em $F_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$.

É claro que, pelo processo trivial habitual (cf. IV.2.2), deduz-se da conclusão precedente uma correspondente versão não paramétrica.

Dem: Trata-se de uma consequência trivial de IV.2.5 e IV.3.3. □

Nas aplicações haverá por vezes necessidade da seguinte versão ligeiramente refinada da conclusão b) do resultado anterior:

IV.4.8 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, F_0 uma parte de F, I um intervalo de $\mathbb{R}$, A um conjunto aberto *em* $F_0 \times I \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Sendo $\omega: \Omega \to E$ a solução geral paramétrica da equação diferencial dependente do tempo definida por X, tem-se então que Ω é aberto em $F_0 \times I \times I \times E$.

Dem: Seja $\widehat{A}$ um aberto de $F \times \mathbb{R} \times E$ tal que $A = \widehat{A} \cap (F_0 \times I \times E)$. Se necessário substituindo $\widehat{A}$ pela sua intersecção com um aberto de $F \times \mathbb{R} \times E$, contendo A, que seja domínio de um prolongamento de classe C^1 de X, pode-se já supor a existência de uma aplicação de classe C^1 $\widehat{X}: \widehat{A} \to E$, prolongando X. Seja então $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to E$ a solução geral da equação diferencial paramétrica dependente do tempo definida por $\widehat{X}$, que sabemos estar definida num aberto $\widehat{\Omega}$ de $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$. É imediato reconhecer-se que

$$\Omega = \widehat{\Omega} \cap (F_0 \times I \times I \times E),$$

donde o resultado. □

§5. Equações diferenciais lineares.

IV.5.1 Nesta secção vamos notar E e G dois espaços vectoriais de dimensão finita e $\pi: G \times E \to E$ uma aplicação bilinear. Notaremos frequentemente $z \cdot x$ o elemento $\pi(z,x)$. Consideraremos ainda em E e G duas normas e notaremos k um real positivo tal que $\|\pi(z,x)\| \le k\|z\|\|x\|$ (toda a aplicação

bilinear é contínua). Como exemplos frequentes desta situação, temos:
a) $G = L(E; E)$, com a norma associada à norma de E, e a aplicação π está definida por $\pi(\xi, x) = \xi(x)$; neste caso podemos tomar $k = 1$.
b) $G = \mathbb{R}$ e a aplicação $\pi: \mathbb{R} \times E \to E$ é a multiplicação pelos escalares; ainda neste caso, podemos tomar $k = 1$.

IV.5.2 Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma: I \to E$ e $\Gamma: I \to G$ duas aplicações contínuas. Podemos então considerar uma aplicação $X: I \times E \to E$, definida por

$$X(t, x) = \Gamma(t) \cdot x + \gamma(t),$$

e tentar estudar a equação diferencial dependente do tempo definida por X (que é o que se costuma chamar de *equação diferencial linear*). Note-se, no entanto, que não podemos garantir de momento, nem a unicidade, nem a existência de soluções não triviais, visto que a aplicação X não tem de ser de classe C^1 (sê-lo-ia se tivéssemos exigido que Γ e γ fossem de classe C^1, mas teremos necessidade do caso em que estas aplicações são apenas contínuas). Fazendo um estudo directo, podemos, não só garantir a unicidade das soluções, como que elas existem e estão definidas no próprio intervalo I, qualquer que seja a condição inicial.

IV.5.3 Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma: I \to E$ e $\Gamma: I \to G$ duas aplicações contínuas. Para cada $(t, x) \in I \times E$, existe então uma, e uma só, aplicação $f: I \to E$ tal que $f(t) = x$ e que, no caso em que I tenha mais que um elemento,

$$f'(s) = \Gamma(s) \cdot f(s) + \gamma(s),$$

para cada $s \in I$.
Dem: É fácil de ver que nos bastará provar que, para cada intervalo fechado e limitado K, com $t \in K \subset I$, existe uma, e uma só, aplicação $f_K: K \to E$, tal que $f_K(t) = x$ e que, no caso em que K tenha mais que um ponto,

$$f'_K(s) = \Gamma(s) \cdot f_K(s) + \gamma(s).$$

De facto, se isso estiver provado, a unicidade provará que duas aplicações deste tipo, definidas nos intervalos K e K', coincidem em $K \cap K'$, o que nos permite definir uma aplicação $f: I \to E$, que prolongue todos os f_K, e a prova de que esta aplicação é efectivamente uma solução da equação diferencial linear (trivialmente única) é então uma discussão do tipo da necessária para a demonstração de IV.1.7. Fixemos portanto um intervalo fechado e limitado K, com $t \in K \subset I$, podendo já supor-se que $K = [a, b]$, com $a < b$. A existência e unicidade de uma aplicação $f: K \to E$, verificando $f(t) = x$ e, para cada $s \in K$, $f'(s) = \Gamma(s) \cdot f(s) + \gamma(s)$, é equivalente à existência e unicidade de uma aplicação contínua $f: K \to E$, verificando, para cada $s \in K$,

$$f(s) = x + \int_t^s \Gamma(u)\cdot f(u) + \gamma(u)\,du.$$

Consideremos o espaço de Banach $C(K,E)$, cujos elementos são as aplicações contínuas $f\colon K \to E$ (cf. IV.3.1). Seja T a aplicação de $C(K,E)$ em $C(K,E)$, definida por

$$Tf(s) = x + \int_t^s \Gamma(u)\cdot f(u)\,du. \tag{1}$$

Sendo R o máximo de $\|\Gamma(s)\|$, para $s \in K$, provemos, por indução em p, que, dados $f, g \in C(K,E)$, se tem, para cada $p \geq 0$ e $s \in K$,

$$\|T^p f(s) - T^p g(s)\| \leq \frac{k^p R^p |s-t|^p}{p!}\|f-g\| \tag{2}$$

(onde T^0 é a aplicação identidade). Com efeito, (2) é trivial para $p = 0$ e, supondo-o verificado para um certo $p \geq 0$, vem

$$\begin{aligned}
\|T^{p+1}f(s) - T^{p+1}g(s)\| &= \Big\|\int_t^s \Gamma(u)\cdot(T^p f(u) - T^p g(u))\,du\Big\| \leq \\
&\leq \Big|\int_t^s kR\|T^p f(u) - T^p g(u)\|\,du\Big| \leq \\
&\leq \Big|\int_s^t \frac{k^{p+1}R^{p+1}|u-t|^p}{p!}\|f-g\|\,du\Big| = \\
&= \frac{k^{p+1}R^{p+1}}{p!}\|f-g\|\Big|\int_t^s |u-t|^p\,du\Big| = \\
&= \frac{k^{p+1}R^{p+1}}{p!}\|f-g\|\frac{|s-t|^{p+1}}{p+1},
\end{aligned}$$

o que mostra que (2) é verificado com $p+1$ no lugar de p. Deduzimos agora de (2) que

$$\|T^p f - T^p g\| \leq \frac{(kR(b-a))^p}{p!}\|f-g\|,$$

pelo que, se fixarmos $p > 0$ tal que $\frac{(kR(b-a))^p}{p!} < 1$ (lembrar que o termo geral de uma série exponencial converge para 0), o teorema do ponto fixo para aplicações contractantes garante a existência de um, e um só, $f \in C(K,E)$ tal que $T^p f = f$. Vem então

$$T^p T f = T^{p+1} f = T T^p f = T f,$$

donde, pela parte de unicidade da afirmação anterior, $Tf = f$. Por outro lado, se g é um elemento de $C(K,E)$ verificando $Tg = g$, sai, imediatamente, por indução em p, que $T^p g = g$, donde $f = g$. Provou-se portanto a existência e unicidade de $f \in C(K, E)$, verificando $Tf = f$, ou seja, verificando (1), e a demonstração está terminada. □

IV.5.4 **(Lema de continuidade)** Sejam F um espaço vectorial de dimensão finita, que funcionará como espaço de parâmetros, e $F_0 \subset F$. Sejam

$$\gamma: F_0 \times [0,1] \to E, \Gamma: F_0 \times [0,1] \to G$$

duas aplicações contínuas. Para cada $y \in F_0$, seja $f_{(y)}: [0,1] \to E$ a única aplicação que verifica $f_{(y)}(0) = 0$ e, para cada $s \in [0,1]$,

$$f'_{(y)}(s) = \Gamma(y,s) \cdot f_{(y)}(s) + \gamma(y,s).$$

Tem então lugar uma aplicação contínua $g: F_0 \to E$, definida por $g(y) = f_{(y)}(1)$.

Dem: Sejam $y \in F$ e $\delta > 0$. Sejam R o máximo de $\|\Gamma(y,t)\|$ e R' o máximo de $\|f'_{(y)}(t)\|$, para $t \in [0,1]$. Seja $\delta' > 0$ tal que $\delta' \leq 1$ e

$$\delta' \leq \frac{\delta}{1 + kR'}\, e^{-k(R+1)}.$$

Pela continuidade uniforme, no sentido forte, de γ e de Γ no conjunto compacto $\{y\} \times [0,1]$, podemos fixar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $t \in [0,1]$ e cada $\tilde{y} \in F_0$, com $\|\tilde{y} - y\| \leq \varepsilon$, se tenha

$$\|\gamma(\tilde{y},t) - \gamma(y,t)\| \leq \delta',$$
$$\|\Gamma(\tilde{y},t) - \Gamma(y,t)\| \leq \delta',$$

em particular, $\|\Gamma(\tilde{y},t)\| \leq R + 1$.

Suponhamos que $\tilde{y} \in F_0$ verifica $\|\tilde{y} - y\| \leq \varepsilon$. Tem-se então

$$\begin{aligned}
&\|f_{(\tilde{y})}(t) - f_{(y)}(t)\| = \\
&\quad = \Big\| \int_0^t \gamma(\tilde{y},s) - \gamma(y,s) + \Gamma(\tilde{y},s) \cdot f_{(\tilde{y})}(s) - \Gamma(y,s) \cdot f_{(y)}(s)\, ds \Big\| \leq \\
&\quad \leq \int_0^t \|\gamma(\tilde{y},s) - \gamma(y,s)\|\, ds + \int_0^t \|\Gamma(\tilde{y},s) \cdot (f_{(\tilde{y})}(s) - f_{(y)}(s))\|\, ds + \\
&\quad\quad + \int_0^t \|(\Gamma(\tilde{y},s) - \Gamma(y,s)) \cdot f_{(y)}(s)\|\, ds \leq \\
&\quad \leq \delta'(1 + kR') + k(R+1) \int_0^t \|f_{(\tilde{y})}(s) - f_{(y)}(s)\|\, ds,
\end{aligned}$$

de onde deduzimos, pelo lema de Gronwall,

$$\|g(\tilde{y}) - g(y)\| = \|f_{(\tilde{y})}(1) - f_{(y)}(0)\| \leq \delta'(1 + kR')\, e^{k(R+1)} \leq \delta,$$

o que demonstra a continuidade de g no ponto y. □

IV.5.5 **(Continuidade da solução geral das equações diferenciais lineares)** Sejam F um espaço vectorial de dimensão finita, que olharemos como espaço de parâmetros, e $F_0 \subset F$. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma: F_0 \times I \to E$ e $\Gamma: F_0 \times I \to G$ duas aplicações contínuas. Para cada $(y, t, x) \in F_0 \times I \times E$, seja $f_{y,t,x}: I \to E$ a única aplicação tal que $f_{y,t,x}(t) = x$ e, para cada $s \in I$,

$$f'_{y,t,x}(s) = \gamma(y, s) + \Gamma(y, s) \cdot f_{y,t,x}(s).$$

Seja $\omega: F_0 \times I \times I \times E \to E$ a *solução geral* da equação diferencial linear paramétrica, definida por

$$\omega(y, s, t, x) = f_{y,t,x}(s).$$

Tem-se então que ω é uma aplicação contínua.

Dem: Para cada $(y, s, t, x) \in F_0 \times I \times I \times E$, seja $\widehat{f}_{y,s,t,x}: [0, 1] \to E$ a aplicação definida por

$$\widehat{f}_{y,s,t,x}(u) = f_{y,t,x}((1-u)t + us) - x.$$

Vem $\widehat{f}_{y,s,t,x}(0) = 0$, $\widehat{f}_{y,s,t,x}(1) = \omega(y, s, t, x) - x$ e

$$\begin{aligned}\widehat{f}'_{y,s,t,x}(u) &= (s-t) f'_{y,t,x}((1-u)t + us) = \\ &= (s-t)\gamma(y, (1-u)t + us) + \\ &\quad + (s-t)\Gamma(y, (1-u)t + us) \cdot (x + \widehat{f}_{y,s,t,x}(u)),\end{aligned}$$

pelo que, se tomarmos $F_0 \times I \times I \times E$ como novo espaço de parâmetros, e definirmos aplicações contínuas

$$\begin{aligned}&\widehat{\gamma}: (F_0 \times I \times I \times E) \times [0, 1] \to E, \\ &\widehat{\Gamma}: (F_0 \times I \times I \times E) \times [0, 1] \to G,\end{aligned}$$

por

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}((y, s, t, x), u) &= (s-t)\gamma(y, (1-u)t + us) + \\ &\qquad + (s-t)\Gamma(y, (1-u)t + us) \cdot x, \\ \widehat{\Gamma}((y, s, t, x), u) &= (s-t)\Gamma(y, (1-u)t + us),\end{aligned}$$

a igualdade anterior pode ser escrita

$$\widehat{f}'_{y,s,t,x}(u) = \widehat{\gamma}((y, s, t, x), u) + \widehat{\Gamma}((y, s, t, x), u) \cdot \widehat{f}_{y,s,t,x}(u),$$

e o lema anterior permite-nos concluir a continuidade da aplicação de $F_0 \times I \times I \times E$ em E, que a (y, s, t, x) associa $\omega(y, s, t, x) - x$, donde se deduz a continuidade da aplicação ω. $\square$

§6. Diferenciabilidade da solução geral.

IV.6.1 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais olhamos como espaço de parâmetros. Sejam $A \subset F \times \mathbb{R} \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^p, onde $p \geq 1$. Tem-se então que a solução geral $\omega: \Omega \to E$, da equação diferencial paramétrica, dependente do tempo, definida por X, é uma aplicação de classe C^p.

Dem: A demonstração deste resultado é algo longa, ocupando a totalidade deste parágrafo, pelo que, para uma melhor sistematização, vamos dividi-la em várias alíneas.

a) Comecemos por notar que nos bastará provar o resultado no caso particular em que A é um aberto de $F \times \mathbb{R} \times E$. Com efeito, no caso geral, podemos considerar um aberto $\widehat{A}$ de $F \times \mathbb{R} \times E$, com $A \subset \widehat{A}$, e um prolongamento de classe C^p, $\widehat{X}: \widehat{A} \to E$, de X, e, sendo então $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to E$ a solução geral da equação diferencial paramétrica definida por $\widehat{X}$, é imediato constatar que $\Omega \subset \widehat{\Omega}$ e que ω é uma restrição de $\widehat{\omega}$. Vamos portanto supor que A é aberto em $F \times \mathbb{R} \times E$.

b) Vamos fazer a demonstração por indução em p (ω é de classe C^∞ se for de classe C^p, para cada p finito). Para isso, procedemos do seguinte modo: Demonstramos que o resultado é válido para um certo $p \geq 1$, supondo que ele é válido para $p-1$, no caso em que $p > 1$, e sem nenhuma hipótese, no caso em que $p = 1$.

c) Lembremos que, por IV.4.7, Ω é aberto em $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$. Seja $U = \{y \in F \mid (y, 1, 0, 0) \in \Omega\}$, que é portanto um aberto de F, e seja $h: U \to E$ a aplicação contínua definida por $h(y) = \omega(y, 1, 0, 0)$. Vamos, nas próximas seis alíneas, e isso será a parte essencial da demonstração, mostrar que h é uma aplicação de classe C^p.

d) Mais geralmente, consideremos a aplicação contínua $g: U \times [0,1] \to E$, definida por $g(y,t) = \omega(y, t, 0, 0)$, e reparemos que, se $p > 1$, a hipótese de indução implica que g é de classe C^{p-1}. Notemos também que $h(y) = g(y, 1)$ e que $g(y, 0) = 0$.

e) Consideremos as aplicações contínuas

$$\gamma: U \times [0,1] \to L(F; E),$$
$$\Gamma: U \times [0,1] \to L(E; E),$$

definidas por

$$\begin{aligned} \gamma(y,t) &= D_1X(y, t, g(y,t)), \\ \Gamma(y,t) &= D_3X(y, t, g(y,t)) \end{aligned} \tag{1}$$

(derivadas parciais de X relativamente à primeira e à terceira variáveis), e reparemos que, no caso em que $p > 1$, γ e Γ são aplicações de classe C^{p-1}.

f) Considerando a aplicação bilinear

$$\pi: L(E; E) \times L(F; E) \to L(F; E),$$

definida por $\pi(\beta, \alpha) = \beta \circ \alpha$, as aplicações γ e Γ vão definir uma equação diferencial linear paramétrica, pelo que, por IV.5.5, podemos considerar uma aplicação contínua $\xi: U \times [0,1] \to L(F; E)$, definida por

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\xi(y, 0) = 0, \\ &\frac{\partial \xi}{\partial t}(y, t) = \gamma(y, t) + \Gamma(y, t) \cdot \xi(y, t). \end{aligned}$$

Além disso, no caso em que $p > 1$, podemos considerar a aplicação de classe C^{p-1}, $\widehat{X}: U \times [0,1] \times L(F; E) \to L(F; E)$,

$$\widehat{X}(y, t, \eta) = \gamma(y, t) + \Gamma(y, t) \circ \eta,$$

e resulta da hipótese de indução que a solução geral $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to L(F; E)$, da equação diferencial paramétrica definida por $\widehat{X}$, é de classe C^{p-1}, pelo que, uma vez que $\xi(y, t) = \widehat{\omega}(y, t, 0, 0)$, concluímos que ξ é mesmo uma aplicação de classe C^{p-1}.
g) O nosso próximo objectivo é mostrar que, para cada $y \in U$, h é diferenciável em y e com $Dh_y = \xi(y, 1)$; se o fizermos, ficará provado que $Dh: U \to L(F; E)$ é uma aplicação contínua e que, no caso em que $p > 1$, Dh é uma aplicação de classe C^{p-1}, pelo que, em qualquer dos casos, h será uma aplicação de classe C^p, e estará atingido o objectivo apontado em c).
h) Fixemos $y \in U$. Seja $\delta > 0$ arbitrário.
Seja K o conjunto dos $(y, t, g(y, t))$, com $t \in [0,1]$, que é um compacto contido em A, e consideremos

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} R &= \max_{t \in [0,1]} \|DX(y, t, g(y, t))\|, \\ R' &= \max_{t \in [0,1]} \|\xi(y, t)\|. \end{aligned}$$

Fixemos $\delta' > 0$ tal que $\delta' \leq 1$ e $\delta' \leq \frac{\delta}{1+R'}\, e^{-(R+1)}$.
Pela continuidade uniforme, no sentido forte, de DX no compacto K, podemos fixar $r > 0$ tal que, sempre que $(\tilde{y}, t, z) \in A$, com $t \in [0,1]$ e $\|(\tilde{y}, t, z) - (y, t, g(y, t))\| \leq r$, se tenha

$$\text{(4)} \qquad \|DX(\tilde{y}, t, z) - DX(y, t, g(y, t))\| \leq \delta'$$

e vamos já supor que escolhemos r menor que o mínimo estritamente positivo das distâncias dos pontos do compacto K ao fechado $(F \times \mathbb{R} \times E) \setminus A$ (ignoramos esta condição no caso em que $A = F \times \mathbb{R} \times E$), de modo que, se $(\tilde{y}, t, z) \in F \times \mathbb{R} \times E$, com $t \in [0,1]$, verifica $\|(\tilde{y}, t, z) - (y, t, g(y, t))\| \leq r$, então tem-se automaticamente $(\tilde{y}, t, z) \in A$.
Do mesmo modo, pela continuidade uniforme, no sentido forte, de g sobre o

compacto $\{y\} \times [0,1]$, podemos fixar $r' > 0$, já com $r' < r$, de modo que, se $\tilde{y} \in F$ e $\|\tilde{y} - y\| \le r'$, então $\tilde{y} \in U$ e, para cada $t \in [0,1]$, $\|g(\tilde{y},t) - g(y,t)\| < r$.
i) Suponhamos que $w \in F$ verifica $\|w\| \le r'$. Seja $\theta_{(w)}\colon [0,1] \to E$ a aplicação definida por

$$\theta_{(w)}(t) = g(y+w,t) - g(y,t) - \xi(y,t)(w) \tag{5}$$

e reparemos que se tem $\theta_{(w)}(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}\theta'_{(w)}(t) &= X(y+w,t,g(y+w,t)) - X(y,t,g(y,t)) - \\ &\quad - \gamma(y,t)(w) - \Gamma(y,t)(\xi(y,t)(w)) = \\ &= X(y+w,t,g(y+w,t)) - X(y,t,g(y,t)) - \\ &\quad - D_1X(y,t,g(y,t))(w) - D_3X(y,t,g(y,t))(\xi(y,t)(w)).\end{aligned} \tag{6}$$

Considerando y e t fixados, e aplicando a fórmula da média em I.5.20 à aplicação de classe C^1 de $B_r(y) \times B_r(g(y,t))$ em E, que a $(\tilde{y},z)$ associa $X(\tilde{y},t,z)$, sai, tendo em conta (4),

$$\begin{aligned}&\|X(y+w,t,g(y+w,t)) - X(y,t,g(y,t)) - D_1X(y,t,g(y,t))(w) - \\ &\qquad - D_3X(y,t,g(y,t))(g(y+w,t) - g(y,t))\| \le \\ &\qquad \le \delta'\|(w, g(y+w,t) - g(y,t))\| \le \\ &\qquad \le \delta'(\|w\| + \|g(y+w,t) - g(y,t)\|) \le \\ &\qquad \le \delta'(\|w\| + \|\theta_{(w)}(t)\| + \|\xi(y,t)(w)\|) \le \\ &\qquad \le \delta'(\|\theta_{(w)}(t)\| + (1+R')\|w\|).\end{aligned} \tag{7}$$

Vem também

$$\begin{aligned}&\|D_3X(y,t,g(y,t))(g(y+w,t) - g(y,t)) - \\ &\qquad - D_3X(y,t,g(y,t))(\xi(y,t)(w)\| \le \\ &\qquad \le \|D_3X(y,t,g(y,t))\|\|g(y+w,t) - g(y,t) - \xi(y,t)(w)\| \le \\ &\qquad \le R\|\theta_w(t)\|,\end{aligned} \tag{8}$$

pelo que, combinando (6), (7) e (8), obtém-se

$$\|\theta'_{(w)}(t)\| \le \delta'(1+R')\|w\| + (R+1)\|\theta_{(w)}(t)\|, \tag{9}$$

donde

$$\begin{aligned}\|\theta_{(w)}(t)\| &= \Big\|\int_0^t \theta'_{(w)}(s)\,ds\Big\| \le \\ &\le \delta'(1+R')\|w\| + (R+1)\int_0^t \|\theta_{(w)}(t)\|\,ds,\end{aligned} \tag{10}$$

o que, pelo lema de Gronwall, implica que

$$\|\theta_{(w)}(t)\| \le \delta'(1+R')\|w\|\,e^{(R+1)t} \le \delta\|w\|, \tag{11}$$

em particular, $\|\theta_w(1)\| \le \delta\|w\|$, o que, tendo em conta (5), mostra que h é diferenciável em y e com derivada $\xi(y,1)$. Tal como observámos em g), atingimos assim o objectivo apontado na alínea c).
j) Vamos demonstrar, por fim, que $\omega\colon \Omega \to E$ é uma aplicação de classe C^p. Consideramos, para isso, uma nova equação diferencial, tendo como espaço de parâmetros $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$. Seja assim

$$\widehat{A} \subset (F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E) \times \mathbb{R} \times E$$

o aberto

$$\widehat{A} = \{((y,s,t,x),u,z) \mid (y,(1-u)t+us,z+x) \in A\},$$

e seja $\widehat{X}\colon \widehat{A} \to E$ a aplicação de classe C^p definida por

$$\widehat{X}((y,s,t,x),u,z) = (s-t)X(y,(1-u)t+us,z+x).$$

Se $(y,s,t,x) \in \Omega$, podemos definir uma aplicação $\widehat{f}_{y,s,t,x}\colon [0,1] \to E$,

$$\widehat{f}_{y,s,t,x}(u) = \omega(y,(1-u)t+us,t,x) - x,$$

e temos então $\widehat{f}_{y,s,t,x}(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}\widehat{f}'_{y,s,t,x}(u) &= (s-t)X(y,(1-u)t+us,\omega(y,(1-u)t+us,t,x)) = \\ &= (s-t)X(y,(1-u)t+us,\widehat{f}_{y,s,t,x}(u)+x) = \\ &= \widehat{X}((y,s,t,x),u,\widehat{f}_{y,s,t,x}(u)).\end{aligned}$$

Resulta daqui, aplicando a conclusão enunciada em c) à equação diferencial paramétrica dependente do tempo definida por $\widehat{X}$, que tem lugar uma aplicação de classe C^p de Ω em E, que a cada (y,s,t,x) associa $\widehat{f}_{y,s,t,x}(1) = \omega(y,s,t,x) - x$, de onde se deduz finalmente que $\omega\colon \Omega \to E$ é uma aplicação de classe C^p. □

É claro que, pelos processos usuais, deduzimos trivialmente do resultado anterior as correspondentes versões para equações diferenciais sem parâmetros e/ou independentes do tempo.

§7. Equações diferenciais em variedades.

IV.7.1 **(Lema)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade *sem bordo*, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, A um aberto de $J \times M$ e $X\colon A \to E$ uma aplicação de classe C^1, tal que, para cada $(t,x) \in A$, $X_{(t,x)} \in T_x(M)$. Para cada $(t,x) \in A$ existe então um intervalo J', aberto *em*

J e com $t \in J'$, e uma solução $f: J' \to M$ da equação diferencial dependente do tempo definida por X, com a condição inicial (t, x).

Dem: Sejam $\widehat{V}$ aberto em $\mathbb{R}^m$, com $0 \in \widehat{V}$, V aberto em M, com $x \in V$, e $\varphi: \widehat{V} \to V$ um difeomorfismo com $\varphi(0) = x$. Seja $\widehat{A}$ o aberto de $J \times \widehat{V}$, formado pelos (s, y) tais que $(s, \varphi(y)) \in A$, e seja $\widehat{X}: \widehat{A} \to \mathbb{R}^m$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$\widehat{X}_{(s,y)} = D(\varphi^{-1})_{\varphi(y)}(X_{(s,\varphi(y))})$$

(o facto de $\widehat{X}$ estar bem definido é uma consequência da hipótese sobre X feita no enunciado e o facto de $\widehat{X}$ ser de classe C^1 deduz-se facilmente, se considerarmos um prolongamento de classe C^1 de φ^{-1}, definido num aberto de E). É claro que $\widehat{A}$ é também aberto em $J \times \mathbb{R}^m$ e contém $(t, 0)$, pelo que a versão de IV.4.8 sem parâmetros garante que a solução máxima $\widehat{f}: J' \to \widehat{V}$ da equação diferencial dependente do tempo definida por $\widehat{X}$, com a condição inicial $(t, 0)$, está definida num intervalo J' aberto em J e contendo t. Sendo então $f: J' \to M$ a aplicação definida por $f(s) = \varphi(\widehat{f}(s))$, vem $f(t) = \varphi(0) = x$ e

$$\begin{aligned} f'(s) &= D\varphi_{\widehat{f}(s)}(\widehat{f}'(s)) = D\varphi_{\widehat{f}(s)}(\widehat{X}_{(s,\widehat{f}(s))}) = \\ &= D\varphi_{\widehat{f}(s)}(D(\varphi^{-1})_{\varphi(\widehat{f}(s))}(X_{(s,\varphi(\widehat{f}(s)))})) = X_{(s,f(s))}, \end{aligned}$$

e a demonstração está terminada. □

IV.7.2 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade *sem bordo*, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, A um aberto de $J \times M$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1, tal que $X_{(t,x)} \in T_x(M)$, para cada $(t, x) \in A$. Tem-se então:

a) Existe um aberto $\widehat{A}$ de $J \times E$, com $A \subset \widehat{A}$ e A fechado em $\widehat{A}$ e um prolongamento de classe C^1 $\widehat{X}: \widehat{A} \to E$ de X.

b) Quaisquer que sejam $\widehat{A}$ e $\widehat{X}$ nas condições de a), dados $(t, x) \in A$ e a solução máxima $f: J' \to E$ da equação diferencial dependente do tempo definida por $\widehat{X}$, com a condição inicial (t, x), tem-se $(s, f(s)) \in A$, para cada $s \in J'$, e portanto f é também a solução máxima da equação diferencial dependente do tempo definida por X, com aquela condição inicial.

Dem: Uma vez que $J \times M$ é uma variedade, possivelmente com bordo, podemos aplicar II.6.22 para garantir a existência de um aberto de $\mathbb{R} \times E$, contendo A, onde A seja fechado, deduzindo-se então, tendo em conta a propriedade II.3.12, a existência de um prolongamento de classe C^1 de X a esse aberto. Para verificarmos a), basta agora tomarmos para $\widehat{A}$ a intersecção desse aberto com $J \times E$, e para $\widehat{X}$ a restrição desse prolongamento. Passemos agora à demonstração de b), para o que consideramos o conjunto J'' dos $s \in J'$, tais que $(s, f(s)) \in A$. Tem-se $t \in J''$, e a continuidade de f e o facto de A ser fechado em $\widehat{A}$ garantem que J'' é fechado em J'. O que queremos provar é que $J'' = J'$ e, tendo em conta o facto de J' ser conexo, bastar-nos-á provar que J'' é aberto em J'. Seja portanto $s \in J''$. Tem-se $(s, f(s)) \in A$, pelo que concluímos, de IV.7.1, a existência de um intervalo $\widehat{J}$ aberto em J, com $s \in \widehat{J}$, e de uma solução $\widehat{f}: \widehat{J} \to M$ da equação diferencial definida por X, com a condição inicial $(s, f(s))$. Em particular $\widehat{f}$ é também uma solução da equação diferencial definida por $\widehat{X}$, com aquela condição inicial, pelo que, por IV.4.5, $\widehat{f}$ é uma restrição de f. Deduzimos daqui que, para cada $u \in \widehat{J}$, vem $(u, f(u)) = (u, \widehat{f}(u)) \in A$, portanto $u \in J''$, o que mostra que $\widehat{J} \subset J''$. Provámos portanto que J'' é aberto em J pelo que ele é também aberto em J'. □

IV.7.3 **(Resultado Fundamental)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade *sem bordo*, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, A um aberto de $J \times M$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1, tal que $X_{(t,x)} \in T_x(M)$, para cada $(t, x) \in A$. Sendo $\omega: \Omega \to M$ a solução geral da equação diferencial dependente do tempo definida por X, tem-se então que Ω é aberto em $J \times J \times M$.

Dem: Pela parte a) do resultado anterior, podemos considerar um aberto $\widehat{A}$ de $J \times E$, com $A \subset \widehat{A}$ e A fechado em $\widehat{A}$, e um prolongamento de classe C^1 de X, $\widehat{X}: \widehat{A} \to E$. Sendo então $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to E$ a solução geral da equação diferencial definida por $\widehat{X}$, sabemos, pela versão sem parâmetros de IV.4.8, que $\widehat{\Omega}$ é aberto em $J \times J \times E$, e resulta da parte b) da propriedade anterior que Ω é o conjunto dos $(s, t, x) \in J \times J \times M$, tais que $(s, t, x) \in \widehat{\Omega}$ e $(t, x) \in A$, o que implica que Ω é aberto em $J \times J \times M$. □

Como já dissemos anteriormente, todos os resultados, demonstrados para equações diferenciais dependentes do tempo, aplicam-se trivialmente também às equações diferenciais independentes do tempo, bastando notar que uma equação diferencial independente do tempo, definida no conjunto M, é a mesma coisa que a equação diferencial dependente do tempo, definida em $\mathbb{R} \times M$ e constante em relação à primeira variável. Assim, por exemplo, o resultado anterior permite-nos afirmar que, se $M \subset E$ é uma variedade sem bordo e se $X: M \to E$ é uma aplicação de classe C^1, tal que $X_x \in T_x(M)$, para cada $x \in M$ (um campo vectorial de classe C^1 sobre M), então o domínio Ω, da solução geral da equação diferencial definida por X, é um conjunto aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$.

IV.7.4 **(Corolário)** Sejam $M \subset E$ uma variedade sem bordo, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, A um aberto de $J \times M$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1, tal que $X_{(t,x)} \in T_x(M)$, para cada $(t, x) \in A$. Se $f: J' \to M$ é a solução máxima da equação diferencial definida por X, com uma certa condição inicial $(t, x) \in A$, então o intervalo J' é aberto em J.

Dem: É uma consequência do resultado anterior, visto que, sendo Ω o domínio da solução geral, J' vai ser o conjunto dos $s \in J$ tais que $(s,t,x) \in \Omega$. □

IV.7.5 **(Corolário)** Sejam $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $X: M \to E$ um *campo vectorial* de classe C^1, isto é, uma aplicação de classe C^1 tal que $X_x \in T_x(M)$, para cada $x \in M$. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $x \in M$ e $f:]a,b[\to M$ a curva integral máxima de X, com a condição inicial (t,x). Tem-se então:

a) Se a é finito, então, para cada compacto $K \subset M$, existe $c > 0$ tal que, para cada $a < s < a + c$, tem-se $f(s) \notin K$;

b) Se b é finito, então, para cada compacto $K \subset M$, existe $c > 0$ tal que, para cada $b - c < s < b$, tem-se $f(s) \notin K$.

Dem: Trata-se de uma generalização de IV.3.6, cuja demonstração se decalca pela daquele resultado, bastando substituir $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ por $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$. □

IV.7.6 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $X: M \to E$ um campo vectorial de classe C^1. Diz-se que X é *completo* se, para cada $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$, o domínio da curva integral máxima de X, com a condição inicial (t,x), é $\mathbb{R}$ (ou seja, se o domínio da solução geral da equação diferencial definida por X é $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$).

IV.7.7 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $X: M \to E$ um campo vectorial de classe C^1 *de suporte compacto*, isto é, tal que exista um conjunto compacto $K \subset M$, tal que $X_x = 0$, para cada $x \notin K$. Tem-se então que X é completo. Em particular, no caso em que a variedade sem bordo M é compacta, todo o campo vectorial de classe C^1 é completo.

Dem: Suponhamos que $f: J \to M$ é a curva integral máxima de X com a condição inicial (t,x) e que se tinha $J \neq \mathbb{R}$. Concluíamos então, de IV.7.5, a existência de $s \in J$ tal que $f(s) \notin K$. Por IV.1.9, f era também a curva integral máxima com a condição inicial $(s, f(s))$, o que é absurdo, visto que o facto de se ter $X_{f(s)} = 0$ implica trivialmente que esta última é a aplicação de valor constante $f(s)$, definida em $\mathbb{R}$. □

O resultado fundamental, IV.7.3, admite também uma versão com parâmetros, que passamos a enunciar.

IV.7.8 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais será olhado como espaço de parâmetros. Sejam $F_0 \subset F$ um conjunto arbitrário, $M \subset E$ uma variedade *sem bordo*, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, A um conjunto aberto em $F_0 \times J \times M$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1 tal que $X(y,t,x) \in T_x(M)$, para cada $(y,t,x) \in A$. Sendo então $\omega: \Omega \to M$ a solução geral da equação diferencial paramétrica, dependente do tempo, definida por X, tem-se que Ω é aberto em $F_0 \times J \times J \times M$.

Dem: Seja V um aberto de E, com $M \subset V$, tal que M seja fechado em V. Consideremos um aberto $\widehat{A}$ de $F \times \mathbb{R} \times E$, tal que $A = (F_0 \times J \times M) \cap \widehat{A}$; se necessário substituindo $\widehat{A}$ pela sua intersecção com um aberto conveniente contendo A, podemos já supor que existe um prolongamento de classe C^1 de X, $\widehat{X}: \widehat{A} \to E$. Sejam então $\tilde{A} = (F_0 \times J \times V) \cap \widehat{A}$ e $\tilde{X}: \tilde{A} \to E$ a aplicação de classe C^1, restrição de $\widehat{X}$. É claro que $\tilde{A}$ vai ser aberto em $F_0 \times J \times V$, e portanto em $F_0 \times J \times E$, e tem-se $A = (F_0 \times J \times M) \cap \tilde{A}$, pelo que, por $F_0 \times J \times M$ ser fechado em $F_0 \times J \times V$, A vai ser fechado em $\tilde{A}$.

Para cada $y \in F_0$, vem que o subconjunto $A_{(y)}$ de $J \times M$, formado pelos (t, x) tais que $(y, t, x) \in A$, é um aberto de $J \times M$, e tem lugar a aplicação de classe C^1, $X_{(y)}: A_{(y)} \to E$, definida por $X_{(y)}(t, x) = X(y, t, x)$, a qual verifica $X_{(y)}(t, x) \in T_x(M)$, para cada $(t, x) \in A_{(y)}$. Além disso, para cada $y \in F_0$, o conjunto $\tilde{A}_{(y)}$, dos (t, x) tais que $(y, t, x) \in \tilde{A}$, é um aberto de $J \times E$, no qual $A_{(y)}$ é fechado, e a aplicação $\tilde{X}_{(y)}: \tilde{A}_{(y)} \to E$, definida por $\tilde{X}_{(y)}(t, x) = \tilde{X}(y, t, x)$, é um prolongamento de classe C^1 de $X_{(y)}$. Podemos agora aplicar IV.7.2, para concluir que, sendo $\tilde{\omega}: \tilde{\Omega} \to E$ a solução geral da equação diferencial paramétrica definida por $\tilde{X}$, Ω vai ser o conjunto dos (y, s, t, x) em $F_0 \times J \times J \times M$ tais que $(y, s, t, x) \in \tilde{\Omega}$ e $(y, t, x) \in A$. Uma vez que, por IV.4.8, $\tilde{\Omega}$ é aberto em $F \times J \times J \times E$, segue-se que Ω é aberto em $F \times J \times J \times M$. □

§8. Equações diferenciais totais. Teorema de Frobenius.

IV.8.1 Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, A uma parte de $G \times E$ e $X: A \to L(G; E)$ uma aplicação. Dado um aberto $\boldsymbol{J} \subset G$, diz-se que uma aplicação $f: \boldsymbol{J} \to E$ é uma *solução da equação diferencial total* definida por X se, para cada $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{J}$, $(\boldsymbol{s}, f(\boldsymbol{s})) \in A$ e $Df(\boldsymbol{s}) = X(\boldsymbol{s}, f(\boldsymbol{s}))$. Para cada $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{J}$, diz-se então que a solução admite a *condição inicial* $(\boldsymbol{t}, f(\boldsymbol{t}))$.

As equações diferenciais totais vão ser o análogo das equações diferenciais ordinárias, com a *variável temporal* $t \in \mathbb{R}$ substituída por uma *variável temporal multidimensional* $\boldsymbol{t} \in G$ (usaremos as mesmas letras que no caso em que a variável temporal é real, com o fim de sublinhar o paralelismo, mesmo que isso choque com a convenção usual de utilizar letras como t e s somente como variáveis reais, mas empregaremos normalmente os *caracteres gordos* para sublinhar a diferença). A exigência de o domínio $\boldsymbol{J}$ da solução ser um aberto de G, destina-se a garantir que a derivada $Df(\boldsymbol{s})$ está bem definida como aplicação linear de domínio G.

Repare-se que, no caso em que $G = \mathbb{R}^n$, as equações diferenciais totais vão ser um tipo particular de equações com derivadas parciais, visto que a condição $Df(\boldsymbol{s}) = X(\boldsymbol{s}, f(\boldsymbol{s}))$ vai ser equivalente a n equações do tipo

$$\frac{\partial f}{\partial s_i}(\boldsymbol{s}) = X_i(\boldsymbol{s}, f(\boldsymbol{s})).$$

Do mesmo modo que, no caso das equações diferenciais ordinárias, apenas nos interessávamos pelas soluções definidas em intervalos, no caso das equações diferenciais totais vão ser especialmente importantes as soluções definidas em abertos que são estrelados relativamente ao *instante* inicial. Relembremos que um subconjunto $\boldsymbol{J}$ de um espaço vectorial G, diz-se *estrelado* relativamente ao elemento $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{J}$ se, para cada $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{J}$, o segmento de extremidades $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{s}$, conjunto dos $(1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}$, com $u \in [0,1]$, está contido em $\boldsymbol{J}$.

IV.8.2 **(Unicidade)** Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset G \times E$ e $X: A \to L(G; E)$ uma aplicação de classe C^1. Sejam $(\boldsymbol{t}, x) \in A$, $\boldsymbol{J}$ e $\tilde{\boldsymbol{J}}$ abertos de G e $f: \boldsymbol{J} \to E$ e $\tilde{f}: \tilde{\boldsymbol{J}} \to E$ duas soluções da equação diferencial total definida por X, com a condição inicial $(\boldsymbol{t}, x)$. Tem-se então que f e $\tilde{f}$ coincidem em qualquer conjunto $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{J} \cap \tilde{\boldsymbol{J}}$, que seja estrelado relativamente a $\boldsymbol{t}$.

Dem: Seja $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}$. Sejam φ,$\tilde{\varphi}$: $[0,1] \to E$ as aplicações definidas por

$$\varphi(u) = f((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}),$$
$$\tilde{\varphi}(u) = \tilde{f}((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}).$$

Vem $\varphi(0) = f(\boldsymbol{t}) = x$ e

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= Df_{(1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}) = \\ &= X((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}, f((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}))(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}),\end{aligned}$$

pelo que, sendo $\tilde{A} \subset [0,1] \times E$ o conjunto constituído pelos (u, z) tais que $((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}, z) \in A$ e $\tilde{X}: \tilde{A} \to E$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$\tilde{X}(u, z) = X((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}, z)(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}),$$

vemos que φ é uma solução da equação diferencial ordinária, dependente do tempo, definida por $\tilde{X}$, com a condição inicial $(0, x)$. Do mesmo modo, $\tilde{\varphi}$ é uma solução da mesma equação diferencial, com a mesma condição inicial, pelo que concluímos que $\varphi = \tilde{\varphi}$, em particular,

$$f(\boldsymbol{s}) = \varphi(1) = \tilde{\varphi}(1) = \tilde{f}(\boldsymbol{s}). \qquad \square$$

O resultado que se segue vai dar, nos casos mais gerais que se encontram na prática, condições necessárias para a existência de soluções com condições iniciais arbitrárias.

IV.8.3 Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, A um aberto em $G \times M$, e $X: A \to L(G; E)$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para um certo $(\boldsymbol{t}, x) \in A$, exista uma solução $f\colon \boldsymbol{J} \to M$ da equação diferencial total definida por X, com a condição inicial $(\boldsymbol{t}, x)$. Tem-se então:

a) A aplicação linear $X(\boldsymbol{t}, x) \in L(G; E)$ aplica G em $T_x(M)$;

b) A aplicação bilinear $G \times G \to E$, definida por

$$(w, \tilde{w}) \mapsto DX_{(\boldsymbol{t},x)}(w, X_{(\boldsymbol{t},x)}(w))(\tilde{w}),$$

é simétrica.

Dem: Uma vez que $\boldsymbol{J}$ é um aberto de G e que a aplicação $f\colon \boldsymbol{J} \to M \subset E$ verifica $f(\boldsymbol{t}) = x$ e $Df(\boldsymbol{s}) = X(\boldsymbol{s}, f(\boldsymbol{s}))$, o facto de X ser uma aplicação de classe C^1 permite-nos concluir sucessivamente que f é contínua (por ser diferenciável em todos os pontos), que f é de classe C^1 (por Df ser contínua) e que f é de classe C^2 (por Df ser de classe C^1). Deduzimos agora, em primeiro lugar, que $X(\boldsymbol{t}, x) = Df(\boldsymbol{t})$ é uma aplicação linear de G em $T_x(M)$. Em segundo lugar, obtemos, para cada $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{J}$ e cada $w, \tilde{w} \in G$, $Df_{\boldsymbol{s}}(\tilde{w}) = X(\boldsymbol{s}, f(\boldsymbol{s}))(\tilde{w})$, donde

$$\begin{aligned} D^2 f_{\boldsymbol{s}}(w, \tilde{w}) &= DX_{(\boldsymbol{s},f(\boldsymbol{s}))}(w, Df_{\boldsymbol{s}}(w))(\tilde{w}) = \\ &= DX_{(\boldsymbol{s},f(\boldsymbol{s}))}(w, X_{(\boldsymbol{s},f(\boldsymbol{s}))}(w))(\tilde{w}), \end{aligned}$$

em particular

$$D^2 f_{\boldsymbol{t}}(w, \tilde{w}) = DX_{(\boldsymbol{t},x)}(w, X_{(\boldsymbol{t},x)}(w))(\tilde{w}),$$

pelo que o facto de $D^2 f_{\boldsymbol{t}}\colon G \times G \to E$ ser uma aplicação bilinear simétrica, implica a condição b) do enunciado. □

Repare-se que, no caso em que $M = E$, isto é, em que o domínio A de X é aberto em $G \times E$, a condição a) do resultado anterior encontra-se automaticamente verificada. O equivalente a essa condição já aparecia no caso das equações diferenciais ordinárias, quando queríamos garantir que as soluções máximas, com condições iniciais arbitrárias, estavam definidos em conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ (cf. corolário IV.7.4). A condição b) é que constitui novidade em relação ao que acontecia no caso das equações diferenciais ordinárias. O facto de uma equação diferencial ordinária poder ser olhada como uma equação diferencial total, tendo em conta o isomorfismo canónico $L(\mathbb{R}; E) \to E$, leva-nos a concluir que, no caso das equações diferenciais ordinárias, isto é, naquele em que se tem $G = \mathbb{R}$, a condição b) deve ser automaticamente verificada. Isso é explicado pelo lema seguinte:

IV.8.4 **(Lema de Álgebra Linear)** Se G e E são espaços vectoriais sobre o mesmo corpo, o primeiro dos quais de dimensão 1, toda a aplicação bilinear $\pi\colon G \times G \to E$ é simétrica.

Dem: Seja w uma base de G. Dados $u, v \in G$, vem $u = aw$ e $v = bw$, com a

e b escalares, donde

$$\pi(u,v) = ab\pi(w,w) = \pi(v,u). \qquad \square$$

O teorema de Frobenius, que demonstramos a seguir, mostra que as condições necessárias, referidas no resultado anterior, quando verificadas em todos os pontos do domínio, são também suficientes para garantir a existência de soluções com condições iniciais arbitrárias.

IV.8.5 **(Teorema de Frobenius)** Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade *sem bordo*, A um aberto em $G \times M$ e $X: A \to L(G;E)$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $(\boldsymbol{t},x) \in A$, se verifiquem as duas condições seguintes:
a) A aplicação linear $X(\boldsymbol{t},x) \in L(G;E)$ aplica G em $T_x(M)$;
b) É simétrica a aplicação bilinear $G \times G \to E$, definida por

$$(w,\tilde{w}) \mapsto DX_{(\boldsymbol{t},x)}(w, X_{(\boldsymbol{t},x)}(w))(\tilde{w}).$$

Tem-se então que, para cada $(\boldsymbol{t},x) \in A$, existe um aberto $\boldsymbol{J}$ de G, com $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{J}$, e uma solução $f: \boldsymbol{J} \to M$ da equação diferencial total definida por X, com a condição inicial $(\boldsymbol{t},x)$.
Mais precisamente, sendo $\widehat{A}$ o aberto de $G \times [0,1] \times M$, constituído pelos $(\boldsymbol{s},u,z)$ tais que $((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}, z) \in A$, e sendo $\widehat{X}: \widehat{A} \to E$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$\widehat{X}(\boldsymbol{s},u,z) = X((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}, z)(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}),$$

então, olhando para G como espaço de parâmetros, e considerando a solução geral $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to M$ da equação diferencial paramétrica dependente do tempo definida por $\widehat{X}$, o conjunto $\boldsymbol{J}$, dos $\boldsymbol{s} \in G$ tais que $(\boldsymbol{s},1,0,x) \in \widehat{\Omega}$, é um aberto de G, estrelado relativamente a $\boldsymbol{t}$, e a aplicação $f: \boldsymbol{J} \to M$, definida por $f(\boldsymbol{s}) = \widehat{\omega}(\boldsymbol{s},1,0,x)$, é uma solução da equação diferencial total definida por X, com a condição inicial $(\boldsymbol{t},x)$, que é máxima, no sentido que qualquer outra solução, definida num aberto estrelado relativamente a $\boldsymbol{t}$, com a mesma condição inicial, é uma restrição dela.
Dem: Tendo em conta IV.7.8 e IV.6.1, sabemos que $\widehat{\Omega}$ é aberto em $G \times [0,1] \times [0,1] \times M$ e que $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to M$ é uma aplicação de classe C^1. O conjunto $\boldsymbol{J}$ dos $\boldsymbol{s} \in G$ tais que $(\boldsymbol{s},1,0,x) \in \widehat{\Omega}$ é portanto um aberto de G, e a aplicação $f: \boldsymbol{J} \to M$, definida por $f(\boldsymbol{s}) = \widehat{\omega}(\boldsymbol{s},1,0,x)$, é de classe C^1. Além disso, o facto de se ter $\widehat{X}(\boldsymbol{t},u,x) = 0$ implica que a aplicação de $[0,1]$ em M, de valor constante x, é uma solução da equação diferencial paramétrica, com o parâmetro $\boldsymbol{t}$ e a condição inicial $(0,x)$, o que nos permite concluir que $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{J}$ e que $f(\boldsymbol{t}) = x$.
Suponhamos agora que $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{J}$ e que $v \in [0,1]$. Seja $\varphi: [0,1] \to M$ a aplicação definida por $\varphi(u) = \widehat{\omega}(\boldsymbol{s},uv,0,x)$. Vem $\varphi(0) = x$ e

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= v\widehat{X}(\boldsymbol{s}, uv, \varphi(u)) = vX((1-uv)\boldsymbol{t} + uv\boldsymbol{s}, \varphi(u))(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}) = \\ &= X((1-u)\boldsymbol{t} + u((1-v)\boldsymbol{t}+v\boldsymbol{s}), \varphi(u))((1-v)\boldsymbol{t}+v\boldsymbol{s}-t) = \\ &= \widehat{X}((1-v)\boldsymbol{t}+v\boldsymbol{s}, u, \varphi(u)),\end{aligned}$$

pelo que φ é uma solução da equação diferencial paramétrica definida por $\widehat{X}$, com o parâmetro $(1-v)\boldsymbol{t}+v\boldsymbol{s}$ e a condição inicial $(0,x)$, por outras palavras, $(1-v)\boldsymbol{t}+v\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{J}$ e portanto $\boldsymbol{J}$ é estrelado relativamente a $\boldsymbol{t}$.
A demonstração do resultado de unicidade, IV.8.2, mostra-nos que qualquer solução da equação diferencial total definida por X, que esteja definida num aberto estrelado relativamente a $\boldsymbol{t}$ e tenha a condição inicial $(\boldsymbol{t}, x)$, é uma restrição da nossa aplicação $f\colon \boldsymbol{J} \to M$. Tudo o que falta demonstrar é que f é efectivamente uma solução da equação diferencial total definida por X, isto é, que se tem $Df(\boldsymbol{s}) = X(\boldsymbol{s}, f(\boldsymbol{s}))$, e é isso que vamos fazer em seguida.[96]
Seja $g\colon \boldsymbol{J} \times [0,1] \to M$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$g(\boldsymbol{s}, u) = \widehat{\omega}(\boldsymbol{s}, u, 0, x).$$

Vem $g(\boldsymbol{s}, 0) = x$ e

(1) $$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(\boldsymbol{s}, u) &= \widehat{X}(\boldsymbol{s}, u, \widehat{\omega}(\boldsymbol{s}, u, 0, x)) = \\ &= X((1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s}, u))(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}),\end{aligned}$$

pelo que podemos escrever

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{s}, u) &= g(\boldsymbol{s}, 0) + \int_0^u \frac{\partial g}{\partial v}(\boldsymbol{s}, v)\, dv = \\ &= x + \int_0^u X((1-v)\boldsymbol{t} + v\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s}, v))(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t})\, dv.\end{aligned}$$

Utilizando agora o teorema de derivação do integral paramétrico, começando eventualmente por ter em conta o facto de toda a aplicação de classe C^1 em $\boldsymbol{J} \times [0,1]$ admitir um prolongamento de classe C^1 a $\boldsymbol{J} \times \mathbb{R}$ ($\boldsymbol{J} \times [0,1]$ é fechado em $\boldsymbol{J} \times \mathbb{R}$), obtemos

$$\begin{aligned}D_1 g_{(\boldsymbol{s},u)}(w) = \int_0^u & DX_{((1-v)\boldsymbol{t}+v\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},v))}(vw, D_1 g_{(\boldsymbol{s},v)}(w))(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}) + \\ &+ X((1-v)\boldsymbol{t}+v\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s}, v))(w)\, dv,\end{aligned}$$

pelo que $D_1 g_{(\boldsymbol{s},0)}(w) = 0$ e, derivando o integral indefinido,

[96] A demonstração que vamos apresentar é devida a J. Dieudonné, [7].

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial u}(D_1 g_{(\boldsymbol{s},u)}(w)) = DX_{((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s},g(\boldsymbol{s},u))}(uw, D_1 g_{(\boldsymbol{s},u)}(w))(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}) + \\ + X((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(w).$$ [97]

Consideremos, por outro lado, $\boldsymbol{t}$, x, $\boldsymbol{s}$ e w estando fixados, a aplicação $h\colon [0,1] \to E$, definida por

$$h(u) = uX((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(w).$$

Vem $h(0) = 0$ e, uma vez que $u \mapsto g(\boldsymbol{s},u)$ é solução da equação diferencial paramétrica definida por $\widehat{X}$,

$$h'(u) = uDX_{((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s},g(\boldsymbol{s},u))}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}, \widehat{X}(\boldsymbol{s},u,g(\boldsymbol{s},u)))(w) + \\ + X((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(w),$$

donde, tendo em conta a definição de $\widehat{X}$ e a hipótese b) do enunciado,

$$(3)\quad \begin{aligned} h'(u) &= uDX_{((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s},g(\boldsymbol{s},u))}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}, X((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}))(w) + \\ &\quad + X((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(w) = \\ &= uDX_{((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s},g(\boldsymbol{s},u))}(w, X((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(w))(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}) + \\ &\quad + X((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(w) = \\ &= DX_{((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s},g(\boldsymbol{s},u))}(uw, h(u))(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}) + \\ &\quad + X((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(w). \end{aligned}$$

A ideia será agora mostrar que as condições (2) e (3) podem ser interpretadas como afirmando que as aplicações de $[0,1]$ em E, que a u associam $D_1 g_{(\boldsymbol{s},u)}(w)$ e $h(u)$, respectivamente, são soluções de uma mesma equação diferencial ordinária linear, *com coeficientes contínuos*; se o virmos, o facto de ambas aquelas soluções terem a condição inicial $(0,0)$ implica que elas são iguais, em particular

$$Df_{\boldsymbol{s}}(w) = D_1 g_{(\boldsymbol{s},1)}(w) = h(1) = X(\boldsymbol{s}, f(\boldsymbol{s}))(w),$$

o que mostrará que f é uma solução da equação diferencial total, e a demonstração estará terminada.
A fim de interpretarmos convenientemente as condições (2) e (3), comecemos, por uma razão técnica, por considerar um prolongamento de classe C^1, $\tilde{X}$, de X, a um aberto $\tilde{A}$ de $G \times E$, contendo A. Consideremos então a aplicação contínua $\gamma\colon [0,1] \to E$, definida por

$$\gamma(u) = D_1\tilde{X}_{((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s},g(\boldsymbol{s},u))}(uw)(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}) + X((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s}, g(\boldsymbol{s},u))(w),$$

onde $D_1\tilde{X}$ é a primeira derivada parcial de $\tilde{X}$, e a aplicação contínua

[97] Reparar que, se tivéssemos suposto Z de classe C^2, g vinha também de classe C^2, pelo que (2) podia ser deduzido directamente a partir de (1), por derivação de ambos os membros, tendo em conta a permutabilidade da ordem de derivação. É para podemos apanhar o caso C^1 que tivémos que fazer esta volta um pouco mais longa.

$\Gamma: [0,1] \to L(E;E)$, definida por

$$\Gamma(u)(z) = D_2\tilde{X}_{((1-u)\boldsymbol{t}+u\boldsymbol{s},g(\boldsymbol{s},u))}(z)(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}),$$

onde $D_2\tilde{X}$ é a segunda derivada parcial de $\tilde{X}$ (trata-se da composição de uma aplicação contínua de $[0,1]$ em $L(E;L(G;E))$ com a aplicação linear de $L(E;L(G;E))$ em $L(E;E)$, que a $\xi \in L(E;L(G;E))$ associa a aplicação linear de E em E, definida por $z \mapsto \xi(z)(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t})$). Com estas definições, as condições (2) e (3) podem escrever-se respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_1 g_{(\boldsymbol{s},u)}(w)) = \gamma(u) + \Gamma(u)(D_1 g_{(\boldsymbol{s},u)}(w)),$$
$$h'(u) = \gamma(u) + \Gamma(u)(h(u)),$$

pelo que temos realmente duas soluções duma mesma equação diferencial linear. □

À hipótese b), no enunciado do teorema de Frobenius, é usual dar o nome de *condição de integrabilidade* da equação diferencial total definida por X.

IV.8.6 Por analogia com o que se passava no caso das equações diferenciais ordinárias, dizemos que a aplicação $f: \boldsymbol{J} \to M$, definida no enunciado do teorema de Frobenius, é a *solução máxima* da equação diferencial total definida por X, com a condição inicial $(\boldsymbol{t}, x)$. É, no entanto, importante ter bem presente que a maximalidade se refere apenas às soluções definidas em abertos estrelados relativamente a $\boldsymbol{t}$.

É agora natural interrogarmo-nos sobre o que poderemos afirmar acerca do modo como as soluções máximas dependem das condições iniciais. A resposta vai ser a que se espera, e com justificação trivial, podendo, sem aumento de trabalho, examinar-se mesmo o que se passa no caso em que a equação diferencial total depende de um parâmetro.

IV.8.7 Sejam F, G e E espaços vectoriais de dimensão finita, o primeiro dos quais será olhado como espaço de parâmetros e o segundo como domínio da *variável temporal*. Sejam $F_0 \subset F$ um conjunto arbitrário, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, A um aberto de $F_0 \times G \times M$ e $X: A \to L(G;E)$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $(y, \boldsymbol{t}, x) \in A$, se verifiquem as propriedades seguintes:

a) A aplicação linear $X(y, \boldsymbol{t}, x) \in L(G;E)$ aplica G em $T_x(M)$;

b) É simétrica a aplicação bilinear de $G \times G$ em E, definida por

$$(w, \tilde{w}) \mapsto DX_{(y,\boldsymbol{t},x)}(0, w, X_{(y,\boldsymbol{t},x)}(w))(\tilde{w}).$$

Para cada $(y, \boldsymbol{t}, x) \in A$, seja $f_{y,\boldsymbol{t},x}: \boldsymbol{J}_{y,\boldsymbol{t},x} \to M$ a solução máxima da equação diferencial total definida pela aplicação $X_{(y)}: A_{(y)} \to L(G;E)$ (notação com o significado habitual), com a condição inicial $(\boldsymbol{t}, x)$. Consideremos ainda $\Omega \subset F_0 \times G \times G \times M$, o conjunto dos $(y, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, x)$ tais que $(y, \boldsymbol{t}, x) \in A$ e $s \in \boldsymbol{J}_{y,\boldsymbol{t},x}$, e $\omega: \Omega \to M$, a *solução geral paramétrica*, definida por

$$\omega(y, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, x) = f_{y,\boldsymbol{t},x}(\boldsymbol{s}).$$

Tem-se então:
1) Ω é aberto em $F_0 \times G \times G \times M$ e $\omega: \Omega \to M$ é uma aplicação de classe C^1;
2) No caso em que a aplicação $X: A \to L(G;E)$ é mesmo de classe C^p, onde $p \geq 1$, a aplicação $\omega: \Omega \to M$ é também de classe C^p.
Dem: Consideremos $F \times G \times G$ como novo espaço de parâmetros, seja $\widehat{A}$ o aberto em $(F_0 \times G \times G) \times [0,1] \times M$, constituído pelos $((y, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}), u, x)$ tais que $(y, (1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}, x) \in A$, e seja $\widehat{X}: \widehat{A} \to E$ a aplicação de classe C^1 definida por

$$\widehat{X}((y, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}), u, x) = X(y, (1-u)\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{s}, x)(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}),$$

a qual é mesmo de classe C^p, no caso em que isso acontece a X. Sendo $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to M$ a solução geral da equação diferencial paramétrica, dependente do tempo, definida por $\widehat{X}$, os resultados que conhecemos sobre equações diferenciais ordinárias garantem que $\widehat{\Omega}$ é aberto em

$$(F_0 \times G \times G) \times [0,1] \times [0,1] \times M,$$

que $\widehat{\omega}$ é de classe C^1, e que $\widehat{\omega}$ é mesmo de classe C^p, no caso em que isso acontece a X. Do teorema de Frobenius podemos concluir que Ω vai ser o conjunto dos $(y, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, x) \in F_0 \times G \times G \times M$ tais que $((y, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}), 1, 0, x) \in \widehat{\Omega}$ e que se vai ter

$$\omega(y, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, x) = \widehat{\omega}((y, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}), 1, 0, x),$$

de onde se deduzem imediatamente as conclusões 1) e 2) do enunciado. □

Como primeiro exemplo de aplicação do teorema de Frobenius, vamos ver o que se pode dizer sobre a existência de solução para as equações diferenciais holomorfas. Lembremos que, como dissemos em I.5.2, se E e F são espaços vectoriais complexos de dimensão finita e se $U \subset E$ é um aberto, diz-se que uma aplicação $f: U \to F$ é $\mathbb{C}$-*diferenciável* em $x \in U$ se f é diferenciável em x, no sentido das estruturas reais de E e F, e a aplicação linear $Df_x: E \to F$ é uma aplicação linear complexa. Tal como dissemos em I.5.15, no caso em que $E = \mathbb{C}$, o facto de f ser $\mathbb{C}$-diferenciável em $a \in U$ é equivalente à exitência do limite

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

que se nota $f'(a)$, tendo-se então

$$f'(a) = Df_a(1),$$
$$Df_a(s) = sf'(a).$$

Lembremos ainda que as aplicações holomorfas são as aplicações suaves que são $\mathbb{C}$-diferenciáveis em todos os pontos.

IV.8.8 Sejam E um espaço vectorial complexo de dimensão finita, $A \subset \mathbb{C} \times E$ um aberto e $X: A \to E$ uma aplicação holomorfa. Dado $(z_0, w) \in A$, existe então um aberto U de $\mathbb{C}$, com $z_0 \in U$, e uma aplicação holomorfa $f: U \to E$, verificando a condição inicial $f(z_0) = w$ e a equação diferencial (dita *equação diferencial holomorfa*) $f'(z) = X(z, f(z))$, para cada $z \in U$. Além disso, duas soluções com aquela condição inicial coincidem em qualquer subconjunto da intersecção dos seus domínios, que seja estrelado relativamente a z.

Dem: Seja $\widehat{X}: A \to L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; E)$ a aplicação holomorfa, composta de X com o isomorfismo canónico $E \to L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; E)$. Uma vez que a aplicação bilinear $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to E$, definida por

$$(u, v) \mapsto D\widehat{X}_{(z,w)}(u, \widehat{X}_{(z,w)}(u))(v),$$

é mesmo uma aplicação bilinear complexa, podemos concluir, pelo lema IV.8.4, que ela é uma aplicação bilinear simétrica. O teorema de Frobenius garante a existência de um aberto U de $\mathbb{C}$, com $z_0 \in U$, e de uma aplicação $f: U \to E$, com $f(z_0) = w$ e $Df_z = \widehat{X}(z, f(z))$, condição esta que mostra que f é holomorfa, e com $f'(z) = X(z, f(z))$. A afirmação de unicidade do enunciado é uma consequência trivial do resultado de unicidade para as equações diferenciais totais (IV.8.2). □

Lembremos que, se $M \subset E$ é uma variedade, e se $X,Y: M \to E$ são dois campos vectoriais suaves (portanto $X_x, Y_x \in T_x(M)$, para cada $x \in M$), define-se o seu *parêntesis de Lie*, que é um campo vectorial $[X, Y]: M \to E$ definido por

$$[X, Y]_x = DY_x(X_x) - DX_x(Y_x).$$

Costuma-se dizer que os campos vectoriais X e Y *comutam* se se tem $[X, Y]_x = 0$, para cada $x \in M$. Vamos agora ver, como aplicação do teorema de Frobenius, que o facto de dois campos vectoriais comutarem é equivalente a uma *comutatividade local* dos respectivos fluxos.

IV.8.9 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $X, Y: M \to E$ dois campos vectoriais suaves. Sejam $\omega: \Omega \to M$ e $\gamma: \Gamma \to M$ os fluxos de X e Y, respectivamente, que sabemos serem aplicações suaves, definidas em abertos de $\mathbb{R} \times M$, contendo $\{0\} \times M$. Tem-se então:

a) Para cada $x \in M$, existe $r > 0$ tal que estão bem definidas em $]-r, r[^2$ as

aplicações que a (s,t) associam respectivamente $\omega(s,\gamma(t,x))$ e $\gamma(t,\omega(s,x))$;
b) Se $x\in M$ e $r>0$ são tais que, quaisquer que sejam s,t em $]-r,r[$, $\omega(s,\gamma(t,x))=\gamma(t,\omega(s,x))$, então $[X,Y]_x=0$;
c) Se, para cada $x\in M$, $[X,Y]_x=0$, então, para cada $x\in M$, existe $r>0$ tal que, sempre que $s,t\in\,]-r,r[$,

$$\omega(s,\gamma(t,x))=\gamma(t,\omega(s,x)).$$[98]

Dem: Uma vez que Ω é aberto em $\mathbb{R}\times M$ e contém $(0,x)$, concluímos que, para cada $s\in\mathbb{R}$ suficientemente próximo de 0 e cada $\tilde{x}\in M$ suficientemente próximo de x, $(s,\tilde{x})\in\Omega$. Uma vez que Γ é um aberto de $\mathbb{R}\times M$, contendo $(0,x)$, e que γ é uma aplicação contínua, concluímos que, para cada $t\in\mathbb{R}$, suficientemente próximo de 0, tem-se $(t,x)\in\Gamma$ e $\gamma(t,x)$ é suficientemente próximo de $\gamma(0,x)=x$, donde, somando as duas conclusões, sempre que s e t estão suficientemente próximos de 0, $\omega(s,\gamma(t,x))$ está bem definido. Do mesmo modo se vê que, se s e t estão suficientemente próximos de 0, então $\gamma(t,\omega(s,x))$ está bem definido. A propriedade a) fica assim estabelecida.
Mostremos agora que, dados $x\in M$ e $r>0$, o facto de se ter, para cada $s,t\in\,]-r,r[$,

$$\omega(s,\gamma(t,x))=\gamma(t,\omega(s,x)),\tag{1}$$

é equivalente à existência de uma aplicação suave $\varphi\colon]-r,r[^2\to M$, verificando as condições $\varphi(0,0)=x$ e

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)=X(\varphi(s,t)),\\&\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)=Y(\varphi(s,t)).\end{aligned}\tag{2}$$

Supondo, em primeiro lugar, a igualdade (1) verificada, podemos definir a aplicação φ, pondo

$$\omega(s,\gamma(t,x))=\varphi(s,t)=\gamma(t,\omega(s,x)),$$

e então resulta, da primeira igualdade, $\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)=X(\varphi(s,t))$ e, da segunda igualdade, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)=Y(\varphi(s,t))$, tendo-se, evidentemente, $\varphi(0,0)=x$.
Suponhamos, reciprocamente, a existência de uma aplicação suave, φ, verificando $\varphi(0,0)=x$ e as condições (2). Concluímos então, fazendo $t=0$ na primeira igualdade de (2), que a aplicação $s\mapsto\varphi(s,0)$ é uma curva integral de X, com a condição inicial $(0,x)$, pelo que $\varphi(s,0)=\omega(s,x)$, e deduzimos então, da segunda igualdade de (2), que, para cada s, a aplicação $t\mapsto\varphi(s,t)$, é uma curva integral de Y com a condição inicial $(0,\omega(s,x))$, donde $\varphi(s,t)=\gamma(t,\omega(s,x))$; de modo simétrico $\varphi(s,t)=\omega(s,\gamma(t,x))$, o que implica, em particular, a igualdade (1).

[98] A conclusão de c) pode ser melhorada. Ver a propósito o exercício IV.37, no fim do capítulo.

Reparemos agora que as igualdades (2) são equivalentes à igualdade

$$D\varphi_{(s,t)} = \widehat{X}(\varphi(s,t)),$$

onde $\widehat{X}: M \to L(\mathbb{R}^2; E)$ é a aplicação suave definida por $\widehat{X}_x(e_1) = X(x)$ e $\widehat{X}_x(e_2) = Y(x)$ (lembrar que $L(\mathbb{R}^2; E)$ é isomorfo a $E \times E$, pelo isomorfismo que aplica ξ em $(\xi(e_1), \xi(e_2))$). Esta igualdade exprime o facto de φ ser uma solução da equação diferencial total (independente do tempo) definida por $\widehat{X}$. O facto de X e Y serem campos vectoriais, implica que cada $\widehat{X}_x$ aplica $\mathbb{R}^2$ em $T_x(M)$. Tendo em conta o teorema de Frobenius, a existência de uma aplicação suave φ, verificando $\varphi(0,0) = x$ e as condições (2), ficará assegurada desde que, para cada $x \in M$, seja simétrica a aplicação bilinear $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to E$, que a $(w, \tilde{w})$ associa $D\widehat{X}_x(\widehat{X}_x(w))(\tilde{w})$, condição que é equivalente à de exigir que as imagens de (e_1, e_2) e (e_2, e_1) coincidem; uma vez que estas imagens são respectivamente $DY_x(X_x)$ e $DX_x(Y_x)$, a condição equivale ainda à afirmação que $[X, Y]_x = DY_x(X_x) - DX_x(Y_x)$ é nulo. Do mesmo modo, a existência de uma aplicação suave, φ, verificando $\varphi(0,0) = x$ e as condições (2) vai implicar, por IV.8.3, a simetria da aplicação bilinear $(w, \tilde{w}) \mapsto D\widehat{X}_x(\widehat{X}_x(w))(\tilde{w})$, o que, como vimos atrás, implica que $[X, Y]_x = 0$. □

§9. Versão geométrica local do teorema de Frobenius.

Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade e suponhamos que $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ é um fibrado vectorial, com $E_x \subset T_x(M)$ (um subfibrado do fibrado tangente). Uma questão que se põe naturalmente é a de saber se existirão variedades $M' \subset M$ tais que, para cada $x \in M'$, $T_x(M')$ seja precisamente E_x (diz-se então que M' é uma variedade integral de $\underline{E}$). Mais precisamente, vamos ver quando é que, para cada $x_0 \in M$, existe uma variedade integral M', com $x_0 \in M'$. O próximo resultado dá-nos uma condição necessária para que isso aconteça, e veremos em seguida, utilizando o teorema de Frobenius, que, no caso em que a variedade M não tem bordo, essa condição necessária é também suficiente.

IV.9.1 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset T_x(M)$. Chama-se *variedade integral* de $\underline{E}$ a uma variedade $M' \subset M$ tal que $T_x(M') = E_x$, para cada $x \in M'$. Mais geralmente, chamaremos *variedade semi-integral* de $\underline{E}$ a uma variedade $M' \subset M$ tal que $T_x(M') \subset E_x$, para cada $x \in M'$.

IV.9.2 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de um produto interno, e $M \subset E$. Seja $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com

$E_x \subset T_x(M)$, e notemos $h_x: T_x(M) \times E_x \to E$ a segunda forma fundamental de $\underline{E}$. Seja $x_0 \in M$ tal que exista uma variedade integral M' de $\underline{E}$, com $x_0 \in M'$. Tem-se então $h_{x_0}(w, \tilde{w}) = h_{x_0}(\tilde{w}, w)$, quaisquer que sejam $w,\tilde{w} \in E_{x_0}$.

Dem: Sendo $\pi_x: E \to E_x$ as projecções ortogonais, vem $h_{x_0}(u, w) = D\pi_{x_0}(u)(w)$, pelo que, sendo M' uma variedade integral de $\underline{E}$, com $x_0 \in M'$, concluímos imediatamente que a segunda forma fundamental de M' no ponto x_0 é a restrição de h_{x_0}. O resultado é agora uma consequência da simetria da segunda forma fundamental de uma variedade (cf. III.3.23). $\square$

IV.9.3 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, que suporemos munido de um produto interno, $M \subset E$ uma variedade e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset T_x(M)$. Dizemos que $\underline{E}$ *verifica a condição de integrabilidade em* x_0 se a segunda forma fundamental $h_{x_0}: T_{x_0}(M) \times E_{x_0} \to E$ verifica $h_{x_0}(w, \tilde{w}) = h_{x_0}(\tilde{w}, w)$, quaisquer que sejam w e $\tilde{w}$ em E_{x_0}, e que *verifica a condição de integrabilidade* se isso acontecer em cada $x \in M$.

IV.9.4 **(Caso em que a condição de integrabilidade é trivial)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, que suporemos munido de um produto interno, $M \subset E$ uma variedade e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset T_x(M)$, para cada x. Se E_{x_0} tem dimensão 1, então que $\underline{E}$ verifica a condição de integrabilidade em x_0.

Dem: Sendo z uma base do espaço vectorial E_{x_0} de dimensão 1, tem-se, quaisquer que sejam $w, \tilde{w} \in E_{x_0}$, $w = az$ e $\tilde{w} = bz$, donde

$$h_{x_0}(w, \tilde{w}) = h_{x_0}(az, bz) = ab h_{x_0}(z, z) = h_{x_0}(bz, az) = h_{x_0}(\tilde{w}, w). \quad \square$$

IV.9.5 **(A condição de integrabilidade é local)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de um produto interno, $M \subset E$ uma variedade e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset T_x(M)$. Tem-se então:

a) Se $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ verifica a condição de integrabilidade em x_0 e se $M' \subset M$ é uma variedade tal que $x_0 \in M'$ e, para cada $x \in M'$, $E_x \subset T_x(M')$, então $\underline{E}_{/M'}$ verifica a condição de integrabilidade em x_0.

b) Seja U um de aberto de M tal que $\underline{E}_{/U} = (E_x)_{x \in U}$ verifique a condição de integrabilidade em $x_0 \in U$. Então $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ verifica a condição de integrabilidade em x_0.

Dem: A alínea a) resulta de que a segunda forma fundamental $h'_{x_0}: T_{x_0}(M') \times E_{x_0} \to E$ é trivialmente uma restrição da segunda forma fundamental $h_{x_0}: T_{x_0}(M) \times E_{x_0} \to E$. A alínea b) resulta de que as segundas formas fundamentais $h_{x_0}, h'_{x_0}: T_{x_0}(M) \times E_{x_0} \to E$, de $\underline{E}$ e de $\underline{E}_{/U}$ respectivamente, coincidem. $\square$

IV.9.6 Sejam $M \subset E$ uma variedade, com E munido de produto interno, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset T_x(M)$. Tem-se então que $\underline{E}$ verifica a condição de integrabilidade em $x_0 \in M$ se, e só se, quaisquer que sejam as secções suaves X e Y de $\underline{E}$, o campo vectorial parêntesis de Lie

$[X,Y]$ verifica $[X,Y]_{x_0} \in E_{x_0}$. De facto, para garantir a condição de integrabilidade em $x_0 \in M$, basta mostrar que, sempre que $w, \tilde{w} \in E_{x_0}$, **existem** secções suaves X e Y de $\underline{E}$, com $X_{x_0} = w$, $Y_{x_0} = \tilde{w}$ e $[X,Y]_{x_0} \in E_{x_0}$. Em particular, a condição de integrabilidade, não depende do produto interno de E e podemos passar a referi-la sem supor fixado um produto interno em E.

Dem: Para cada $x \in M$, seja $\pi_x: E \to E_x$ a projecção ortogonal. Sejam X e Y duas secções suaves de $\underline{E}$, que são, em particular, dois campos vectoriais sobre M. Tem-se, para cada $x \in M$, $Y_x = \pi_x(Y_x)$, pelo que

$$\begin{aligned} DY_x(X_x) &= D\pi_x(X_x)(Y_x) + \pi_x(DY_x(X_x)) = \\ &= h_x(X_x, Y_x) + \pi_x(DY_x(X_x)). \end{aligned}$$

Analogamente, $DX_x(Y_x) = h_x(Y_x, X_x) + \pi_x(DX_x(Y_x))$, pelo que, subtraindo membro a membro as duas igualdades anteriores, e atendendo a que $[X,Y]_x = DY_x(X_x) - DX_x(Y_x)$, ficamos com

(1) $$[X,Y]_x = h_x(X_x, Y_x) - h_x(Y_x, X_x) + \pi_x([X,Y]_x).$$

Se $\underline{E}$ verifica a condição de integrabilidade em x_0, a igualdade (1) mostra que $[X,Y]_{x_0} = \pi_{x_0}([X,Y]_{x_0})$, pelo que $[X,Y]_{x_0} \in E_{x_0}$. Suponhamos que, sempre $w, \tilde{w} \in E_{x_0}$, existem secções suaves X, Y de $\underline{E}$, com $X_{x_0} = w$, $Y_{x_0} = \tilde{w}$ e $[X,Y]_{x_0} \in E_{x_0}$. Tem-se assim $\pi_{x_0}([X,Y]_{x_0}) = [X,Y]_{x_0}$ pelo que deduzimos de (1) que

$$h_{x_0}(w, \tilde{w}) - h_{x_0}(\tilde{w}, w) = h_{x_0}(X_{x_0}, Y_{x_0}) - h_{x_0}(Y_{x_0}, X_{x_0}) = 0,$$

o que mostra que $\underline{E}$ verifica a condição de integrabilidade em x_0. Reparamos por fim que, a hipótese que acabamos de fazer é necessariamente verificada quando, quaisquer que sejam as secções suaves X e Y de $\underline{E}$, $[X,Y]_{x_0} \in E_{x_0}$, visto que, dados w e $\tilde{w}$ em E_{x_0}, existem sempre secções suaves X e Y de $\underline{E}$, tais que $X_{x_0} = w$ e $Y_{x_0} = \tilde{w}$, por exemplo as definidas por $X_x = \pi_x(w)$ e $Y_x = \pi_x(\tilde{w})$. □

IV.9.7 **(Corolário: Invariância por difeomorfismo)** Sejam E e $\widehat{E}$ espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f: M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo. Seja $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset T_x(M)$ e seja, para cada $y \in \widehat{M}$,

$$\widehat{E}_y = Df_{f^{-1}(y)}(E_{f^{-1}(y)}) \subset T_y(\widehat{M}).$$

Tem-se então que $\underline{\widehat{E}} = (\widehat{E}_y)_{y \in \widehat{M}}$ é um fibrado vectorial (o *transportado* do primeiro por meio de f) e $\underline{E}$ é o fibrado vectorial transportado de $\underline{\widehat{E}}$ por meio de f^{-1}. Além disso, $\underline{\widehat{E}} = (\widehat{E}_y)_{y \in \widehat{M}}$ verifica a condição de integrabilidade em y_0 se, e só se, isso acontecer a $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ em $f^{-1}(y_0)$.

Dem: Dado $y_0 \in \widehat{M}$, podemos considerar $x_0 = f^{-1}(y_0) \in M$, um aberto U de M, contendo x_0, e um campo de referenciais $W_1, \ldots, W_n$ de $\underline{E}_{/U}$. Sendo $\widehat{U} = f(U)$, que é um aberto de $\widehat{M}$, contendo y_0, tem lugar o campo de referenciais $\widehat{W}_1,\ldots,\widehat{W}_n$ de $\underline{\widehat{E}}_{/\widehat{U}}$ definido por $\widehat{W}_{jy} = Df_{f^{-1}(y)}(W_{j f^{-1}(y)})$, o que mostra que $\underline{\widehat{E}}$ é efectivamente um fibrado vectorial. Para cada $x \in M$, tem-se $\widehat{E}_{f(x)} = Df_x(E_x)$ e portanto $Df^{-1}_{f(x)}(\widehat{E}_{f(x)}) = E_x$, o que mostra que $\underline{E}$ é o fibrado vectorial transportado de $\underline{\widehat{E}}$ por meio de f^{-1}. Suponhamos que $\underline{\widehat{E}} = (\widehat{E}_y)_{y\in\widehat{M}}$ verifica a condição de integrabilidade em $y_0 \in \widehat{M}$. Sejam $X = (X_x)_{x\in M}$ e $Y = (Y_x)_{x\in M}$ campos vectoriais suaves em M tais que, para cada $x \in M$, $X_x \in E_x$ e $Y_x \in E_x$. Consideremos os correspondentes campos vectoriais suaves $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ sobre $\widehat{M}$, definidos por

$$\widehat{X}_y = Df_{f^{-1}(y)}(X_{f^{-1}(y)}), \quad \widehat{Y}_y = Df_{f^{-1}(y)}(Y_{f^{-1}(y)})$$

(cf. III.7.3), ou seja $\widehat{X}_{f(x)} = Df_x(X_x)$ e $\widehat{Y}_{f(x)} = Df_x(X_x)$, e lembremos que se tem então

$$[\widehat{X},\widehat{Y}]_{f(x)} = Df_x([X,Y]_x)$$

(cf. III.7.5). Tem-se assim, por $\underline{\widehat{E}}$ verificar a condição de integrabilidade em y_0, $Df_{f^{-1}(y_0)}([X,Y]_{f^{-1}(y_0)}) \in \widehat{E}_{y_0}$ e portanto $[X,Y]_{f^{-1}(y_0)} \in E_{f^{-1}(y_0)}$, pelo que $\underline{E}$ verifica a condição de integrabilidade em $f^{-1}(y_0)$. A recíproca resulta de aplicar o que acabamos de deduzir ao difeomorfismo $f^{-1}\colon \widehat{M} \to M$. □

IV.9.8 **(Lema topológico)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $C \subset E$ um subconjunto conexo finito ou numerável. Tem-se então que $C = \emptyset$ ou C tem um único elemento.

Dem: Suponhamos $C \neq \emptyset$. Considerando um isomorfismo $\xi\colon E \to \mathbb{R}^n$, que é uma aplicação contínua, vem que $\xi(C)$ é um subconjunto conexo finito ou numerável não vazio de $\mathbb{R}^n$ e portanto, para cada $1 \le j \le n$, sendo $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a projecção canónica, $\pi_j(\xi(C))$ é um subconjunto conexo finito ou numerável não vazio de $\mathbb{R}$. uma vez que os conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos, concluímos que cada $\pi_j(\xi(C))$ é um conjunto unitário e daqui resulta que $\xi(C)$, e portanto C, é um conjunto unitário. □

IV.9.9 **(Versão geométrica local do teorema de Frobenius)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade **sem bordo**, e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Fixemos um produto interno em E.

Para cada $x_0 \in M$, existe então um aberto V de M, com $x_0 \in V$, uma bola aberta de centro 0, U, de E_{x_0}, uma bola aberta de centro 0, W, de um complementar algébrico E' de E_{x_0} em $T_{x_0}(M)$, e um difeomorfismo $\varphi\colon U \times W \to V$, de modo que:

a) $\varphi(0,0) = x_0$;

b) V é a união disjunta dos conjuntos $V_c = \varphi(U \times \{c\})$, com $c \in W$, cada um dos quais é uma variedade integral de $\underline{E}$, conexa e sem bordo. Em particular V_0 é uma variedade integral conexa e sem bordo, contendo x_0.

c) Qualquer que seja a variedade conexa $\tilde{M} \subset \tilde{E}$ e a aplicação de classe C^1

$f\colon \tilde{M} \to V$ tal que, para cada $z \in \tilde{M}$, $Df_z(T_z(\tilde{M})) \subset E_{f(z)}$, existe $c \in W$ tal que $f(\tilde{M}) \subset V_c$. Em particular, qualquer variedade semi-integral de $\underline{E}$, que seja conexa e contida em V, está contida num dos V_c.
d) Se $C \subset M$ é um subconjunto conexo contido numa união finita ou numerável de conjuntos V_c, então C está contido num dos V_c.
Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:
1) Notemos $\pi_x\colon E \to E_x$ as projecções ortogonais. Seja $\xi\colon M \to L(E;E)$ a aplicação suave definida por

$$\xi_x = Id_E - (Id_E - \pi_{x_0}) \circ \pi_x.$$

Tem-se $\xi_{x_0} = Id_E$ pelo que, uma vez que o conjunto dos isomorfismos é aberto em $L(E;E)$, vai existir um aberto V' de M, que supomos já ser conexo, com $x_0 \in V'$, tal que, para cada $x \in V'$, ξ_x seja um isomorfismo de E sobre E.
Uma vez que a restrição de ξ_x a E_x vai coincidir trivialmente com a restrição de π_{x_0} a E_x, concluímos, em particular, que, para cada $x \in V'$, a restrição de π_{x_0} a E_x é um isomorfismo de E_x sobre E_{x_0} (reparar que se trata de espaços vectoriais com a mesma dimensão por V' ser conexo).
2) Seja agora $X\colon V' \to L(E_{x_0};E)$ a aplicação suave definida pela condição de $X_x\colon E_{x_0} \to E$ ser a restrição a E_{x_0} do isomorfismo $\xi_x^{-1}\colon E \to E$. Por outras palavras, X_x vai ser o isomorfismo de E_{x_0} sobre E_x, inverso da restrição de π_{x_0} a E_x. Vamos verificar que X verifica as hipóteses do teorema de Frobenius (cf. IV.8.5), onde o “espaço vectorial temporal” é E_{x_0} e a equação é “independente do tempo”.
Subdem: Em primeiro lugar, para cada $x \in V'$, X_x aplica E_{x_0} em $E_x \subset T_x(M)$. Dados $x \in V'$ e $w, \tilde{w} \in E_{x_0}$, consideremos a identidade $w = \xi_y(X_y(w))$, válida para cada $y \in V'$, e derivemo-la em x na direcção de um vector $u \in T_x(M)$. Obtemos então

$$\begin{aligned}
0 &= D\xi_x(u)(X_x(w)) + \xi_x(DX_x(u)(w)) = \\
&= -(Id_E - \pi_{x_0})(D\pi_x(u)(X_x(w)) + \xi_x(DX_x(u)(w)) = \\
&= -(Id_E - \pi_{x_0})(h_x(u, X_x(w))) + \xi_x(DX_x(u)(w)),
\end{aligned}$$

donde, tomando, em particular, $u = X_x(\tilde{w})$, e tendo em conta o facto de ξ_x ser um isomorfismo,

$$DX_x(X_x(\tilde{w}))(w) = \xi_x^{-1}((Id_E - \pi_{x_0})(h_x(X_x(\tilde{w}), X_x(w)))),$$

pelo que a comutatividade do primeiro membro em w e $\tilde{w}$ é uma consequência de $\underline{E}$ verificar a condição de integrabilidade.
3) O teorema de Frobenius (cf. IV.8.5) garante a existência, para cada $x \in V'$, de um aberto U'_x de E_{x_0}, com $0 \in U'_x$, e de uma aplicação suave $f_x\colon U'_x \to V' \subset M$ tal que $f_x(0) = x$ e que, para cada $y \in U'_x$, $Df_y = X_{f(y)}$. De facto não tiramos directamente partido disso porque vamos necessitar do resultado que nos clarifica o modo como U'_x e f_x varia com a condição inicial x, nomeadamente da versão de IV.8.7 sem parâmetros.

4) Fixemos um complementar algébrico E' de E_{x_0} em $T_{x_0}(M)$, por exemplo o complementar ortogonal para o produto interno induzido pelo que consideramos em E. Existe então um aberto W'' de E', com $0 \in W''$, e uma aplicação suave $g: W'' \to M$, com $g(0) = x_0$ e $Dg_0(v) = v$, para cada $v \in E'$.
Subdem: Consideremos um aberto C de um espaço vectorial F de dimensão finita, com $0 \in C$, um aberto $\widehat{V}$ de M, com $x_0 \in \widehat{V}$, e um difeomorfismo $\psi: C \to \widehat{V}$, verificando $\psi(0) = x_0$. Basta então tomar para g a restrição a $W'' = E' \cap D\psi_0(C)$ de $\psi \circ (D\psi_0)^{-1}$.
5) Aplicando IV.8.7, sem parâmetros, podemos considerar uma bola aberta de centro 0, U', de E_{x_0}, uma bola aberta de centro 0, W', de E', com $W' \subset W''$, e uma aplicação suave $\overline{\varphi}: U' \times W' \to V' \subset M$, tal que

$$\overline{\varphi}(0, c) = g(c) \text{ e } D_1\overline{\varphi}_{(y,c)} = X_{\overline{\varphi}(y,c)}$$

(nas notações desse resultado, tomamos $\overline{\varphi}(y, c) = \omega(y, 0, g(c))$). Em particular $\overline{\varphi}(0, 0) = x_0$, $D_1\overline{\varphi}_{(y,c)} = X_{\overline{\varphi}(y,c)}$ é um isomorfismo de E_{x_0} sobre $E_{\overline{\varphi}(y,c)}$ e $D_1\overline{\varphi}_{(0,0)}$ é um isomorfismo de E_{x_0} sobre E_{x_0}.
6) Derivando a identidade $\overline{\varphi}(0, c) = g(c)$, vemos que

$$D_2\overline{\varphi}_{(0,0)}(v) = Dg_0(v) = v,$$

pelo que $D_2\overline{\varphi}_{(0,0)}$ é o isomorfismo identidade de E' sobre E' o que, somado com o facto de $D_1\overline{\varphi}_{(0,0)}$ ser um isomorfismo de E_{x_0} sobre E_{x_0}, implica que $D\overline{\varphi}_{(0,0)}$ é um isomorfismo de $E_{x_0} \times E'$ sobre $T_{x_0}(M) = E_{x_0} \oplus E'$.
7) Aplicando o teorema da função inversa, podemos considerar uma bola aberta de centro 0, U, de E_{x_0}, com $U \subset U'$, e uma bola aberta de centro 0, W, de E', com $W \subset W'$, de modo que a restrição φ, de $\overline{\varphi}$ a $U \times W$, seja um difeomorfismo deste aberto sobre um aberto V de M o qual vai evidentemente verificar $x_0 \in V \subset V'$.
8) É claro que V é a união disjunta dos conjuntos $V_c = \varphi(U \times \{c\})$, os quais, sendo difeomorfos a U, vão ser variedades, conexas e sem bordo. Além disso, o facto de $D_1\varphi_{(y,c)}$ ser um isomorfismo de E_{x_0} sobre $E_{\varphi(y,c)}$ implica que $T_{\varphi(y,c)}(V_c) = E_{\varphi(y,c)}$, o que mostra que V_c é uma variedade integral de $\underline{E}$.
9) Seja agora $\tilde{M} \subset \tilde{E}$ uma variedade conexa e $f: \tilde{M} \to V$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $z \in \tilde{M}$, $Df_z(T_z(\tilde{M})) \subset E_{f(z)}$. O facto de, para cada $(y, c) \in U \times W$, $D\varphi_{(y,c)}$ ser um isomorfismo de $E_{x_0} \times E'$ sobre $T_{\varphi(y,c)}(M)$, que aplica $E_{x_0} \times \{0\}$ sobre $E_{\varphi(y,c)}$ implica que, para cada $x \in V$, $D(\varphi^{-1})_x$ é um isomorfismo de $T_x(M)$ sobre $E_{x_0} \times E'$ que aplica E_x sobre $E_{x_0} \times \{0\}$. Segue-se daqui que, para cada $z \in \tilde{M}$,

$$D(\varphi^{-1} \circ f)_z = D(\varphi^{-1})_{f(z)} \circ Df_z: T_z(\tilde{M}) \to E_{x_0} \times E'$$

tem imagem contida em $E_{x_0} \times \{0\}$ e portanto a derivada da composta de

$\varphi^{-1} \circ f$ com a segunda projecção $\pi_2: U \times W \to W$ é identicamente nula. Esta última composta é assim uma aplicação constante, por $\tilde{M}$ ser uma variedade conexa, pelo que existe $c \in W$ tal que $\varphi^{-1} \circ f$ aplica $\tilde{M}$ em $U \times \{c\}$, ou seja, $f(\tilde{M}) \subset V_c$.

10) O facto de qualquer variedade semi-integral de $\underline{E}$, que seja conexa e contida em V, estar contida num dos V_c resulta de aplicar o que concluímos em 9) à inclusão dessa variedade em M.

11) Suponhamos que C é um subconjunto conexo de M, contido numa união finita ou numerável de conjuntos V_c. Tem-se então que $\pi_2(\varphi^{-1}(C))$ é um subconjunto conexo finito ou numerável de $W \subset E$ e portanto, pelo lema topológico precedente, $\pi_2(\varphi^{-1}(C))$ é vazio ou constituído por um único elemento, o que implica que C está contido num dos V_c. □

No sentido de nos podermos referir mais simplesmente às conclusões mais importantes do resultado precedente, apresentamos a seguinte definição:

IV.9.10 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade **sem bordo**, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Vamos dizer que um aberto não vazio V de M é *fatiável* se, sendo $\{V_c\}_{c \in W}$ o conjunto das variedades integrais sem bordo conexas maximais de $\underline{E}_{/V}$ (as *fatias* de V, em inglês “*slices*”), verificam-se as seguintes condições:

a) As variedades V_c são disjuntas duas a duas e com união V;

b) Quaisquer que sejam a variedade conexa $\tilde{M}$ e a aplicação de classe C^1 $f: \tilde{M} \to V$ tal que, para cada $z \in \tilde{M}$, $Df_z(T_z(\tilde{M})) \subset E_{f(z)}$, existe $c \in W$ tal que $f(\tilde{M}) \subset V_c$. Em particular, qualquer variedade semi-integral de $\underline{E}$, que seja conexa e contida em V, está contida num dos V_c.

c) Qualquer subconjunto conexo C de V que esteja contido numa união finita ou numerável de conjuntos V_c, está contido num dos V_c.

IV.9.11 **(Versão geométrica local simplificada do teorema de Frobenius)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade **sem bordo**, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade.

Para cada $x_0 \in M$, existe então um aberto conexo fatiável V, com $x_0 \in V$.

Dem: Temos uma consequência imediata das conclusões de IV.9.9. □

EXERCÍCIOS

Ex IV.1 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $A \subset E$ um subconjunto e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Seja $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to A$ o fluxo de X. Mostrar que:

a) Se $(t,x) \in \widehat{\Omega}$ e se $s \in \mathbb{R}$, então $(s, \widehat{\omega}(t,x)) \in \widehat{\Omega}$ se, e só se, $(s+t,x) \in \widehat{\Omega}$ e, nesse caso,

$$\widehat{\omega}(s, \widehat{\omega}(t,x)) = \widehat{\omega}(s+t,x).$$

b) Se $x \in A$, então $(0,x) \in \widehat{\Omega}$ e $\widehat{\omega}(0,x) = x$.
c) Se $(t,x) \in \widehat{\Omega}$, então $(-t, \widehat{\omega}(t,x)) \in \widehat{\Omega}$ e $\widehat{\omega}(-t, \widehat{\omega}(t,x)) = x$.

Ex IV.2 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $w \in E$ fixado. Sejam $X, Y : E \to E$ as aplicações suaves definidas por $X(x) = w$ e $Y(x) = x$. Determinar a solução geral e o fluxo de cada um dos campos vectoriais X e Y.

Ex IV.3 Sejam $A \subset E$ e $X : A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Diz-se que $x \in A$ é um *ponto singular* de X se se tem $X_x = 0$. Mostrar que, se $f : J \to A$ é uma curva integral não constante de X, então, para cada $t \in J$, $f(t)$ não é singular.

Ex IV.4 Sejam $A \subset E$ e $X : A \to E$ uma aplicação de classe C^1. Seja $f : J \to A$ a curva integral máxima de X para uma certa condição inicial (a,x). Mostrar que, se a aplicação f não é injectiva, então $J = \mathbb{R}$ e a aplicação f é periódica (ou constante).

Ex IV.5 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de um produto interno, e seja $X : E \to E$ a aplicação definida por $X_x = \langle x, x \rangle x$. Para cada $w \in E$, determinar a curva integral máxima de X, com a condição inicial $(0,w)$, reparando que, em geral, o seu domínio não é $\mathbb{R}$. **Sugestão:** No caso em que $w \neq 0$, procurar uma curva integral da forma $f(t) = \varphi(t)w$.

Ex IV.6 Sejam $A \subset E$ e $X : A \to E$ uma aplicação de classe C^1 e seja $\omega : \Omega \to A$ a respectiva solução geral. Sejam $\widehat{A} \subset A$ e $\widehat{X} : \widehat{A} \to E$ a restrição de X. Mostrar que a solução geral $\widehat{\omega} : \widehat{\Omega} \to \widehat{A}$, de $\widehat{X}$, é uma restrição de ω, e caracterizar os elementos de $\widehat{\Omega}$.

Ex IV.7 Enunciar as versões não paramétricas dos resultados IV.2.5 e IV.3.4 e demonstrá-las a partir das respectivas versões paramétricas. **Nota:** Este exercício é trivial (cf. IV.2.2) e o seu único objectivo é fazer sentir essa trivialidade.

Ex IV.8 Sejam $U \subset E$ um aberto e $X : U \to E$ uma aplicação de classe C^1. Para cada $x \in U$, seja $f_x :]a_x, b_x[\to U$ a curva integral máxima de X, com a condição inicial $(0,x)$, onde as extremidades podem ser finitas ou infinitas. Mostrar que as aplicações de U em $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, que a cada $x \in U$ associam a_x e b_x, são respectivamente semi-contínua superiormente e semi-contínua inferiormente (isto é, são contínuas, quando se considera na recta acabada a topologia superior e a topologia inferior, respectivamente).

Ex IV.9 Mostrar que os lemas IV.3.2 e IV.3.3 são consequências simples do resultado fundamental IV.3.4.

Ex IV.10 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $X: E \to E$ uma aplicação de classe C^1. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$, e seja $f:]a, b[\to E$ a curva integral máxima de X, com a condição inicial (t, x). Mostrar que:

a) Se a é finito, então $\lim\limits_{s \to a} \|f(s)\| = +\infty$;

b) Se b é finito, então $\lim\limits_{s \to b} \|f(s)\| = +\infty$.

Sugestão: IV.3.6.

Ex IV.11 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto *limitado* e $X: U \to E$ uma aplicação de classe C^1. Seja $f:]a, b[\to U$ a curva integral máxima de X, para uma certa condição inicial (t, x). Mostrar que:

a) Se a é finito, então $\lim\limits_{s \to a} d(f(s), E \setminus U) = 0$;

b) Se b é finito, então $\lim\limits_{s \to b} d(f(s), E \setminus U) = 0$.

Sugestão: IV.3.6.

Ex IV.12 Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, de extremidades finitas ou infinitas, e seja $X: J \to]0, +\infty[$ uma aplicação suave. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $b \in J$, seja $f: \widehat{J} \to J$ a curva integral máxima de X, com a condição inicial (a, b). Mostrar que f é um difeomorfismo estritamente crescente de $\widehat{J}$ sobre J. Mostrar ainda que o difeomorfismo $f^{-1}: J \to \widehat{J}$ é a curva integral máxima do campo vectorial $\widehat{X}: \widehat{J} \to]0, +\infty[$, definido por $\widehat{X}(s) = \frac{1}{X(f(s))}$, com a condição inicial (b, a).

Ex IV.13 Mostrar que, para todo o número real a, cujo módulo seja suficientemente pequeno, existe uma aplicação $f: [-1000, 1000] \to \mathbb{R}$, verificando a equação diferencial

$$f'(t) = \frac{f(t)}{1 + a\, t\, f(t)^5},$$

com a condição inicial $f(\pi) = \pi$.

Ex IV.14 Sejam $A \subset \mathbb{R} \times E$ e $X: A \to E$ uma aplicação de classe C^p, com $p \geq 1$. Sejam $(t, x) \in A$ e $f: J \to E$ a solução máxima da equação diferencial definida por X, com a condição inicial (t, x). Mostrar que f é uma aplicação de classe C^{p+1}.

Ex IV.15 Enunciar a versão de IV.6.1 para as equações diferenciais sem parâmetros e independentes do tempo, e reparar que esta versão é uma consequência trivial daquele resultado geral.

Ex IV.16 Sejam $U \subset E$ um aberto e $X: U \to E$ uma aplicação de classe C^p, onde $p \geq 1$. Seja $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to U$ o fluxo de X. Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja U_t o conjunto dos $x \in U$ tais que $(t, x) \in \widehat{\Omega}$.

a) Mostrar que cada U_t é um aberto de E, contido em U (eventualmente vazio);

b) Mostrar que, para cada t, existe um C^p-difeomorfismo $\varphi_t: U_t \to U_{-t}$, definido por $\varphi_t(x) = \widehat{\omega}(t, x)$, difeomorfismo cujo inverso é φ_{-t}.

Ex IV.17 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de um produto interno.
a) Mostrar que, dados $r > 0$, $x_0 \in E$ e $x, y \in B_r(x_0)$ (bola aberta de centro x_0 e raio r), existe um difeomorfismo $f: E \to E$, tal que $f(x) = y$ e que, para cada $z \notin B_r(x_0)$, $f(z) = z$.
Sugestão: Considerar um difeomorfismo do tipo referido no exercício anterior.
b) Sejam U um aberto conexo de E e $x, y \in U$. Mostrar que existe um compacto $K \subset U$ e um difeomorfismo $f: U \to U$, tal que $f(x) = y$ e que, para cada $z \notin K$, $f(z) = z$.
c) Sejam F um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset F$ uma variedade conexa sem bordo. Mostrar que, dados $x, y \in M$, existe um compacto $K \subset M$ e um difeomorfismo $f: M \to M$ tal que $f(x) = y$ e que, para cada $z \notin K$, $f(z) = z$. **Sugestão:** Utilizar a conclusão de b).

Ex IV.18 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $U \subset E$ um aberto. Sejam $a < b$, finitos ou infinitos, e $f:]a, b[\to U$ uma aplicação suave, *injectiva*, com $f'(t) \neq 0$ para cada t, e tal que, para cada compacto $K \subset U$, existam $a < a' < b' < b$ tais que $f(t) \notin K$, sempre que $t < a'$ ou $t > b'$ (isto é, $f(t)$ convirja para o *ponto do infinito* de U, quando t converge para qualquer das extremidades do domínio). Mostrar que existe então uma aplicação suave $X: U \to E$, tal que f seja uma curva integral máxima de X, para uma certa condição inicial. **Sugestão:** Mostrar que $f(]a, b[)$ é fechado em U e que f é um difeomorfismo de $]a, b[$ sobre $f(]a, b[)$.

Ex IV.19 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto e $X: U \to E$ uma aplicação de classe C^1 (ou C^2, se quisermos simplificar). Seja $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to U$ o fluxo de X, que está definido num aberto $\widehat{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times E$. Mostrar que, para cada $w \in E$, a derivada parcial $D_2\widehat{\omega}_{(t,x)}(w)$ verifica a seguinte equação diferencial linear (chamada *equação às variações*), com a condição inicial $D_2\widehat{\omega}_{(0,x)}(w) = w$:

$$\frac{\partial}{\partial t} D_2\widehat{\omega}_{(t,x)}(w) = DX_{\widehat{\omega}(t,x)}(D_2\widehat{\omega}_{(t,x)}(w)).$$

Ex IV.20 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $A \subset E$ um subconjunto. Chama-se *grupo a um parâmetro de difeomorfismos de* A a uma aplicação suave $\varphi: \mathbb{R} \times A \to A$, verificando as condições $\varphi(0, x) = x$ e $\varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$.
a) Mostrar que, se $\varphi: \mathbb{R} \times A \to A$ é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos de A, então, para cada $t \in \mathbb{R}$, tem lugar um difeomorfismo $\varphi_t: A \to A$, definido por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. Mostrar que a aplicação, que a t associa o difeomorfismo φ_t, é um morfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo dos difeomorfismos de A.

b) Mostrar que, se $M \subset E$ é uma variedade sem bordo e se $X: M \to E$ é um campo vectorial suave, de suporte compacto, então o fluxo $\widehat{\omega}: \mathbb{R} \times M \to M$ de X, é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos.
c) Mostrar que, se $A \subset E$, e se $\varphi: \mathbb{R} \times A \to A$ é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos de A, então tem lugar uma aplicação suave $X: A \to E$, definida por $X_x = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x)$, que é um campo vectorial (no sentido que se tem $X_x \in T_x(A)$, para cada $x \in A$), e que o fluxo de X é então a aplicação φ.
d) Deduzir que, em particular, no caso em que M é uma variedade compacta e sem bordo, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos grupos a um parâmetro de difeomorfismos de M e o conjunto dos campos vectoriais suaves sobre M.

Ex IV.21 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, $X: M \to E$ um campo vectorial suave, $\varphi: M \to]0, +\infty[$ uma aplicação suave e $\widehat{X}: M \to E$ o campo vectorial suave, definido por $\widehat{X}_x = \varphi(x) X_x$. Sejam $t \in \mathbb{R}$, $x \in M$ e $f: J \to M$ e $\widehat{f}: \widehat{J} \to M$ as curvas integrais máximas de X e de $\widehat{X}$, com a condição inicial (t, x). Mostrar que existe então um difeomorfismo estritamente crescente $\alpha: \widehat{J} \to J$, tal que $\alpha(t) = t$ e que $\widehat{f}(s) = f(\alpha(s))$, para cada $s \in \widehat{J}$ (por outras palavras, as curvas integrais de X e de $\widehat{X}$ são as mesmas, *a menos de* reparametrização).
Sugestão: Utilizando o exercício IV.12, considerar os difeomorfismos crescentes $\alpha: \widehat{J}_1 \to J$ e $\widehat{\alpha}: J_1 \to \widehat{J}$, curvas integrais máximas de $\varphi \circ f$ e de $\widehat{\varphi} \circ \widehat{f}$, onde $\widehat{\varphi}(y) = 1/\varphi(y)$, com a condição inicial (t, t); deduzir que $f \circ \alpha$ é uma restrição de $\widehat{f}$ e que $\widehat{f} \circ \widehat{\alpha}$ é uma restrição de f; Sendo $J' = \widehat{\alpha}^{-1}(\widehat{J}_1) \subset J_1 \subset J$, mostrar que o difeomorfismo $\alpha \circ \widehat{\alpha}_{/J'}$ de J' sobre J, aplica t em t e tem derivada igual a 1.

Ex IV.22 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade compacta sem bordo, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $X: J \times M \to E$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $(t, x) \in J \times M$, $X(t, x) \in T_x(M)$. Mostrar que, para cada $t \in J$ e $x \in M$, a solução máxima da equação diferencial definida por X, com a condição inicial (t, x), está definida em J.
Sugestão: Utilizar o método de IV.4.2 para reduzir o problema ao de uma equação diferencial independente do tempo, à qual se aplicará IV.7.5. Para fazer isso convirá que o intervalo J seja aberto; caso isso não aconteça, começar por considerar um intervalo aberto $\widehat{J} \supset J$, tal que J seja fechado em $\widehat{J}$, e tomar em seguida um prolongamento de classe C^1 de X a $\widehat{J} \times M$.

Ex IV.23 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, não obrigatoriamente compacta, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $X: J \times M \to E$ uma aplicação de classe C^1 tal que $X(t, x) \in T_x(M)$, para cada $(t, x) \in J \times M$. Sejam $t \in J$, $x \in M$ e $f: I \to M$ a solução máxima da equação diferencial definida por X, com a condição inicial (t, x). Que conclusão do tipo da de IV.7.5 se poderá tirar neste caso? **Sugestão:** A mesma que para o exercício anterior.

Ex IV.24 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita.

a) Mostrar que, para cada $\lambda \in L(E;E)$, existe uma, e uma só, aplicação suave $\varphi_\lambda: \mathbb{R} \to L(E;E)$, verificando as condições $\varphi_\lambda(0) = Id_E$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'_\lambda(t) = \lambda \circ \varphi_\lambda(t)$.

b) Mostrar que tem lugar uma aplicação suave

$$\exp: L(E;E) \to L(E;E),$$

definida por $\exp(\lambda) = \varphi_\lambda(1)$ e que se tem, para cada $\lambda \in L(E;E)$ e $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_\lambda(t) = \exp(t\lambda)$, em particular, $\exp(0) = Id_E$. (**Nota:** A $\exp(\lambda)$ dá-se o nome de *exponencial* do endomorfismo λ).

c) Mostrar que, se $\lambda \circ \mu = \mu \circ \lambda$, então $\exp(\lambda) \circ \mu = \mu \circ \exp(\lambda)$, e portanto também $\exp(\lambda) \circ \exp(\mu) = \exp(\mu) \circ \exp(\lambda)$. **Sugestão:** Mostrar que se tem $\varphi_\lambda(t) \circ \mu = \mu \circ \varphi_\lambda(t)$, por ambos os membros verificarem uma mesma equação diferencial com a mesma condição inicial.

d) Mostrar que, se $\lambda \circ \mu = \mu \circ \lambda$, então

$$\exp(\lambda + \mu) = \exp(\lambda) \circ \exp(\mu),$$

deduzindo, em particular, que $\exp(\lambda)$ é um isomorfismo, tendo $\exp(-\lambda)$ como isomorfismo inverso. **Sugestão:** Tal como anteriormente, verificar que $\varphi_{\lambda+\mu}(t) = \varphi_\lambda(t) \circ \varphi_\mu(t)$.

e) Seja G um subgrupo do grupo $GL(E) = L_{iso}(E;E)$, que seja uma variedade fechada em $GL(E)$. Mostrar que, se $\lambda \in T_{Id}(G)$, então $\exp(\lambda) \in G$. **Sugestão:** Tal como no exercício II.33, verificar que G não tem bordo. Provar então que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_\lambda(t) \in G$, utilizando a versão de IV.7.2 para equações diferenciais independentes do tempo.

f) Supondo conhecida a teoria das séries num espaço vectorial normado, mostrar que se tem

$$\exp(\lambda) = Id_E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Sugestão: Mostrar que se tem, mais geralmente,

$$\varphi_\lambda(t) = Id_E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!}.$$

Ex IV.25 **(Equações diferenciais holomorfas)** Sejam E e F espaços vectoriais complexos de dimensão finita, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, U um aberto de $F \times J \times E$ e $X: U \to E$ uma aplicação suave tal que, para cada $t \in J$, seja holomorfa a aplicação $X_{(t)}: U_{(t)} \to E$, definida por $X_{(t)}(y,x) = X(y,t,x)$, no aberto $U_{(t)}$ de $F \times E$, formado pelos pontos (y,x) tais que $(y,t,x) \in U$. Seja $\omega: \Omega \to E$ a solução geral da equação diferencial paramétrica, dependente do tempo, definida por X, que sabemos ser uma aplicação suave, definida num aberto Ω de $F\times J\times J\times E$. Mostrar que, para cada $s,t\in\mathbb{R}$, sendo $\Omega_{(s,t)}$ o conjunto aberto de $F\times E$, formado pelos (y,x) tais que $(y,s,t,x)\in\Omega$, é holomorfa a aplicação $\omega_{(s,t)}\colon\Omega_{(s,t)}\to E$, definida por $\omega_{(s,t)}(y,x)=\omega(y,s,t,x)$. **Sugestão:** Sendo J' o intervalo de extremidades s e t, verificar que a aplicação de J' em $L(F\times E;E)$, que a u associa $D\omega_{(u,t)}(y,x)$, é solução de uma certa equação diferencial linear.

Ex IV.26 **(O fluxo e a derivada de Lie)** Sejam $M\subset E$ uma variedade sem bordo e $X=(X_x)_{x\in M}$ um campo vectorial suave.

a) Sendo $\widehat{\omega}\colon\widehat{\Omega}\to M$ o fluxo de X, mostrar que, para cada $s\in\mathbb{R}$, o conjunto U_s, dos $x\in M$ tais que $(s,x)\in\widehat{\Omega}$, é um aberto de M e tem lugar um difeomorfismo $\varphi_s\colon U_s\to U_{-s}$, definido por $\varphi_s(x)=\widehat{\omega}(s,x)$, difeomorfismo cujo inverso é φ_{-s}.
Nota: Trata-se essencialmente duma repetição do que se fez no exercício IV.16.
b) Seja $\lambda=(\lambda_x)_{x\in M}\colon T(M)\to T(M)$ um morfismo linear suave tal que a derivada de Lie $\mathcal{L}_X(\lambda)$ seja 0 (cf. o exercício III.74). Mostrar que, para cada $s\in\mathbb{R}$, o difeomorfismo $\varphi_s\colon U_s\to U_{-s}$ verifica a condição

$$D(\varphi_s)_x(\lambda_x(u))=\lambda_{\varphi_s(x)}(D(\varphi_s)_x(u)),$$

para cada $x\in U_s$ e $u\in T_x(M)$.
Sugestão: Lembrar que $\widehat{\omega}(0,x)=x$ e que $\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\omega}(s,x)=X_{\widehat{\omega}(s,x)}$. A condição pretendida pode ser escrita na forma

$$D\widehat{\omega}_{(s,x)}(0,\lambda_x(u))=\lambda_{\widehat{\omega}(s,x)}(D\widehat{\omega}_{(s,x)}(0,u)).$$

Fixados $x\in M$ e $u\in T_x(M)$, notar $\alpha(s)\in T_{\widehat{\omega}(s,x)}(M)$ e $\beta(s)\in T_{\widehat{\omega}(s,x)}(M)$ o primeiro e o segundo membros da igualdade precedente e verificar que se tem $\alpha(0)=\beta(0)=\lambda_x(u)$ assim como

$$\alpha'(s)=DX_{\widehat{\omega}(s,x)}(\alpha(s)),\quad \beta'(s)=DX_{\widehat{\omega}(s,x)}(\beta(s)),$$

no segundo caso utilizando a hipótese $\mathcal{L}_X(\lambda)=0$. Eventualmente poderá ser mais claro interpretar as igualdades anteriores para identificar duas curvas integrais, com uma mesma condição inicial, do campo vectorial sobre a variedade $T(M)$, que a (y,v) associa $(X_y,DX_y(v))$.
c) Seja $\mu=(\mu_x)_{x\in M}\colon T(M)\times T(M)\to F_M$ um morfismo bilinear suave, onde F é um espaço vectorial de dimensão finita, tal que a derivada de Lie $\mathcal{L}_X(\mu)$ seja 0 (cf. o exercício III.75). Mostrar que, para cada $s\in\mathbb{R}$, o difeomorfismo $\varphi_s\colon U_s\to U_{-s}$ verifica a condição

$$\mu_{\varphi_s(x)}(D(\varphi_s)_x(u),D(\varphi_s)_x(v))=\mu_x(u,v),$$

para cada $x\in U_s$ e $u,v\in T_x(M)$.
Sugestão: A igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\mu_{\widehat{\omega}(s,x)}(D\widehat{\omega}_{(s,x)}(0,u), D\widehat{\omega}_{(s,x)}(0,v)) = \mu_x(u,v).$$

Fixados $x \in M$ e $u, v \in T_x(M)$, notar $\alpha(s) \in F$ o primeiro membro da igualdade precedente e verificar que se tem $\alpha(0) = \mu_x(u,v)$ e $\alpha'(s) = 0$.[99]

d) Seja $Y = (Y_x)_{x\in M}$ outro campo vectorial suave, tal que o parêntesis de Lie $[X,Y]$ seja 0. Mostrar que, para cada $s \in \mathbb{R}$, o difeomorfismo $\varphi_s\colon U_s \to U_{-s}$ verifica, para cada $x \in U_s$, a condição

$$D(\varphi_s)_x(Y_x) = Y_{\varphi_s(x)},$$

por outras palavras, que as restrições de Y a U_s e a U_{-s} são φ_s-relacionadas (cf. III.7.1).

Sugestão: A igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$D\widehat{\omega}_{(s,x)}(0, Y_x) = Y_{\widehat{\omega}(s,x)}.$$

Fixado $x \in M$, notar $\alpha(s) \in T_{\widehat{\omega}(s,x)}(M)$ e $\beta(s) \in T_{\widehat{\omega}(s,x)}(M)$ o primeiro e o segundo membros da igualdade precedente, como na alínea b), verificar que se tem $\alpha(0) = \beta(0) = Y_x$ assim como

$$\alpha'(s) = DX_{\widehat{\omega}(s,x)}(\alpha(s)), \quad \beta'(s) = DX_{\widehat{\omega}(s,x)}(\beta(s)),$$

no segundo caso utilizando a hipótese $[X,Y] = 0$.

Nota: O paralelismo desta alínea com as anteriores, assim como o que se passa adiante no exercício IV.28, é uma das razões pela qual ao parêntesis de Lie $[X,Y]$ de dois campos vectoriais também se dá o nome de *derivada de Lie* de Y na direcção de X, escrevendo-se também $[X,Y] = \mathcal{L}_X(Y)$.

Ex IV.27 **(Generalização da versão independente do tempo e não paramétrica do exercício IV.25)** Sejam E um espaço vectorial real de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, munida de uma estrutura quase complexa suave $(J_x)_{x\in M}$, e $X = (X_x)_{x\in M}$ um campo vectorial holomorfo (cf. o exercício III.99). Mostrar que, para cada $s \in \mathbb{R}$, o difeomorfismo $\varphi_s\colon U_s \to U_{-s}$ entre os abertos U_s e U_{-s} de M, referido na alínea a) do exercício IV.26, é um difeomorfismo holomorfo. **Nota:** O objectivo deste exercício é apenas enunciar o resultado, na medida em que não temos mais do que um caso particular da alínea b) do exercício IV.26.

Ex IV.28 **(Recíproco do exercício IV.26)** Sejam $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $X = (X_x)_{x\in M}$ um campo vectorial suave, com fluxo $\widehat{\omega}\colon \widehat{\Omega} \to M$. Seja, para cada $s \in \mathbb{R}$, U_s o aberto de M constituído pelos x tais que $(s,x) \in \widehat{\Omega}$ e $\varphi_s\colon U_s \to U_{-s}$ o difeomorfismo definido por $\varphi_s(x) = \widehat{\omega}(s,x)$.

a) Sejam $\lambda = (\lambda_x)_{x\in M}\colon T(M) \to T(M)$ um morfismo linear suave, $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para cada $s \in \mathbb{R}$ com $|s| < \varepsilon$, se tenha $x \in U_s$ e

[99] Nesta alínea não intervêm equações diferenciais, mas enunciamo-la para sublinhar o paralelismo com as alíneas b) e d).

$$D(\varphi_s)_x(\lambda_x(u)) = \lambda_{\varphi_s(x)}(D(\varphi_s)_x(u)),$$

para cada $u \in T_x(M)$. Mostrar que $\mathcal{L}_X(\lambda)_x = 0$.
Sugestão: Escrever a igualdade anterior na forma

$$D\widehat{\omega}_{(s,x)}(0, \lambda_x(u)) = \lambda_{\widehat{\omega}(s,x)}(D\widehat{\omega}_{(s,x)}(0, u))$$

e derivar ambos os membros desta igualdade como funções de s para $s = 0$.
b) Sejam $\mu = (\mu_x)_{x \in M}: T(M) \times T(M) \to F_M$ um morfismo bilinear suave, onde F é um espaço vectorial de dimensão finita, $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para cada $s \in \mathbb{R}$ com $|s| < \varepsilon$, se tenha $x \in U_s$ e

$$\mu_{\varphi_s(x)}(D(\varphi_s)_x(u), D(\varphi_s)_x(v)) = \mu_x(u, v),$$

quaisquer que sejam $u, v \in T_x(M)$. Mostrar que $\mathcal{L}_X(\mu)_x = 0$.
Sugestão: Análoga à anterior.
c) Sejam $Y = (Y_x)_{x \in M}$ outro campo vectorial, $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para cada $s \in \mathbb{R}$ com $|s| < \varepsilon$, se tenha $x \in U_s$ e

$$D(\varphi_s)_x(Y_x) = Y_{\varphi_s(x)}.$$

Mostrar que $[X, Y]_x = 0$.
Sugestão: Análoga à anterior.

Ex IV.29 Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$, identificado a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e consideremos $m \times n$ funções de classe C^1, $g^i_\alpha: U \to \mathbb{R}$, onde $1 \le i \le n$ e $1 \le \alpha \le m$. Dizer quais as condições que devem verificar as derivadas parciais

$$\frac{\partial g^i_\alpha}{\partial s_\beta}(s_1, \ldots, s_m, y_1, \ldots, y_n)$$
$$\frac{\partial g^i_\alpha}{\partial y_j}(s_1, \ldots, s_m, y_1, \ldots, y_n),$$

de modo a ser possível garantir a existência, para cada condição inicial $(t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n) \in U$, de um aberto V de $\mathbb{R}^m$, com $(t_1, \ldots, t_m) \in V$, e de funções de classe C^1, $f^i: V \to \mathbb{R}$, onde $1 \le i \le n$, verificando as condições iniciais $f^i(t_1, \ldots, t_m) = x_i$ e as *equações diferenciais totais*

$$\frac{\partial f^i}{\partial s_\alpha}(s_1, \ldots, s_m) = g^i_\alpha(s_1, \ldots, s_m, f^1(s_1, \ldots, s_m), \ldots, f^n(s_1, \ldots, s_m)).$$

Nota: Classicamente, era neste quadro que se enunciava o teorema de Frobenius.

Ex IV.30 Enunciar a forma simplificada do teorema de Frobenius, para equações diferenciais totais independentes do *tempo*, isto é, para equações do tipo $Df_{\boldsymbol{t}} = Z(f(\boldsymbol{t}))$, notando que esse enunciado é uma consequência trivial da versão geral conhecida.

Ex IV.31 Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, U um aberto de G e $X: U \to L(G; E)$ uma aplicação de classe C^1. Dizer qual a condição que se deve impôr a X, para assegurar a existência, para cada $\boldsymbol{t} \in U$ e $x \in E$, de um aberto V de G, com $\boldsymbol{t} \in V \subset U$, e de uma aplicação $f: V \to E$, verificando $f(\boldsymbol{t}) = x$ e, para cada $\boldsymbol{s} \in V$, $Df_{\boldsymbol{s}} = X(\boldsymbol{s})$ (uma *primitiva* de X).

Verificar como se pode enunciar, no caso em que $G = \mathbb{R}^m$ e $E = \mathbb{R}$, um resultado equivalente a este, em que a aplicação X é substituída por m aplicações de classe C^1 de U em $\mathbb{R}$, que se pede virem a ser, localmente, as derivadas parciais de uma certa aplicação f.

Ex IV.32 Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade compacta e sem bordo e $X: M \to L(G; E)$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $x \in M$, Z_x aplique G em $T_x(M)$ e seja simétrica a aplicação bilinear de $G \times G$ em E, que a $(w, \tilde{w})$ associa $DX_x(X_x(w))(\tilde{w})$. Mostrar que, para cada $t \in G$ e $x \in M$, a solução máxima da equação diferencial total definida por X, com a condição inicial (t, x), está definida em G.

Ex IV.33 Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade compacta e sem bordo, $\boldsymbol{J} \subset G$ um aberto estrelado relativamente a um certo $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{J}$, e $X: \boldsymbol{J} \times M \to L(G; E)$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $(\boldsymbol{s}, x) \in \boldsymbol{J} \times M$, $Z_{(\boldsymbol{s},x)}$ aplique G em $T_x(M)$ e seja simétrica a aplicação bilinear $G \times G \to E$,

$$(w, \tilde{w}) \mapsto DZ_{(\boldsymbol{s},x)}(w, Z_{(\boldsymbol{s},x)}(w))(\tilde{w}).$$

Mostrar que, para cada $x \in M$, a solução máxima da equação diferencial total definida por X, com a condição inicial $(\boldsymbol{t}, x)$, está definida em $\boldsymbol{J}$. **Sugestão:** Utilizar o teorema de Frobenius e o exercício IV.22.

Ex IV.34 Sejam G e E espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $X: M \to L(G; E)$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $x \in M$, Z_x aplique G em $T_x(M)$ e seja simétrica a aplicação bilinear $G \times G \to E$, definida por $(w, \tilde{w}) \mapsto DX_x(X_x(w))(\tilde{w})$. Mostrar que, para cada $\boldsymbol{t} \in G$, e cada compacto $K \subset M$, existe um aberto $\boldsymbol{J}$ de G, estrelado relativamente a $\boldsymbol{t}$, tal que, para cada $x \in K$, existe uma solução $f: \boldsymbol{J} \to M$ da equação diferencial definida por X, com a condição inicial $(\boldsymbol{t}, x)$. **Sugestão:** Utilizar a versão de IV.8.7 sem parâmetros.

Ex IV.35 **(Teorema de Frobenius para equações lineares)** Sejam G, H e E espaços vectoriais de dimensão finita, $\pi: H \times E \to E$ uma aplicação bilinear, $\boldsymbol{J} \subset G$ um aberto estrelado relativamente a um certo $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{J}$ e $\Gamma: \boldsymbol{J} \to L(G; H)$ e $\gamma: \boldsymbol{J} \to L(G; E)$ duas aplicações de classe C^1 tais que, para cada $(\boldsymbol{s}, x) \in \boldsymbol{J} \times E$, seja simétrica a aplicação bilinear $G \times G \to E$, definida por

$$(w, \tilde{w}) \mapsto \pi(D\Gamma_{\boldsymbol{s}}(w)(\tilde{w}), x) + D\gamma_{\boldsymbol{s}}(w)(\tilde{w}) + \pi(\Gamma_{\boldsymbol{s}}(\tilde{w}), \pi(\Gamma_{\boldsymbol{s}}(w), x) + \gamma_{\boldsymbol{s}}(w)).$$

Mostrar que, para cada $x \in E$ existe uma, e uma só, aplicação de classe C^1 $f\colon \boldsymbol{J} \to E$ tal que $f(\boldsymbol{t}) = x$ e que, para cada $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{J}$ e $w \in G$,

$$Df_{\boldsymbol{s}}(w) = \pi(\Gamma_{\boldsymbol{s}}(w), f(\boldsymbol{s})) + \gamma_{\boldsymbol{s}}(w)$$

(a esta última igualdade pode-se dar o nome de *equação diferencial total linear*). **Sugestão:** Aplicar o teorema de Frobenius IV.8.5, tendo em conta a caracterização explícita que se dá aí do domínio da solução máxima.

Ex IV.36 Sejam $M \subset E$ uma variedade sem bordo, $X\colon M \to E$ um campo vectorial suave e $\widehat{\omega}\colon \widehat{\Omega} \to M$ o respectivo fluxo. Sejam, para cada $s \in \mathbb{R}$, U_s o aberto de M constituído pelos $x \in M$ tais que $(s,x) \in \widehat{\Omega}$ e $\varphi_s\colon U_s \to U_{-s}$ o difeomorfismo definido por $\varphi_s(x) = \widehat{\omega}(s,x)$, cujo inverso é φ_{-s} (cf. o exercício IV.26).

a) Mostrar que, se $Y\colon M \to E$ é um campo vectorial suave, então, para cada $x \in M$,

$$[X,Y]_x = \lim_{s\to 0} \frac{D\varphi_{-s}(\varphi_s(x))(Y_{\varphi_s(x)}) - Y_x}{s},$$

o que apresenta o parêntesis de Lie $[X,Y]_x$ como uma espécie de derivada do campo vectorial Y (por este motivo, a $[X,Y]_x$ também se costuma dar o nome de *derivada de Lie* do campo vectorial Y na direcção de X). Reencontrar a partir daqui a conclusão da alínea c) do exercício IV.28.

Sugestão: Uma vez que X e Y admitem prolongamentos suaves a um aberto de E contendo M, pode-se já supor que M é um aberto de E. A existência e o valor do limite considerado são equivalentes a afirmar que se tem $g'(0) = [X,Y]_x$, onde

$$g(s) = D\varphi_{-s}(\varphi_s(x))(Y_{\varphi_s(x)}) = D\widehat{\omega}_{(-s,\widehat{\omega}(s,x))}(0, Y_{\widehat{\omega}(s,x)}).$$

Calcular a derivada $g'(0)$ por derivação do último membro da fórmula anterior, lembrando que $D^2\widehat{\omega}_{(0,x)}$ é uma aplicação bilinear simétrica e reparando que, x estando fixado, tem-se

$$D\widehat{\omega}_{(0,x')}(-1, X_x) = -X_{x'} + X_x.$$

b) Sob as hipóteses da alínea a), mostrar que se tem, mais geralmente, para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $(t,x) \in \widehat{\Omega}$,

$$\lim_{s\to 0} \frac{D\varphi_{-s-t}(\varphi_{s+t}(x))(Y_{\varphi_{s+t}(x)}) - D\varphi_{-t}(\varphi_t(x))(Y_{\varphi_t(x)})}{s} = \\ = D\varphi_{-t}(\varphi_t(x))([X,Y]_{\varphi_t(x)}).$$

Reencontrar a partir daqui a conclusão da alínea d) do exercício IV.26.

Sugestão: Aplicar a alínea anterior, com $\varphi_t(x)$ no lugar de x e atender a igualdades do tipo $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ (válida num vizinhança aberta de x), aplicando em seguida a ambos os membros a aplicação linear $D\varphi_{-t}(\varphi_t(x))$.

Para a última afirmação, verificar que a aplicação g na sugestão de a) tem derivada identicamente nula.

Ex IV.37 Demonstrar a seguinte versão mais forte da conclusão c) de IV.8.9: Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $X, Y: M \to E$ dois campos vectoriais suaves, tais que $[X, Y]_x = 0$, para cada $x \in M$. Sejam $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to M$ e $\widehat{\gamma}: \widehat{\Gamma} \to M$ os fluxos de X e Y, respectivamente. Sejam $x \in M$ e $s, t \in \mathbb{R}$, tais que, para cada v no intervalo fechado de extremidades 0 e t, $\widehat{\omega}(s, \widehat{\gamma}(v, x))$ esteja definido. Mostrar que se tem então $\widehat{\omega}(s, \widehat{\gamma}(t, x)) = \widehat{\gamma}(t, \widehat{\omega}(s, x))$, em particular que este segundo membro está bem definido. **Sugestão:** Utilizar a alínea b) do exercício IV.36 para verificar que a aplicação $f(v) = \widehat{\omega}(s, \widehat{\gamma}(v, x))$ é uma curva integral de Y com a condição inicial $f(0) = \widehat{\omega}(s, x)$.

Ex IV.38 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, com dimensão m. Dada uma *parametrização* $\varphi: V \to U$ de M, isto é, um difeomorfismo, com V aberto num espaço vectorial F de dimensão m e U aberto de M, e fixada uma base $w_1, \ldots, w_m$ de F, podem-se considerar então os campos vectoriais $W_1, \ldots, W_m: U \to E$, definidos pela condição de cada campo vectorial de valor constante w_i sobre V ser φ-relacionado com W_i (cf. III.7.3). Diz-se então que os W_i são os campos vectoriais sobre U, *associados à parametrização* φ *e à base escolhida em* F (no caso em que $F = \mathbb{R}^m$ e a base é a canónica, é frequente utilizar a notação $\frac{\partial}{\partial x_i}$ para o campo vectorial W_i).

a) Nas condições anteriores, mostrar que se tem $[W_i, W_j] = 0$, quaisquer que sejam i e j, e que, para cada $x \in U$, os vectores $W_1(x), \ldots, W_m(x)$ constituem uma base de $T_x(M)$.

b) Sejam $Z_1, \ldots, Z_m: M \to E$ m campos vectoriais suaves, tais que, quaisquer que sejam i e j, $[Z_i, Z_j] = 0$. Seja $x \in M$ tal que os vectores $Z_i(x) \in T_x(M)$ constituam uma base de $T_x(M)$. Dado um espaço vectorial F, de dimensão m, com uma base fixada $w_1, \ldots, w_m$, mostrar que existe um aberto V de F, com $0 \in V$, um aberto U de M, com $x \in U$, e um difeomorfismo $\varphi: V \to U$, tal que $\varphi(0) = x$ e que as restrições dos Z_i a U sejam os campos vectoriais associados à parametrizção φ e à base fixada em F.

Ex IV.39 Verificar que a condição de integrabilidade da versão geométrica do teorema de Frobenius (cf. IV.9.3) encontra-se automaticamente verificada, no caso em que o fibrado vectorial $\underline{E}$ tem dimensão 1.

Ex IV.40 **(Generalização das alínea b) do exercício IV.38)** Sejam $M \subset E$ uma variedade sem bordo, com dimensão m, $k \leq m$ e $Z_1, \ldots, Z_k: M \to E$ k campos vectoriais suaves, tais que, quaisquer que sejam i e j, $[Z_i, Z_j] = 0$. Seja $x_0 \in M$, tal que os vectores $Z_i(x_0) \in T_{x_0}(M)$ sejam linearmente independentes. Mostrar que existe um aberto V de $\mathbb{R}^m$, com $0 \in V$, um aberto U de X, com $x_0 \in U$, e uma parametrização $\varphi: V \to U$, com $\varphi(0) = x_0$, de modo que as restrições dos Z_i a U sejam os primeiros k campos vectoriais $\frac{\partial}{\partial x_i}$ associados à parametrização φ. **Sugestão:** Notar G um complementar algébrico em $T_{x_0}(M)$ do subespaço vectorial gerado pelos $Z_i(x_0)$, com $1 \le i \le k$. Por um processo semelhante ao utilizado na parte 4) da demonstração de IV.9.9, mostrar que se pode considerar um aberto W' de $\mathbb{R}^{m-k}$, com $0 \in W'$, e uma aplicação suave $g \colon W' \to M$, tal que $g(0) = x_0$ e que Dg_0 seja um isomorfismo de $\mathbb{R}^{m-k}$ sobre G. Utilizar IV.8.7 para garantir a existência de um aberto W de $\mathbb{R}^k$, com $0 \in W$, de um aberto $\widehat{W}'$ de $\mathbb{R}^{m-k}$, com $0 \in \widehat{W}' \subset W'$, e de uma aplicação suave $\overline{\varphi} \colon W \times \widehat{W}' \to M$ tal que, para cada $h \in \widehat{W}'$, a aplicação $y \mapsto \overline{\varphi}(y, z)$ tome o valor $g(z)$ para $y = 0$ e, para cada $i \le k$, tenha derivada na direcção de e_i igual a $Z_i(\overline{\varphi}(y, z))$. Mostrar, em seguida, que a derivada de $\overline{\varphi}$ em $(0, 0)$ é um isomorfismo.

CAPÍTULO V
Aplicações Geométricas das Equações Diferenciais

§1. Transporte paralelo.

Definimos na secção III.6 as secções paralelas de um fibrado vectorial, com as fibras contidas num espaço euclidiano ou hermitiano, como sendo aquelas cuja derivada covariante é identicamente nula e dissemos que essas secções podiam ser olhadas intuitivamente como jogando o msmo papel que as secções localmente constantes dos fibrados vectoriais constantes. Ficou então em aberto a questão de sabermos em que condições é que, dado um vector numa das fibras, podemos garantir a existência de uma secção paralela tomando esse valor na fibra em questão. O resultado que segue vai responder a essa questão para os fibrados vectoriais cuja base é um intervalo de $\mathbb{R}$.

V.1.1 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_t)_{t \in J}$ um fibrado vectorial, com $E_t \subset E$. Dados $a \in J$ e $w \in E_a$, existe então uma, e uma só, secção paralela $W = (W_t)_{t \in J}$ de $\underline{E}$, tal que $W_a = w$.

Dem: Podemos evidentemente afastar já o caso trivial em que $J = \{a\}$. Dizer que uma secção suave $W = (W_t)_{t \in J}$ de $\underline{E}$ é paralela é dizer que, para cada $t \in J$, $\nabla W_t = 0$ ou ainda, uma vez que $T_t(J) = \mathbb{R}$, que

$$0 = \nabla W_t(1) = DW_t(1) - h_t(1, W_t) = DW_t(1) - D\pi_t(1)(W_t),$$

onde $\pi_t \colon E \to E_t$ é a projecção ortogonal e h_t é a segunda forma fundamental. Por outras palavras, considerando a derivada $\pi' = (\pi'_t)_{t \in J}$, que é uma aplicação suave de J em $L(E; E)$, a secção suave W de $\underline{E}$ é paralela se, e só se, considerada como aplicação suave de J em E, verifica a equação diferencial linear $W'_t = \pi'_t(W_t)$. O teorema de existência e unicidade de solução para equações diferenciais lineares (IV.5.3) garante a existência e unicidade de uma aplicação suave W de J em E, verificando $W'_t = \pi'_t(W_t)$ e a condição inicial $W_a = w$. Ficou portanto já provada a afirmação de unicidade no enunciado e tudo o que temos que ver é que a aplicação W é uma secção de $\underline{E}$, isto é, que verifica $W_t \in E_t$, para cada $t \in J$. Consideremos para isso a aplicação suave $Z = (Z_t)_{t \in J}$ de J em E, definida por $Z_t = W_t - \pi_t(W_t)$. Trata-se de uma secção suave do fibrado vectorial $\underline{E}^{\perp} = (E_t^{\perp})_{t \in J}$, visto que Z_t é a projecção ortogonal de W_t sobre $E_t^{\perp}$.

Tem-se

$$Z'_t = W'_t - \pi'_t(W_t) - \pi_t(W'_t) = -\pi_t(W'_t) \in E_t$$

pelo que, uma vez que $\nabla Z_t(1)$ é a projecção ortogonal de Z'_t sobre a fibra $E_t^\perp$, concluímos que $\nabla Z_t(1) = 0$ e portanto que Z é uma secção paralela do fibrado vectorial $\underline{E}^\perp$. Uma vez que $Z_a = w - \pi_a(w) = 0$, a parte de unicidade já demonstrada implica que a secção Z é identicamente nula, portanto, para cada $t \in J$, $W_t = \pi_t(W_t) \in E_t$. □

O resultado precedente, sobre fibrados vectoriais cuja base é um intervalo de $\mathbb{R}$ não é válido para fibrados vectoriais arbitrários, como reconhecemos imediatamente se nos lembrarmos do que vimos em III.6.12 (é claro que, para fibrados cuja base é um intervalo de $\mathbb{R}$, o tensor de curvatura é identicamente nulo, o que tinha aliás já sido visto em III.6.2). Vamos agora verificar que, quando a base é uma variedade conexa, pode-se aproveitar o resultado anterior para a conclusão de unicidade.

V.1.2 Sejam $M \subset G$ uma variedade conexa, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Sejam W e Z duas secções paralelas de $\underline{E}$, tais que, para um certo $x_0 \in M$, $W_{x_0} = Z_{x_0}$. Tem-se então $W = Z$.

Dem: Seja $x \in M$ arbitrário. Tendo em conta II.6.23, podemos considerar uma aplicação suave $f\colon [0,1] \to M$, tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = x$. Considerando então o fibrado vectorial $f^*\underline{E} = (E_{f(t)})_{t\in[0,1]}$, cuja base é o intervalo $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, deduzimos imediatamente de III.3.5 que f^*W e f^*Z são duas secções paralelas de $f^*\underline{E}$, que verificam

$$(f^*W)_0 = W_{x_0} = Z_{x_0} = (f^*Z)_0,$$

o que, pelo resultado precedente, implica que $f^*W = f^*Z$, em particular,

$$W_x = (f^*W)_1 = (f^*Z)_1 = Z_x.$$

Concluímos assim, tendo em conta a arbitrariedade de x, que $W = Z$. □

V.1.3 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_t)_{t\in J}$ um fibrado vectorial, com $E_t \subset E$. Dados a e b em J tem então lugar um isomorfismo ortogonal $\xi_{b,a}\colon E_a \to E_b$, definido por $\xi_{b,a}(w) = W_b$, onde $W = (W_t)_{t\in J}$ é a única secção paralela de $\underline{E}$, que verifica $W_a = w$. Dizemos então que $\xi_{b,a}(w)$ é o vector de E_b obtido por *transporte paralelo* a partir do vector $w \in E_a$. Tem-se que $\xi_{a,a}\colon E_a \to E_a$ é a aplicação identidade e, dados $a, b, c \in J$, $\xi_{c,b} \circ \xi_{b,a} = \xi_{c,a}$; em particular $\xi_{a,b}$ é o isomorfismo inverso de $\xi_{b,a}$.

Dem: O facto de a aplicação $\xi_{b,a}$ ser linear é uma consequência de que, tendo em conta a alínea a) de III.3.4, a soma de secções paralelas é uma secção paralela e o produto de uma constante por uma secção paralela é uma secção paralela. Tendo em conta a alínea c) de III.3.4, dados $w, \widehat{w} \in E_a$ e as correspondentes secções paralelas W e $\widehat{W}$ de $\underline{E}$, que verificam $W_a = w$ e $\widehat{W}_a = \widehat{w}$, tem-se que a aplicação suave de J em $\mathbb{R}$, que a t associa $\langle W_t, \widehat{W}_t \rangle$, tem derivada identicamente nula e é portanto constante; em particular

$$\langle \xi_{b,a}(w), \xi_{b,a}(\widehat{w}) \rangle = \langle W_b, \widehat{W}_b \rangle = \langle W_a, \widehat{W}_a \rangle = \langle w, \widehat{w} \rangle,$$

o que mostra que a aplicação linear $\xi_{b,a}$ é ortogonal. O facto de $\xi_{a,a}$ ser a identidade de E_a é imediato, assim como o é o de se ter $\xi_{c,b} \circ \xi_{b,a} = \xi_{c,a}$ e deduzimos daqui que $\xi_{a,b} \circ \xi_{b,a}$ é a identidade de E_a e que $\xi_{b,a} \circ \xi_{a,b}$ é a identidade de E_b, o que mostra que a aplicação linear $\xi_{b,a}$ é um isomorfismo, tendo $\xi_{a,b}$ como isomorfismo inverso. □

V.1.4 **(Corolário)** Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\underline{E} = (E_t)_{t \in J}$ um fibrado vectorial, com $E_t \subset E$. Tem-se então que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial.
Dem: Fixemos um produto interno no espaço ambiente E das fibras de $\underline{E}$. Fixemos $a \in J$ e uma base $w_1, \ldots, w_n$ de E_a. Sejam $W_1, \ldots, W_n$ as secções paralelas de $\underline{E}$, que verificam $W_{j\,a} = w_j$. Para cada $t \in J$, tem-se $W_{j\,t} = \xi_{t,a}(w_j)$, pelo que $W_{1\,t}, \ldots, W_{n\,t}$ é uma base de E_t, o que mostra que $W_1, \ldots, W_n$ é um campo de referenciais de $\underline{E}$. □

No caso em que a base do fibrado vectorial não é um intervalo de $\mathbb{R}$, deixamos de ter transportes paralelos entre as diferentes fibras e a única coisa que conseguimos obter é uma noção de transporte paralelo ao longo de um caminho.

V.1.5 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Sejam $x_0, x \in A$ tais que existam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e uma aplicação suave $f\colon [a,b] \to A$, com $f(a) = x_0$ e $f(b) = x$ (um *caminho* de x_0 para x). Tem então lugar um isomorfismo ortogonal $\xi\colon E_{x_0} \to E_x$, chamado *transporte paralelo ao longo do caminho* f, que é, por definição, o isomorfismo de transporte paralelo $\xi_{b,a}$ do fibrado vectorial $f^*\underline{E}$, de base $[a,b]$ (reparar que as fibras deste fibrado vectorial em a e b são respectivamente E_{x_0} e E_x).

Em geral, nas condições anteriores, o isomorfismo $\xi\colon E_{x_0} \to E_x$ depende do caminho f de x_0 para x e não apenas dos pontos x_0 e x. Há no entanto um caso em que podemos garantir a independência do caminho:

V.1.6 Sejam $A \subset G$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in A}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Sejam $x_0 \in A$ e $w \in E_{x_0}$, tais que exista uma secção paralela W de $\underline{E}$, com $W_{x_0} = w$. Dado $x \in A$ tal que exista uma aplicação suave $f\colon [a,b] \to A$ com $f(a) = x_0$ e $f(b) = x$, o vector de E_x obtido a partir de $w \in E_{x_0}$ por transporte paralelo ao longo de f é igual a

W_x, não dependendo portanto do caminho f.
Dem: Basta atender a que, por III.3.5, f^*W é uma secção paralela de $f^*\underline{E}$. □

§2. Consequências da nulidade do tensor de curvatura.

Viu-se em III.6.12 que a não nulidade do tensor de curvatura é uma obstrução à existência de secções paralelas de um fibrado vectorial com valores prefixados arbitrários numa das fibras. É claro que, uma vez que, se U é um aberto da base M de $\underline{E}$, para cada $x \in U$ o tensor de curvatura da restrição $\underline{E}_{/U}$ no ponto x coincide trivialmente com o de $\underline{E}$, vemos que a não nulidade do tensor de curvatura é também uma obstrução à existência de secções paralelas locais. Vamos demonstrar que, no caso em que a base M é uma variedade sem bordo, a não nulidade referida é a única obstrução à existência de secções paralelas locais, começando por tratar um caso particular em que podemos garantir mesmo a existência de secções paralelas globais.

V.2.1 **(Lema)** Sejam $U \subset G$ um aberto estrelado relativamente ao ponto $x_0 \in U$, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in U}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, tal que, para cada $x \in U$, o tensor de curvatura $R_x \colon G \times G \times E_x \to E_x$ seja identicamente nulo. Para cada $w \in E_{x_0}$, existe então uma secção paralela W de $\underline{E}$, tal que $W_{x_0} = w$.
Dem: Consideremos o subconjunto $\underline{E}$ de $U \times E$, formado pelos pares (x, z), com $x \in U$ e $z \in E_x$, conjunto que, por III.1.27, sabemos ser uma variedade sem bordo. Seja $X \colon \underline{E} \to L(G; G \times E)$ a aplicação suave definida por

$$X_{(x,z)}(u) = (u, h_x(u, z)) = (u, D\pi_x(u)(z)).$$

Vamos olhar para X como definindo uma equação diferencial total, em que G é o espaço da *variável temporal* e $\underline{E}$ é a variedade. Trata-se portanto de uma equação diferencial total *independente do tempo*. Tendo em conta a propriedade da segunda forma fundamental enunciada na alínea c) de III.3.19, sabemos que, para cada $(x, z) \in \underline{E}$ e cada $u \in G$, tem-se $X_{(x,z)}(u) \in T_{(x,z)}(\underline{E})$, o que mostra que a condição a) do teorema de Frobenius em IV.8.5 está verificada. Quanto à condição b) desse teorema, vemos que

$$DX_{(x,z)}(X_{(x,z)}(v))(u) = (0, D^2\pi_x(v, u)(z) + D\pi_x(u)(h_x(v, z))),$$

e a simetria desta expressão, em u e v, vai resultar do anulamento de R_x, tendo em conta a definição deste tensor em III.6.1, e do facto de $D^2\pi_x$ ser uma aplicação bilinear simétrica. O teorema de Frobenius garante-nos então a existência de um aberto V de G, estrelado relativamente a x_0, e de uma aplicação $f \colon V \to \underline{E}$, tal que $f(x_0) = (x_0, w)$ e que, para cada $x \in V$,

$Df_x = X_{f(x)}$. Resulta então de IV.8.7, ou, directamente, por indução a partir da equação diferencial total, que f é uma aplicação suave. Consideremos agora as aplicações suaves $g: V \to G$ e $W: V \to E$, definidas por $f(x) = (g(x), W(x))$. Tem-se $g(x_0) = x_0$ e $Dg_x(u) = u$, portanto, por V ser conexo, $g(x) = x$, para cada $x \in V$, o que implica, em particular, que $V \subset U$ e que W é uma secção de $\underline{E}_{/V}$. Vemos agora que $W_{x_0} = w$ e que $DW_x(u) = h_x(u, w)$, o que, tendo em conta a caracterização da derivada covariante em III.3.14, mostra que W é uma secção paralela de $\underline{E}_{/V}$.[100] Para terminar a demonstração basta mostrar que se pode tomar $V = U$. Reparemos que o teorema de Frobenius diz-nos que se pode tomar para V o conjunto dos $x \in G$ tais que exista uma aplicação $\varphi: [0,1] \to \underline{E}$ com $\varphi(0) = (x_0, w)$ e $\varphi'(s) = X_{\varphi(s)}(x - x_0)$. Seja então $x \in U$ arbitrário. Sendo $\alpha: [0,1] \to U$ a aplicação suave definida por $\alpha(s) = (1-s)x_0 + sx$, concluímos a partir de V.1.1 a existência de uma secção suave $\widehat{W}$ de $\alpha^*\underline{E}$, que seja paralela e verifique $\widehat{W}_0 = w$. De

$$0 = \nabla\widehat{W}_s(1) = \widehat{W}'_s - D\pi_{\alpha(s)}(\alpha'(s))(\widehat{W}_s),$$

concluímos que

$$\widehat{W}'_s = D\pi_{\alpha(s)}(x - x_0)(\widehat{W}_s)$$

pelo que, sendo $\varphi: [0,1] \to \underline{E}$ a aplicação suave definida por $\varphi(s) = (\alpha(s), \widehat{W}_s)$, sai $\varphi(0) = (x_0, w)$ e

$$\varphi'(s) = (x - x_0, D\pi_{\alpha(s)}(x - x_0)(\widehat{W}_s)) = X_{\varphi(s)}(x - x_0),$$

o que mostra que $x \in V$. □

V.2.2 Sejam $M \subset G$ uma variedade sem bordo, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, tal que, para cada $x \in M$, o tensor de curvatura

$$R_x: T_x(M) \times T_x(M) \times E_x \to E_x$$

seja identicamente nulo. Para cada $x_0 \in M$ e $w \in E_{x_0}$, existe então um aberto V de M, com $x_0 \in V$, e uma secção suave paralela $W = (W_x)_{x \in V}$ de $\underline{E}_{/V}$, tal que $W_{x_0} = w$.

Dem: Sejam F um espaço vectorial de dimensão finita, U um aberto de F, com $0 \in U$, V um aberto de M, com $x_0 \in V$ e $\varphi: U \to V$ um difeomorfismo com $\varphi(0) = x_0$. Se necessário subsituindo U e V por abertos mais pequenos e φ pela sua restrição, podemos já supor que U é uma bola aberta de centro 0, portanto estrelado relativamente a 0. Tendo em conta III.6.8, o fibrado vectorial imagem recíproca $\varphi^*\underline{E}$ tem em cada ponto tensor de curvatura identi-

[100] Se apenas pretendêssemos a existência de uma secção paralela local, o que seria suficiente para o resultado a seguir, a demonstração poderia terminar aqui.

camente nulo pelo que podemos aplicar o lema anterior para garantir a existência de uma secção paralela $\widehat{W}$ de $\varphi^*\underline{E}$, verificando $\widehat{W}_0 = w$. Tendo em conta III.3.5, vemos agora que a secção W de $\underline{E}_{/V}$, imagem recíproca de $\widehat{W}$ por $\varphi^{-1}: V \to U$, é paralela e toma em x_0 o valor w. □

Repare-se que a nulidade da curvatura não permite em geral garantir a existência de uma secção global paralela, com valor prefixado numa fibra. Um contra-exemplo natural é o do fibrado vectorial de Möbius, estudado em III.2.13. Uma vez que se trata de um fibrado vectorial de dimensão 1, o seu tensor de curvatura em cada ponto é identicamente nulo. Dado um vector não nulo numa das fibras, não pode haver nenhuma secção global paralela, tomando nessa fibra o valor dado visto que uma tal secção seria não nula em cada ponto (cf. o exercício III.49) e portanto constituiria um campo de referenciais, o que contraria o facto de este fibrado vectorial ser não orientável, e portanto não trivial. Estudaremos nos exercícios, no fim do capítulo, alguns casos, mais gerais do que a situação do lema V.2.1, em que conseguimos garantir a existência global de uma secção paralela, com um valor prefixado numa fibra.

Um segundo resultado, dentro do mesmo espírito que o resultado precedente, tem a ver com a conclusão que podemos tirar da nulidade do tensor de curvatura do fibrado tangente a uma variedade. Comecemos por notar que, se E é um espaço euclidiano e se $M \subset E$ é uma variedade tal que exista um aberto U dum espaço euclidiano G e um difeomorfismo isométrico $\varphi: U \to M$, então, para cada $x \in M$, o tensor de curvatura $R_x: T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)$ de M é identicamente nulo. Esta conclusão é, com efeito, uma consequência da fórmula de invariância do tensor de curvatura, estabelecida em III.7.9, se repararmos que $T(U)$ é um fibrado vectorial constante e tem portanto tensor de curvatura identicamente nulo. O teorema de Riemann, que demonstramos em seguida, diz-nos que, reciprocamente, uma variedade sem bordo com tensor de curvatura nulo em cada ponto é localmente isométrica a um aberto dum espaço euclidiano (a circunferência é um contra-exemplo simples que mostra que a palavra "localmente" é essencial na frase anterior).

V.2.3 **(Teorema de Riemann)** Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo tal que, para cada $x \in M$, o tensor de curvatura $R_x: T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \to T_x(M)$ seja identicamente nulo. Para cada $x_0 \in M$, onde M tenha dimensão n, existe então um aberto U de M, com $x_0 \in U$, um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in V$, e um difeomorfismo isométrico $f: V \to U$, tal que $f(0) = x_0$.

Dem: Fixemos uma base ortonormada $w_1, \ldots, w_n$ de $T_{x_0}(M)$. Tendo em conta a propriedade precedente, podemos considerar um aberto $\tilde{U}$ de M, com $x_0 \in \tilde{U}$, tal que, para cada $1 \le j \le n$, exista uma secção paralela W_j de $T(M)_{/\tilde{U}}$, com $W_{j\,x_0} = w_j$ (em princípio teríamos um aberto $\tilde{U}_j$ para cada j, mas podemos tomar para $\tilde{U}$ a intersecção dos $\tilde{U}_j$). Se necessário substituindo

$\tilde{U}$ por um aberto mais pequeno, podemos já supor que $\tilde{U}$ é conexo e que a dimensão de M em cada ponto de $\tilde{U}$ é n. Tendo em conta a alínea c) de III.3.4, vemos que, quaisquer que sejam $1 \leq i, j \leq n$, a aplicação de $\tilde{U}$ em $\mathbb{R}$, que a x associa $\langle W_{ix}, W_{jx} \rangle$ tem derivada identicamente nula, sendo portanto constante, o que mostra que, para cada $x \in \tilde{U}$, $W_{1x}, \ldots, W_{nx}$ é um sistema ortonormado, logo uma base ortonormada de $T_x(M)$.
Seja $X = (X_x)_{x \in \tilde{U}}$ a aplicação suave de $\tilde{U}$ em $L(\mathbb{R}^n; G)$ definida por $X_x(e_j) = W_{jx}$. Uma vez que X_x aplica os elementos da base canónica de $\mathbb{R}^n$ nos elementos de uma base ortonormada de $T_x(M)$, concluímos que X_x é um isomorfismo ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $T_x(M)$. Para podermos aplicar o teorema de Frobenius (cf. IV.8.5), temos que ver que, para cada $x \in \tilde{U}$, é simétrica a aplicação bilinear de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em G, definida por

$$(w, \tilde{w}) \mapsto DX_x(X_x(w))(\tilde{w})$$

(reparar que temos uma equação diferencial total independente do *tempo*). Para isso, e uma vez que duas aplicações lineares, que coincidam nos elementos de uma base, coincidem, basta-nos verificar que

$$DX_x(X_x(e_i))(\tilde{w}) = DX_x(X_x(\tilde{w}))(e_i),$$

ou ainda, que

$$DX_x(X_x(e_i))(e_j) = DX_x(X_x(e_j))(e_i),$$

condição que é equivalente a $DW_{jx}(W_{ix}) = DW_{ix}(W_{jx})$. O facto de esta condição ser verificada é agora uma consequência de que, tendo em conta III.3.24 e o paralelismo das secções W_j, podemos escrever

$$\begin{aligned} DW_{jx}(W_{ix}) - DW_{ix}(W_{jx}) &= [W_i, W_j]_x = \\ &= \nabla W_{jx}(W_{ix}) - \nabla W_{ix}(W_{jx}) = 0 \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Frobenius, concluímos agora a existência de um aberto $\tilde{V}$ de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in \tilde{V}$, e de uma aplicação suave $\tilde{f}\colon \tilde{V} \to \tilde{U}$, tal que $\tilde{f}(0) = x_0$ e que, para cada $y \in \tilde{V}$, $D\tilde{f}_y = X_{\tilde{f}(y)}$, em particular, cada $D\tilde{f}_y$ é um isomorfismo ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $T_{\tilde{f}(y)}(M)$. Podemos agora aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in V \subset \tilde{V}$, tal que a restrição f de $\tilde{f}$ a V seja um difeomorfismo de V sobre um aberto U de M, difeomorfismo esse que, pelo que acabámos de ver, vai ser uma isometria. □

§3. Geodésicas e aplicação exponencial.

V.3.1 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade. Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial (isto é, com mais que um elemento) e $f\colon J \to M$

uma aplicação suave, que pode ser olhada como descrevendo um *movimento* na variedade M. Para cada $t \in J$ podemos então considerar o *vector velocidade* de f no instante[101] t,

$$f'(t) = Df_t(1) \in T_{f(t)}(M),$$

pelo que ficamos com uma secção suave $f' = (f'(t))_{t \in J}$ do fibrado vectorial $f^*T(M)$, de base J. Para cada $t \in J$, define-se a *aceleração intrínseca* de f no instante t como sendo o vector

$$(\frac{\delta f'}{\delta t})_t = \nabla f'_t(1) \in T_{f(t)}(M).$$[102]

Tendo em conta as caracterizações conhecidas da derivada covariante, podemos assim escrever

(A) $$(\frac{\delta f'}{\delta t})_t = \pi_{f(t)}(f''(t)),$$

(B) $$(\frac{\delta f'}{\delta t})_t = f''(t) - \widehat{h}_t(1, f'(t)),$$

onde $\pi_{f(t)}$ é a projecção ortogonal de G sobre $T_{f(t)}(M)$ e $\widehat{h}_t$ é a segunda forma fundamental do fibrado vectorial imagem recíproca $f^*T(M)$. Por outro lado, tendo em conta III.3.13, vem

$$\widehat{h}_t(u, w) = h_{f(t)}(Df_t(u), w),$$

onde $h_{f(t)}$ é a segunda forma fundamental de $T(M)$, o que nos permite obter uma terceira caracterização da aceleração intrínseca:

(C) $$(\frac{\delta f'}{\delta t})_t = f''(t) - h_{f(t)}(f'(t), f'(t)).$$

Uma quarta caracterização da aceleração intrínseca envolve a Hessiana

$$\beta(f)_t \colon \mathbb{R}_J \times \mathbb{R}_J \to f^*T(M)$$

(cf. III.8.29). Se repararmos que a aplicação $J \to \mathbb{R}$ de valor constante 1 é uma secção paralela de $\mathbb{R}_J$, concluímos que

(D) $$(\frac{\delta f'}{\delta t})_t = \nabla Df_t(1)(1) = \beta(f)_t(1, 1).$$

[101]O termo *instante* é aplicado para apoiar a interpretação cinemática do que estamos a discutir.
[102]A aceleração usual é o vector $f''(t) \in E$, que, em geral, não pertence a $T_{f(t)}(M)$, pelo que não apresenta grande interesse do ponto de vista da geometria de M.

V.3.2 Sejam G um espaço euclidiano, $M \subset G$ uma variedade, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f: J \to M$ uma aplicação suave. Diz-se que f é uma *geodésica* se é paralela a secção f' de $f^*T(M)$ (o *campo de velocidades*). Uma vez que $\nabla f'_t$ é uma aplicação linear de $\mathbb{R}$ em $T_{f(t)}(M)$, ela vai-se anular se, e só se, tomar o valor 0 quando aplicada a $1 \in \mathbb{R}$, por outras palavras, f é uma geodésica se, e só se, a aceleração intrínseca é identicamente nula.[103] Tendo em conta o que se disse atrás, vemos que o facto de f ser uma geodésica é equivalente a qualquer das duas condições seguintes:
a) $f''(t)$ é ortogonal a $T_{f(t)}(M)$, para cada $t \in J$;
b) $f''(t) = h_{f(t)}(f'(t), f'(t))$, para cada $t \in J$.
c) f é uma aplicação paralela.

V.3.3 No caso em que o fibrado vectorial $T(M)$ é constante (é o que acontece, por exemplo, se a variedade M é um aberto do espaço vectorial ambiente G), para cada aplicação suave $f: J \to M$ o fibrado vectorial $f^*T(M)$ é também um fibrado vectorial constante, pelo que a derivada covariante de secções de $f^*T(M)$ coincide com a derivada usual, o que implica, em particular, que a aceleração intrínseca coincide com com a aceleração usual, $f''(t)$. As geodésicas $f: J \to M$ são assim as aplicações suaves que verificam $f''(t) = 0$, para cada t, ou seja, $f'(t) = w \in G$, isto é, as aplicações da forma

$$f(t) = x + tw.$$

Dito de outro modo, as geodésicas são, neste caso, os segmentos de recta contidos em M, descritos com velocidade uniforme.

V.3.4 Sejam G um espaço euclidiano, $M \subset G$ uma variedade, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f: J \to M$ uma aplicação suave. Diz-se que f é uma *aplicação uniforme* (ou que f descreve um movimento uniforme) se for constante a aplicação de J em $\mathbb{R}$, que a t associa a *velocidade escalar*, isto é, a norma $\|f'(t)\|$ do vector velocidade. Nessas condições:
a) Se f é uma geodésica então f é uniforme;
b) Se f é uniforme e a variedade M tem dimensão 1, então f é uma geodésica.
Dem: Seja $\varphi: J \to \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por

$$\varphi(t) = \|f'(t)\|^2 = \langle f'(t), f'(t)\rangle.$$

Supondo que f é uma geodésica, obtemos, tendo em conta a alínea c) de III.3.4,

$$\varphi'(t) = \langle (\frac{\delta f'}{\delta t})_t, f'(t)\rangle + \langle f'(t), (\frac{\delta f'}{\delta t})_t\rangle = 0,$$

[103] Dentro do espírito das observações feitas imediatamente antes de III.6.10, as geodésicas podem ser olhadas intuitivamente como os movimentos em que o vector velocidade é tão constante quanto possível.

o que mostra que φ é uma aplicação constante, ou seja, f é uma aplicação uniforme. Suponhamos, reciprocamente, que M é uma variedade de dimensão 1 e que f é uma aplicação uniforme. Se o valor constante de $\|f'(t)\|$ é 0, tem-se $f'(t) = 0$, para cada t, pelo que f é trivialmente uma geodésica. Se este valor constante for distinto de 0, tem-se que, para cada $t \in J$, $f'(t)$ é um vector não nulo de $T_{f(t)}(M)$, e portanto uma base deste espaço e obtemos, como anteriormente,

$$0 = \varphi'(t) = 2\langle (\frac{\delta f'}{\delta t})_t, f'(t)\rangle,$$

pelo que $(\frac{\delta f'}{\delta t})_t$ é um vector de $T_{f(t)}(M)$ ortogonal à base $f'(t)$ deste espaço, o que implica que aquele vector é 0 e f é uma geodésica. □

V.3.5 **(Exemplo)** Sejam E um espaço euclidiano e $S \subset E$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1,

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\},$$

que sabemos ser uma variedade sem bordo, com dimensão inferior em uma unidade à de E. Suponhamos que $x \in S$ e que $w \in T_x(S)$ verifica $\|w\| = 1$. Uma vez que se tem $\langle w, x\rangle = 0$, podemos considerar uma aplicação suave $f\colon \mathbb{R} \to S$, definida por

$$f(t) = \cos(t)x + \sin(t)w.$$

Derivando duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\sin(t)x + \cos(t)w,\\ f''(t) &= -\cos(t)x - \sin(t)w = -f(t), \end{aligned}$$

o que mostra que $f''(t)$ é ortogonal a $T_{f(t)}(S)$. Podemos concluir assim que a aplicação f é uma geodésica da variedade S. Repare-se que esta geodésica verifica as condições $f(0) = x$ e $f'(0) = w$. No caso particular em que E tem dimensão 3, e portanto S é a superfície esférica usual, é fácil constatar que a geodésica f precorre um círculo máximo de S (a intersecção de S com um plano passando pelo centro).

V.3.6 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo. Vimos em III.1.27 que o espaço total do fibrado vectorial tangente $T(M) \subset M \times G$ é também uma variedade sem bordo e, tendo em conta a alínea c) de III.3.19, vai ter lugar um campo vectorial X sobre esta variedade, definido por

$$X_{(x,w)} = (w, h_x(w,w)),$$

campo vectorial que é suave, tendo em conta a fórmula

$$h_x(w,w) = D\pi_x(w)(w).$$

Vamos dizer que X é o *campo vectorial geodésico* sobre $T(M)$.

V.3.7 Nas condições anteriores, se $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não trivial e se $f: J \to M$ é uma aplicação suave, então podemos considerar uma aplicação suave $\widehat{f}: J \to T(M)$ (o *levantamento canónico* de f), definida por

$$\widehat{f}(t) = (f(t), f'(t)),$$

e f vai ser uma geodésica se, e só se, $\widehat{f}$ for uma curva integral do campo vectorial geodésico. Além disso, toda a curva integral do campo vectorial geodésico, definida num intervalo não trivial, vai ser o levantamento canónico de uma geodésica de M.

Dem: Sendo $f: J \to M$ uma aplicação suave, sabemos que, para cada $t \in J$, $f'(t) = Df_t(1) \in T_{f(t)}(M)$, pelo que

$$\widehat{f}(t) = (f(t), f'(t)) \in T(M),$$

o que mostra que $\widehat{f}$ é uma aplicação suave de J em $T(M)$. Uma vez que $\widehat{f}'(t) = (f'(t), f''(t))$ e que

$$X_{\widehat{f}(t)} = (f'(t), h_{f(t)}(f'(t), f'(t))),$$

constatamos que a igualdade $\widehat{f}'(t) = X_{\widehat{f}(t)}$ é equivalente à igualdade $f''(t) = h_{f(t)}(f'(t), f'(t))$ ou seja, tendo em conta o que dissemos em V.3.2, ao facto de f ser uma geodésica. Resta-nos reparar que, se J é um intervalo não trivial e se $\widehat{f}: J \to T(M)$ é uma curva integral de X, podemos considerar as aplicações suaves $f: J \to M$ e $g: J \to G$, definidas por $\widehat{f}(t) = (f(t), g(t))$, e o facto de se ter

$$(f'(t), g'(t)) = \widehat{f}'(t) = X_{\widehat{f}(t)} = (g(t), h_{f(t)}(g(t), g(t)))$$

implica em particular que $g(t) = f'(t)$, portanto que $\widehat{f}$ é o levantamento canónico de f. □

V.3.8 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo. Dados $a \in \mathbb{R}$, $x \in M$ e $w \in T_x(M)$, vai existir um intervalo aberto J, com $a \in J$, e uma geodésica $f: J \to M$, verificando as *condições iniciais* $f(a) = x$ e $f'(a) = w$, e que é máxima, no sentido que qualquer outra geodésica, verificando aquelas condições iniciais, é uma restrição dela. Esta geodésica está definida pela condição de o seu levantamento canónico $\widehat{f}: J \to T(M)$ ser a curva integral máxima do campo vectorial geodésico X, sobre $T(M)$, com a condição inicial $\widehat{f}(a) = (x, w)$.

Dem: Trata-se de uma consequência imediata do resultado precedente, tendo em conta o facto de o domínio de uma curva integral máxima ser um conjunto aberto. □

V.3.9 **(Corolário)** Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo. Para cada $a \in \mathbb{R}$, $x \in M$ e $w \in T_x(M)$, seja $f_{a,x,w}: J_{a,x,w} \to M$ a geodésica máxima de M com as condições iniciais $f_{a,x,w}(a) = x$ e $f'_{a,x,w}(a) = w$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times T(M)$ o conjunto dos $(s, a, (x, w))$ tais que $s \in J_{a,x,w}$ e $\omega: \Omega \to M$ a aplicação definida por

$$\omega(s, a, (x, w)) = f_{a,x,w}(s)$$

(a *solução geral geodésica*). Então que Ω é aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times T(M)$ e ω é uma aplicação suave.

Dem: Trata-se de uma consequência imediata dos resultados correspondentes sobre a solução geral de equações diferenciais em variedades (cf. IV.6.1 e IV.7.3). □

Tal como em IV.1.12, e uma vez que a equação diferencial sobre $T(M)$ que define as geodésicas é uma equação diferencial independente do tempo, podemos resumir a informação dada pela solução geral geodésica numa aplicação com menos uma variável, a saber a aplicação suave $\widehat{\omega}: \widehat{\Omega} \to M$, definida por

$$\widehat{\omega}(s, (x, w)) = \omega(s, 0, (x, w)).$$

onde $\widehat{\Omega}$ é o aberto de $\mathbb{R} \times T(M)$ constituído pelos $(s, (x, w))$ tais que $(s, 0, (x, w)) \in \Omega$ (a $\widehat{\omega}$ costuma-se dar o nome de *fluxo geodésico*). De facto, e como vamos ver adiante, podemos neste caso resumir mais e concentrar toda a informação sobre a solução geral geodésica numa aplicação com ainda menos uma variável, a aplicação exponencial, que estará definida num aberto de $T(M)$.

V.3.10 Sejam G um espaço euclidiano, $M \subset G$ uma variedade, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo não trivial e $f: J \to M$ uma geodésica. Sejam $\tilde{J}$ um intervalo não trivial e $\varphi: \tilde{J} \to J$ uma aplicação suave. Tem-se então:

a) Se φ é *afim*, isto é, se existem a,$b \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi(s) = as + b$, então $f \circ \varphi: \tilde{J} \to M$ é uma geodésica;

b) Se f não é constante e se $f \circ \varphi: \tilde{J} \to M$ é também uma geodésica, então φ é uma aplicação afim.

Dem: Notando $\tilde{f} = f \circ \varphi$, tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'(s) &= \varphi'(s) f'(\varphi(s)), \\
\tilde{f}''(s) &= \varphi''(s) f'(\varphi(s)) + \varphi'(s)^2 f''(\varphi(s)).
\end{aligned}$$

O facto de f ser uma geodésica implica que $f''(\varphi(s))$ é ortogonal a $T_{f(\varphi(s))}(M) = T_{\tilde{f}(s)}(M)$. Concluímos daqui que, se φ é afim, vem $\varphi''(s) = 0$, o que implica que $\tilde{f}''(s)$ é também ortogonal a $T_{\tilde{f}(s)}(M)$ e portanto $\tilde{f}$ é também uma geodésica. Reciprocamente, se $\tilde{f}$ é uma geodésica e se a geodésica f não é constante, o facto de $f''(\varphi(s))$ e $\tilde{f}''(s)$ serem ortogonais a $T_{\tilde{f}(s)}(M)$ vai implicar que $\varphi''(s)f'(\varphi(s))$ é ortogonal a $T_{\tilde{f}(s)}(M)$ e portanto, uma vez que este vector pertence a $T_{\tilde{f}(s)}(M)$, $\varphi''(s)f'(\varphi(s)) = 0$; uma vez que se tem $f'(\varphi(s)) \neq 0$ (sem o que, tendo em conta V.3.4, era $f'(t) = 0$, para todo o t, e portanto f era constante) concluímos que $\varphi''(s) = 0$, de onde se deduz imediatamente que φ é uma aplicação afim. □

V.3.11 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo, e notemos $\omega: \Omega \to M$ a respectiva solução geral geodésica. Tem-se então:
a) Se $(x, w) \in T(M)$ e $a \in \mathbb{R}$, então $(a, a, (x, w)) \in \Omega$ e

$$\omega(a, a, (x, w)) = x.$$

b) Se $x \in M$ e $a, s \in \mathbb{R}$, então $(s, a, (x, 0)) \in \Omega$ e

$$\omega(s, a, (x, 0)) = x.$$

c) Sejam $(x, w) \in T(M)$ e $a, s \in \mathbb{R}$. Tem-se então que $(s, a, (x, w)) \in \Omega$ se, e só se, $(1, 0, (x, (s - a)w)) \in \Omega$ e, nesse caso,

$$\omega(s, a, (x, w)) = \omega(1, 0, (x, (s - a)w)).$$

Dem: A conclusão de a) resulta imediatamente da definição e a de b) do facto trivial que a aplicação f de valor constante x é uma geodésica verificando $f(a) = x$ e $f'(a) = 0$. Passemos portanto à demonstração de c). Suponhamos que $(s, a, (x, w)) \in \Omega$ e notemos $f: J \to M$ a geodésica máxima com as condições iniciais $f(a) = x$ e $f'(a) = w$. Tem-se assim $a, s \in J$, pelo que podemos considerar a aplicação afim $\varphi: [0, 1] \to J$, definida por $\varphi(t) = a + t(s - a)$. Tendo em conta o resultado precedente, $\tilde{f} = f \circ \varphi: [0, 1] \to M$ é também uma geodésica, que verifica as condições $\tilde{f}(0) = f(a) = x$ e $\tilde{f}'(0) = (s - a)w$, o que nos permite concluir que $(1, 0, (x, (s - a)w)) \in \Omega$ e que

$$\omega(1, 0, (x, (s - a)w)) = \tilde{f}(1) = f(s) = \omega(s, a, (x, w)).$$

Suponhamos, reciprocamente, que $(1, 0, (x, (s - a)w)) \in \Omega$. Temos que provar que $(s, a, (x, w)) \in \Omega$, para o que se pode já supor que $s \neq a$. Ora, sendo $f: [0, 1] \to M$ a geodésica que verifica $f(0) = x$ e $f'(0) = (s - a)w$, podemos notar J o intervalo de extremidades a e s e considerar a aplicação suave $\tilde{f}: J \to M$, definida por

$$\tilde{f}(t) = f(\frac{t - a}{s - a}),$$

aplicação que, tendo em conta o resultado precedente, é uma geodésica e verifica $\tilde{f}(a) = f(0) = x$ e $\tilde{f}'(a) = \frac{1}{s-a}\,f'(0) = w$, pelo que podemos concluir que $(s, a, (x, w)) \in \Omega$, o que termina a demonstração. □

V.3.12 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo e notemos $\omega\colon \Omega \to M$ a respectiva solução geral geodésica. Tem então lugar um subconjunto aberto $\mathcal{D}$ de $T(M)$, constituído pelos (x, w) tais que $(1, 0, (x, w)) \in \Omega$ e uma aplicação suave $\exp\colon \mathcal{D} \to M$, definida por

$$\exp(x, w) = \omega(1, 0, (x, w)),$$

a que se dá o nome de *aplicação exponencial* da variedade M.
Em consequência, para cada $x \in M$, tem lugar um aberto $\mathcal{D}_x$ de $T_x(M)$, constituído pelos w tais que $(x, w) \in \mathcal{D}$, e uma aplicação suave $\exp_x\colon \mathcal{D}_x \to M$, definida por $\exp_x(w) = \exp(x, w)$, a que se dá o nome de *aplicação exponencial* da variedade M *no ponto* x.

V.3.13 **(Reformulação de V.3.11)** Nas condições anteriores, tem-se:
a) Para cada $x \in M$, $(x, 0) \in \mathcal{D}$ e $\exp(x, 0) = x$;
b) Se $(x, w) \in T(M)$ e se $a, s \in \mathbb{R}$, tem-se $(s, a, (x, w)) \in \Omega$ se, e só se, $(x, (s - a)w) \in \mathcal{D}$ e, nesse caso,

$$\omega(s, a, (x, w)) = \exp(x, (s - a)w).$$

V.3.14 **(Exemplos) 1)** Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo, tal que $T(M)$ seja um fibrado vectorial constante (é o que acontece, por exemplo, no caso em que M é um aberto de G). Vimos em V.3.3 que as geodésicas $f\colon J \to M$ são as aplicações que se podem escrever na forma $f(s) = x + sw$. Reparando que, no caso em que $0 \in J$, uma tal geodésica verifica as condições $f(0) = x$ e $f'(0) = w$, concluímos que a aplicação exponencial de M, $\exp\colon \mathcal{D} \to M$ está definida por

$$\exp(x, w) = x + w,$$

o seu domínio $\mathcal{D}$ sendo o conjunto dos pares $(x, w) \in T(M)$ tais que $x + sw \in M$, para cada $s \in [0, 1]$.
2) Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$ e $S \subset E$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1,

$$S = \{x \in S \mid \|x\| = 1\}.$$

Vimos em V.3.5 que, se $x \in S$ e $w \in T_x(S)$ verifica $\|w\| = 1$, então a aplicação $f\colon \mathbb{R} \to S$ definida por $f(t) = \cos(t)\,x + \sin(t)\,w$ é uma geodésica com $f(0) = x$ e $f'(0) = w$. Concluímos daqui que, se $w \in T_x(X)$ é não nulo, podemos considerar a geodésica $f\colon \mathbb{R} \to S$ definida por

$$f(t) = \cos(t)\,x + \sin(t)\,\frac{w}{\|w\|},$$

para a qual se tem $f(0) = x$ e $f'(0) = \frac{w}{\|w\|}$, e portanto também, por composição com uma aplicação afim, a geodésica g definida por

$$g(t) = \cos(t\|w\|)\,x + \sin(t\|w\|)\,\frac{w}{\|w\|},$$

para a qual se tem $g(0) = x$ e $g'(0) = w$. Concluímos daqui que a aplicação exponencial de S está definida na totalidade de $T(S)$ pela fórmula

$$\exp(x,w) = \begin{cases} x & \text{se } w = 0 \\ \cos(\|w\|)\,x + \frac{\sin(\|w\|)}{\|w\|}\,w & \text{se } w \neq 0 \end{cases}.$$

V.3.15 Nas condições de V.3.12, para cada $x \in M$, a derivada

$$D\exp_{(x,0)}: T_x(M) \times T_x(M) = T_{(x,0)}(T(M)) \to T_x(M)$$

está definida por

$$D\exp_{(x,0)}(u,v) = u + v.$$

Em consequência, a derivada $D(\exp_x)_0: T_x(M) \to T_x(M)$ está definida por $D(\exp_x)_0(v) = v$.

Dem: Uma vez que, para cada $x \in M$, $\exp(x,0) = x$, obtemos, por derivação, para cada $u \in T_x(M)$,

$$D\exp_{(x,0)}(u,0) = u.$$

Lembremos agora que, para cada $(x,v) \in \mathcal{D}$, tem lugar a geodésica $f: [0,1] \to M$, definida por

$$f(s) = \omega(s, 0, (x,v)) = \exp(x, sv),$$

geodésica que verifica $f(0) = x$ e $f'(0) = v$. Obtemos então, por derivação de ambos os membros da identidade $f(s) = \exp(x, sv)$ para $s = 0$,

$$v = f'(0) = D\exp_{(x,0)}(0,v).$$

Deduzimos agora, finalmente, que

$$D\exp_{(x,0)}(u,v) = D\exp_{(x,0)}(u,0) + D\exp_{(x,0)}(0,v) = u + v. \qquad \square$$

V.3.16 **(Corolário)** Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo. Para cada $x \in M$, existe então um aberto U de $T_x(M)$, com $0 \in U$, e um aberto V de M, com $x \in V$, tais que a restrição de $\exp_x$ seja um difeomorfismo de U sobre V.

Dem: Trata-se de uma consequência do teorema da função inversa, visto que a aplicação $\exp_x: \mathcal{D}_x \to M$, que aplica 0 em x, vai ter, no ponto 0, derivada $D(\exp_x)_0: T_x(M) \to T_x(M)$ igual à aplicação identidade, em particular um isomorfismo. $\square$

V.3.17 **(Nota)** Estudámos aqui as geodésicas como caminhos de aceleração intrínseca identicamente nula, na óptica de ilustrar uma utilização geométrica importante das equações diferenciais. As geodésicas aparecem também em relação com o estudo dos caminhos de comprimento mínimo unindo dois pontos, mas esse é um aspecto que, a ser estudado completamente, nos levaria demasiado longe. O leitor mais interessado poderá encontrar esse estudo em livros mais avançados sobre a Geometria Riemaniana (ver também os exercícios V.25 e V.26, no fim do capítulo). De uma maneira rápida, referimos que:
a) Se $f\colon [a,b] \to M$ é uma geodésica, então, embora f possa não ser um caminho de comprimento mínimo entre $f(a)$ e $f(b)$, pode-se mostrar a existência de $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $[c,d] \subset [a,b]$, com $d - c \leq \varepsilon$, a restrição de f a $[c,d]$ é um caminho de comprimento mínimo entre $f(c)$ e $f(d)$;
b) Se $f\colon [a,b] \to M$ é um caminho de comprimento mínimo entre $f(a)$ e $f(b)$, f pode não ser uma geodésica, mas é-o se for uniforme e, em qualquer caso é uma reparametrização de uma geodésica $g\colon [c,d] \to M$ (composição de g com uma aplicação suave $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$, com $\varphi(a) = c$ e $\varphi(b) = d$).

EXERCÍCIOS

Ex V.1 Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície esférica de centro 0 e raio 1,

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

que sabemos ser uma variedade sem bordo com dimensão 2 e consideremos o respectivo fibrado vectorial tangente $T(S)$. Sejam $f\colon [0,\pi] \to S$ e $g\colon [0.\pi] \to S$ as aplicações suaves definidas por

$$f(t) = (\sin(t), 0, \cos(t)),$$
$$g(t) = (0, \sin(t), \cos(t)),$$

aplicações que verificam $f(0) = g(0) = (0,0,1)$ e $f(\pi) = g(\pi) = (0,0,-1)$ (são dois caminhos do *polo Norte* para o *polo Sul*). Sendo $w = (0,1,0) \in T_{(0,0,1)}(S)$ e considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, mostrar que os vectores de $T_{(0,0,-1)}(S)$ obtidos por transporte paralelo de w ao longo dos caminhos f e g são respectivamente $(0,1,0)$ e $(0,-1,0)$, o que dá um exemplo em que estes vectores dependem do caminho utilizado para o transporte paralelo. **Sugestão:** Em vez de tentar resolver formalmente as equações diferenciais que definem as secções paralelas de $f^*T(S)$ e de $g^*T(S)$, intuir geometricamente quais vão ser essas secções e mostrar em seguida que elas vão ser efectivamente paralelas, utilizando a caracterização das derivadas covariantes como projecção ortogonal das derivadas usuais.

Ex V.2 Considerar a superfície cilíndrica $C \subset \mathbb{R}^3$,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, mostrar que, se $(x, y, z) \in C$ e se $(u, v, w) \in T_{(x,y,z)}(C)$, então existe uma secção paralela de $T(C)$, que em (x, y, z) toma o valor (u, v, w).

Ex V.3 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais que um elemento, E e F espaços euclidianos ou hermitianos, $\underline{E} = (E_t)_{t \in J}$ e $\underline{F} = (F_t)_{t \in J}$ fibrados vectoriais e $\lambda = (\lambda_t)_{t \in J} \colon \underline{E} \to \underline{F}$ um morfismo linear suave paralelo.
a) Sejam $W = (W_t)_{t \in J}$ uma secção suave paralela de $\underline{E}$ e $a, b \in J$. Mostrar que $W_a \in \ker(\lambda_a)$ se, e só se, $W_b \in \ker(\lambda_b)$. **Sugestão:** Reparar que $\lambda(W) = (\lambda_t(W_t))_{t \in J}$ é uma secção paralela de $\underline{F}$.
b) Sejam $a \in J$ e $w_1, \dots, w_n$ uma base de E_a tal que $w_1, \dots, w_p$ seja uma base de $\ker(\lambda_a)$ e sejam $W_1, \dots, W_n$ secções suaves paralelas de $\underline{E}$ tais que $W_{j_a} = w_j$ (cf. V.1.1). Mostrar que, para cada $t \in J$, $W_{1t}, \dots, W_{nt}$ é uma base de E_t, com $W_{1t}, \dots, W_{pt}$ base de $\ker(\lambda_t)$, e $\lambda_t(W_{p+1t}), \dots, \lambda_t(W_{nt})$ base de $\lambda_t(E_t)$. Concluir que $\ker(\lambda) = (\ker(\lambda_t))_{t \in J}$ e $\lambda(\underline{E}) = (\lambda_t(E_t))_{t \in J}$ são subfibrados vectoriais paralelos de $\underline{E}$ e $\underline{F}$, respectivamente. **Sugestão:** Lembrar V.1.3 e a alínea d) do exercício III.55.

Ex V.4 Sejam, mais geralmente, $M \subset G$ uma variedade, E e F espaços euclidianos ou hermitianos, $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ e $\underline{F} = (F_x)_{x \in M}$ fibrados vectoriais e $\lambda = (\lambda_x)_{x \in M} \colon \underline{E} \to \underline{F}$ um morfismo linear suave paralelo.
a) Mostrar que $\ker(\lambda) = (\ker(\lambda_x))_{x \in M}$ e $\lambda(\underline{E}) = (\lambda_x(E_x))_{x \in M}$ são subfibrados vectoriais de $\underline{E}$ e $\underline{F}$, respectivamente.
Sugestão: Tendo em conta o exercício III.57, basta mostrar que, para cada $x_0 \in M$, existe um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, a dimensão de $\lambda_x(E_x)$ coincida com a de $\lambda_{x_0}(E_{x_0})$. Mostrar que isso acontece sempre que U é conexo, considerando, para cada $x \in U$, uma aplicação suave $f \colon [0, 1] \to U$ com $f(0) = x_0$ e $f(1) = x$ e aplicando o exercício anterior às imagens recíprocas por meio de f.
b) Mostrar que $\ker(\lambda) = (\ker(\lambda_x))_{x \in M}$ e $\lambda(\underline{E}) = (\lambda_x(E_x))_{x \in M}$ são mesmo subfibrados vectoriais paralelos de $\underline{E}$ e $\underline{F}$, respectivamente.
Sugestão: Para mostrar que é nula a derivada covariante da inclusão em x_0 na direcção de qualquer vector $u \in T_{x_0}(M)$, basta ver que isso acontece para cada $u \in \mathrm{t}_{x_0}(M)$. Para isso, reparar que se pode sempre considerar uma aplicação suave $f \colon [0, \varepsilon[\to M$ com $f(0) = x_0$ e $f'(x_0) = u$ e aplicar o exercício anterior às imagens recíprocas por meio de f.

Ex V.5 Sejam $M \subset G$ uma variedade, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ e $\underline{E'} = (E'_x)_{x \in M}$ dois fibrados vectoriais, com $E_x \subset E'_x \subset E$. Seja, para cada $x \in M$, E''_x o complementar ortogonal de E_x em E'_x. Mostrar que, se $\underline{E}$ é um subfibrado vectorial paralelo de $\underline{E'}$, então $\underline{E''}$ é também um subfibrado vectorial paralelo de $\underline{E'}$. **Sugestão:** Lembrar que, como se viu no exercício III.55, notando $\widehat{\pi}_x$ a projecção ortogonal de E'_x sobre E_x, $\widehat{\pi} = (\widehat{\pi}_x)_{x\in A}: \underline{E'} \to \underline{E}$ é um morfismo linear paralelo.

Ex V.6 Dado o espaço vectorial E de dimensão finita, diz-se que um conjunto $A \subset E$ é *suavemente contráctil no ponto* $x_0 \in A$ se for possível escolher, para cada $x \in A$, uma aplicação suave $f_x: [0,1] \to A$, verificando $f_x(0) = x_0$ e $f_x(1) = x$ (um caminho de x_0 para x), de modo que essa escolha seja uma função suave de x, no sentido que seja suave a aplicação $H: [0,1] \times A \to A$, definida por $H(t,x) = f_x(t)$.

a) Mostrar que, se $A \subset E$ é estrelado relativamente a $x_0 \in A$, então A é suavemente contráctil em x_0.

b) Mostrar que, se $A \subset E$ é suavemente contráctil em $x_0 \in A$ e se $\widehat{A} \subset \widehat{E}$ é tal que exista um difeomorfismo $\varphi: A \to \widehat{A}$, então $\widehat{A}$ é suavemente contráctil no ponto $f(x_0)$.

c) Deduzir que, se $A \subset E$ é uma variedade, então, para cada $x_0 \in A$, existe um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x_0 em A, que são suavemente contrácteis em x_0.

Ex V.7 Seja $A \subset G$ um conjunto suavemente contráctil no ponto $x_0 \in A$. Mostrar que, se $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ é um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$, então $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial. **Sugestão:** Fixar um produto interno em E e escolher, para cada $x \in A$, uma aplicação suave $f_x: [0,1] \to A$, com $f_x(0) = x_0$ e $f_x(1) = x$, de modo que venha suave a aplicação $H: [0,1] \times A \to A$, definida por $H(t,x) = f_x(t)$. Dado $w \in E_{x_0}$, utilizar os resultados sobre equações diferenciais paramétricas para mostrar que tem lugar uma secção suave $W = (W_x)_{x\in A}$ de $\underline{E}$, definida pela condição de $W_x \in E_x$ ser o vector obtido a partir de w por transporte paralelo ao longo do caminho f_x. Mostrar que, se $w_1, \ldots, w_n$ é uma base de E_{x_0}, então as correspondentes secções $W_1, \ldots, W_n$ de $\underline{E}$ constituem um campo de referenciais.

Ex V.8 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais que um elemento, E um espaço euclidiano ou hermitiano e $\underline{E} = (E_t)_{t\in J}$ um fibrado vectorial, com $E_t \subset E$. Para cada secção suave $W = (W_t)_{t\in J}$ de $\underline{E}$, notemos $\frac{\delta W}{\delta t}$ a secção suave de $\underline{E}$, que a cada $t \in J$ associa a derivada covariante $\nabla W_t(1)$ (notação alternativa: $\nabla_1 W$). Mostrar que, se $Z = (Z_t)_{t\in J}$ é uma secção suave de $\underline{E}$, então, para cada $a \in J$ e $w \in E_a$, existe uma, e uma só, secção suave W de $\underline{E}$, tal que $W_a = w$ e que $\frac{\delta W}{\delta t} = Z$ (uma *primitiva covariante* de Z).

Sugestão: Reparar que este resultado é uma generalização de V.1.1 e verificar que a respectiva demonstração se adapta trivialmente a este caso.

Ex V.9 **(O grupóide fundamental suave duma variedade)** Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo. Dados $x, y \in M$, notemos $C(x,y)$ o conjunto das aplicações suaves $f: \mathbb{R} \to M$ tais que exista $\varepsilon > 0$ com $f(t) = x$, para cada

$t \le \varepsilon$, e $f(t) = y$, para cada $t \ge 1 - \varepsilon$.[104] Dados $f, g \in C(x, y)$, vamos dizer que f e g são equivalentes, e escrever $f \sim g$, se existir uma aplicação suave $H: [0, 1] \times \mathbb{R} \to M$ tal que $H(0, t) = f(t)$, $H(1, t) = g(t)$ e exista $\varepsilon > 0$ com $H(s, t) = x$, sempre que $t \le \varepsilon$, e $H(s, t) = y$, sempre que $t \ge 1 - \varepsilon$.[105]

a) Mostrar que, se $f, g \in C(x, y)$ são equivalentes, então existe uma aplicação suave $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to X$ e $\varepsilon > 0$ tais que:
1) $H(s, t) = f(t)$, sempre que $s \le \varepsilon$;
2) $H(s, t) = g(t)$, sempre que $s \ge 1 - \varepsilon$;
3) $H(s, t) = x$, sempre que $t \le \varepsilon$;
4) $H(s, t) = y$, sempre que $t \ge 1 - \varepsilon$.
Sugestão: Mostrar que o teorema da partição da unidade garante a existência de uma aplicação suave $\alpha: \mathbb{R} \to [0, 1]$, tal que $\alpha(s) = 0$, sempre que $s \le \frac{1}{3}$, e que $\alpha(s) = 1$, sempre que $s \ge \frac{2}{3}$.

b) Mostrar que a relação $\sim$ em $C(x, y)$ é uma relação de equivalência. **Sugestão:** Rever o que se fez na demonstração de II.6.23.

Notaremos $\mathcal{C}(x, y)$ o conjunto das classes de equivalência de elementos de $C(x, y)$, para a relação $\sim$, e $[f]$ a classe de equivalência do elemento $f \in C(x, y)$.

c) Mostrar que a variedade M é conexa se, e só se, quaisquer que sejam $x, y \in M$, $\mathcal{C}(x, y)$ (ou $C(x, y)$) é não vazio. **Sugestão:** Ter em conta II.6.23.

d) Dados $x, y, z \in M$, mostrar que se pode definir uma aplicação de $C(x, y) \times C(y, z)$ em $C(x, z)$, que a cada par (f, g) associa a aplicação $f * g: \mathbb{R} \to M$, definida por

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } t \le \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Mostrar que esta aplicação *passa ao quociente*, isto é, que fica bem definida uma aplicação de $\mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(y, z)$ em $\mathcal{C}(x, z)$, que a cada par $([f], [g])$ associa $[f] * [g] = [f * g]$.

e) (Existência de elementos neutros) Para cada $x \in M$, notemos $\widehat{x}$ a aplicação de $\mathbb{R}$ em M, com valor constante x, que é evidentemente um elemento de $C(x, x)$, assim como a respectiva classe de equivalência em $\mathcal{C}(x, x)$. Mostrar que, se $f \in C(x, y)$, então $\widehat{x} * f$ e $f * \widehat{y}$ são equivalentes a f, por outras palavras,

---

[104]Os elementos de $C(x, y)$ podem ser olhados como definindo *movimentos* ou *viagens* de x para y. Poderia parecer mais natural considerar como elementos de $C(x, y)$ as aplicações suaves de $[0, 1]$ em X, que aplicam 0 em x e 1 em y, mas isso levantaria dificuldades técnicas quando tentássemos combinar movimentos de x para y com movimentos de y para z.

[105]Reparar que dar a aplicação H equivale a dar, para cada $s \in [0, 1]$, um elemento $f_s \in C(x, y)$; as duas primeiras condições dizem que $f_0 = f$ e $f_1 = g$, e a última que se pode escolher um mesmo ε para todos os f_s.

$$\widehat{x} * [f] = [f],$$
$$[f] * \widehat{y} = [f].$$

Sugestão: Considerar as aplicações $H, \widehat{H} \colon [0,1] \times \mathbb{R} \to M$ definidas por

$$H(s,t) = \begin{cases} x & \text{se } t \leq \frac{s}{2} \\ f(\frac{2t-s}{2-s}) & \text{se } t > \frac{s}{2} \end{cases},$$

$$\widehat{H}(s,t) = \begin{cases} f(\frac{2t}{2-s}) & \text{se } t \leq \frac{2-s}{2} \\ y & \text{se } t > \frac{2-s}{2} \end{cases},$$

fórmulas que podem ser sugeridas pela figura 13.

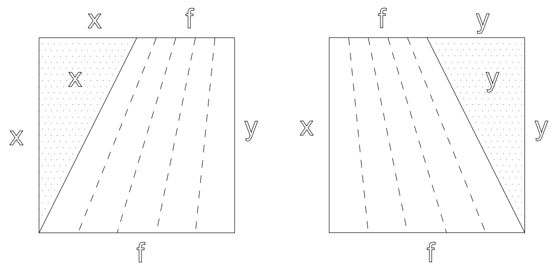

Figura 13

f) (Associatividade) Sendo $f \in C(x,y)$, $g \in C(y,z)$ e $h \in C(z,w)$, mostrar que $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$ são equivalentes em $C(x,w)$, isto é,

$$([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h])$$

(como é habitual, pode-se notar simplesmente $[f] * [g] * [h]$ este elemento).

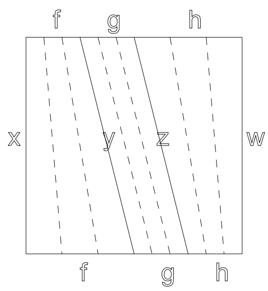

Figura 14

Sugestão: Considerar (cf. a figura 14) a aplicação $H \colon [0,1] \times \mathbb{R} \to M$ definida por

$$H(s,t) = \begin{cases} f(\frac{4t}{2-s}) & \text{se } t \leq \frac{2-s}{4} \\ g(4t-2+s) & \text{se } \frac{2-s}{4} < t < \frac{3-s}{4} \\ h(\frac{4t-3+s}{1+s}) & \text{se } t \geq \frac{3-s}{4} \end{cases},$$

g) Para cada $f \in C(x,y)$, mostrar que tem lugar um elemento $\tilde{f} \in C(y,x)$ definido por $\tilde{f}(t) = f(1-t)$. Mostrar que $f * \tilde{f}$ é um elemento de $C(x,x)$ equivalente a $\widehat{x}$ e que $\tilde{f} * f$ é um elemento de $C(y,y)$ equivalente a $\widehat{y}$, por outras palavras, que se tem

$$[f] * [\tilde{f}] = \widehat{x},$$
$$[\tilde{f}] * [f] = \widehat{y}.$$

Por razões óbvias, é costume notar $[f]^{-1}$ o elemento $[\tilde{f}]$.

Sugestão: Uma vez que se tem evidentemente $\tilde{\tilde{f}} = f$, basta mostrar a primeira afirmação. Escolher $\varepsilon > 0$ tal que $f(t) = x$, para cada $t \leq \varepsilon$, e $f(t) = y$, para cada $t \geq 1 - \varepsilon$. Utilizar um argumento de partição da unidade para provar a existência de uma aplicação suave $\beta\colon \mathbb{R} \to]-\infty, 1]$ verificando as condições seguintes:

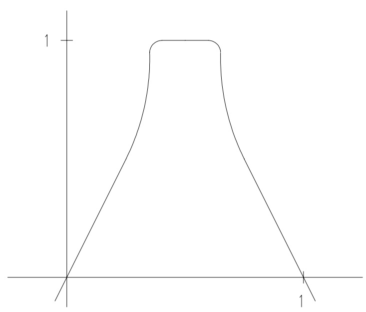

Figura 15

1) Se $t \leq \frac{1-\varepsilon}{2}$, então $\beta(t) = 2t$ e, se $t \leq \frac{1}{2}$, então $\beta(t) \geq 2t$;
2) Se $t \geq \frac{1+\varepsilon}{2}$, então $\beta(t) = 2 - 2t$ e, se $t \geq \frac{1}{2}$, então $\beta(t) \geq 2 - 2t$.
(**Subsugestão:** Começar por construir a aplicação $1 - \beta$). Reparar que a aplicação que a t associa $f(\beta(t))$ não é mais do que a aplicação $f * \tilde{f}$ e considerar a aplicação suave $H\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to X$ definida por $H(s,t) = f(s\beta(t))$.

h) À família dos conjuntos $\mathcal{C}(x,y)$, com $x, y \in X$, juntamente com a família de aplicações $\mathcal{C}(x,y) \times \mathcal{C}(y,z) \to \mathcal{C}(x,z)$, dá-se o nome de *grupóide fundamental* (suave)[106] da variedade sem bordo M. Mostrar que, para cada

[106]Quando M é simplesmente um espaço topológico, define-se o grupóide fundamental de M por um processo analogo ao precedente mas utilizando aplicações contínuas de $[0,1]$ em M em vez de aplicações suaves de $\mathbb{R}$ em M, verificando as condições atrás descritas (não há neste caso necessidade de arredondar os cantos). Pode-se provar que,

$x \in M$, $\mathcal{C}(x,x)$ é um grupo (o *grupo fundamental* de M no ponto x) e que, no caso em que a variedade sem bordo M é conexa, quaisquer que sejam $x,y \in M$, os grupos fundamentais $\mathcal{C}(x,x)$ e $\mathcal{C}(y,y)$ são isomorfos (embora, em geral, dos vários isomorfismos entre eles, não exista uma escolha natural). **Sugestão:** Depois de feitas as alíneas anteriores, a resolução desta é puramente algébrica.

Ex V.10 Diz-se que uma variedade sem bordo M é *simplesmente conexa* se, quaisquer que sejam $x,y \in M$, o conjunto $\mathcal{C}(x,y)$ é constituído por um único elemento. Mostrar que toda a variedade simplesmente conexa é conexa e que, para mostrar que uma variedade conexa M é simplesmente conexa, basta mostrar a existência de $x,y \in M$ tais que $\mathcal{C}(x,y)$ seja constituído por um único elemento.[107]

Ex V.11 **a)** Seja E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$. Mostrar que $E \setminus \{0\}$ é conexo e deduzir que

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$$

é também conexo. **Sugestão:** Sendo $x \neq 0$ em E, reparar que $E \setminus \{0\}$ é a união dos conjuntos $E \setminus \mathbb{R}_{-}x$ e $E \setminus \mathbb{R}_{+}x$, estrelados relativamente a x e a $-x$, respectivamente, e com intersecção não vazia. Considerar a aplicação de $E \setminus \{0\}$ sobre S, que a x associa $\frac{x}{\|x\|}$.

b) Supondo agora que $n \geq 3$, mostrar que S é simplesmente conexa. **Sugestão:** Uma vez que S é uma variedade sem bordo com dimensão $n-1 \geq 2$, utilizar o teorema de Sard para mostrar que uma aplicação suave $\varphi\colon \mathbb{R} \to S$ nunca é sobrejectiva e reparar que, para cada $x \in S$, a projecção estereográfica define um difeomorfismo de $S \setminus \{x\}$ sobre o espaço vectorial $F = (\mathbb{R}x)^{\perp}$ (cf. III.9.17).

Ex V.12 Mostrar que, se a variedade sem bordo M é estrelada relativamente ao elemento $x_0 \in M$, então M é simplesmente conexa. **Sugestão:** Uma vez que M é conexa, basta mostrar que $\mathcal{C}(x_0,x_0)$ é constituído por um único elemento.

Ex V.13 Sejam $M \subset G$ uma variedade sem bordo e $x,y \in M$. Seja $f\colon \mathbb{R} \to M$ uma aplicação suave pertencente a $C(x,y)$ e seja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave tal que $\varphi(t) \leq 0$, para cada $t \leq 0$, e $\varphi(t) \geq 1$, para cada $t \geq 1$. Mostrar que a aplicação $g = f \circ \varphi\colon \mathbb{R} \to M$ também pertence a $C(x,y)$ e define o mesmo elemento de $\mathcal{C}(x,y)$ que f. **Sugestão:** Considerar a

quando M é uma variedade sem bordo, as duas definições conduzem a grupóides isomorfos, o isomorfismo associando à classe de equivalência de uma aplicação suave de $\mathbb{R}$ em M a classe de equivalência da sua restrição a $[0,1]$.

[107]Mais uma vez, e de acordo como o que dissémos na nota anterior, esta definição é equivalente à que se pode apresentar no quadro dos espaços topológicos gerais, utilizando a definição correspondente de grupóide fundamental.

aplicação suave $H: [0,1] \times \mathbb{R} \to M$ definida por

$$H(s,t) = f((1-s)t + s\varphi(t)).$$

Ex V.14 Seja $M \subset G$ uma variedade sem bordo suavemente contrátil no ponto $x_0 \in M$ (cf. o exercício V.6). Mostrar que M é simplesmente conexa. **Sugestão:** Basta provar que qualquer elemento $f \in C(x_0, x_0)$ é equivalente à aplicação constante $\widehat{x}_0$. Sendo $H: [0,1] \times M \to M$ nas condições da definição apresentada no exercício V.6, considerar a aplicação suave $\widehat{H}: [0,1] \times \mathbb{R} \to M$ definida por

$$\widehat{H}(s,t) = H(s, f(t)),$$

que quase resolve o nosso problema (resolveria se H tivesse a propriedade suplementar $H(s, x_0) = x_0$, para cada s, propriedade que não estamos a supor). Utilizar o teorema da partição da unidade para considerar uma aplicação suave $\alpha: \mathbb{R} \to [0,1]$, verificando $\alpha(t) = 0$, para $t \leq \frac{1}{3}$, e $\alpha(t) = 1$, para $t \geq \frac{2}{3}$, considerar as aplicações suaves $\beta, \gamma: \mathbb{R} \to [0,1] \times [0,1]$ definidas por

$$\beta(t) = \begin{cases} (0, \alpha(2t)) & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha(2t-1), 1) & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\alpha(2t), 0) & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ (1, \alpha(2t-1)) & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases},$$

e utilizá-las para definir uma aplicação suave $\tilde{H}: [0,1] \times \mathbb{R} \to M$,

$$\tilde{H}(s,t) = \widehat{H}((1-s)\beta(t) + s\gamma(t)).$$

Verificar que a aplicação $\tilde{H}$ implica que, sendo $g: \mathbb{R} \to M$, a aplicação definida por $g(s) = H(\alpha(s), x_0)$, tem-se $[g] * [f] = \widehat{x}_0 * [g]$ (cf. o exercício anterior), e deduzir daí que $[f] = \widehat{x}_0$.

Ex V.15 Sejam $M \subset G$ uma variedade sem bordo, E um espaço euclidiano e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset E$. Dados $x, y \in M$ e $f \in C(x,y)$, notemos $\xi_f: E_x \to E_y$ o isomorfismo ortogonal de transporte paralelo ao longo de f (cf. V.1.5).
a) Mostrar que, se $f \in C(x,y)$ e $g \in C(y,z)$, tem-se

$$\xi_{f*g} = \xi_g \circ \xi_f: E_x \to E_z.$$

b) Mostrar que, sendo $\widehat{x} \in C(x,x)$ a aplicação de valor constante x, o isomorfismo $\xi_{\widehat{x}}: E_x \to E_x$ é a identidade e que, dado $f \in C(x,y)$ e notando $\tilde{f}$ o elemento oposto de $C(y,x)$, definido na alínea g) do exercício V.9, o isomorfismo $\xi_{\tilde{f}}: E_y \to E_x$ é o inverso do isomorfismo $\xi_f: E_x \to E_y$.
c) Mostrar que, se f e g são elementos equivalentes de $C(x,y)$ e se

considerarmos orientações sobre E_x e E_y, então os isomorfismos ξ_f e ξ_g, de E_x sobre E_y, conservam ambos ou invertem ambos as orientações e deduzir daqui que, se a variedade sem bordo M é simplesmente conexa, então todo o fibrado vectorial de base M é orientável. **Sugestão:** Para a primeira afirmação, considerar uma aplicação suave $H\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to M$ nas condições da alínea a) do exercício V.9 e utilizar o resultado sobre a suavidade da solução geral de uma equação diferencial paramétrica para deduzir que, sendo, para cada $s\in\mathbb{R}$, $f_s(t)=H(s,t)$, é suave a aplicação que a s associa o isomorfismo ξ_{f_s}. Para a segunda afirmação, atender à conclusão de a), ao facto de todo o fibrado vectorial ser localmente orientável e ao facto de, num fibrado vectorial suavemente orientado, os isomorfismos $\xi_{a,b}\colon E_{f(a)}\to E_{f(b)}$, de transporte paralelo, conservarem trivialmente as orientações.

d) Suponhamos que, para cada $x\in M$, o tensor de curvatura

$$R_x\colon T_x(M)\times T_x(M)\times E_x\to E_x$$

é identicamente nulo. Mostrar que, se f e g são elementos equivalentes de $C(x,y)$, então os isomorfismos ξ_f e ξ_g, de E_x sobre E_y, coincidem.

Sugestão: Considerar uma aplicação suave $H\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to M$ nas condições da alínea a) do exercício V.9. Ter em conta o lema V.2.1, para garantir a existência, para cada $w\in E_x$, de uma secção paralela W do fibrado vectorial $H^*\underline{E}$, de base $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, com $W_{(0,0)}=w$ e verificar que $\xi_f(w)$ e $\xi_g(w)$ são ambos iguais a $W_{(1,1)}$.

Ex V.16 Sejam $M\subset G$ uma variedade sem bordo, simplesmente conexa, E um espaço euclidiano e $\underline{E}=(E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x\subset E$, tal que o tensor de curvatura $R_x\colon T_x(X)\times T_x(X)\times E_x\to E_x$ seja identicamente nulo, para cada $x\in M$. Para cada par (x,y) de elementos de M, seja $\xi_{y,x}\colon E_x\to E_y$ o isomorfismo ortogonal ξ_f, onde f é um elemento arbitrário de $C(x,y)$ (cf. a alínea c) do exercício precedente).

a) Dados $x,y,z\in M$, verificar que $\xi_{z,y}\circ\xi_{y,x}=\xi_{z,x}\colon E_x\to E_z$.

b) Dados $x_0\in M$ e $w\in E_{x_0}$, mostrar que tem lugar uma secção suave paralela $W=(W_x)_{x\in M}$ de $\underline{E}$, definida por $W_x=\xi_{x,x_0}(w)$.

Sugestão: Verificar que W coincide localmente com secções suaves paralelas cuja existência é garantida por V.2.2.

c) Concluir, em particular, que $\underline{E}$ é um fibrado vectorial trivial.

Ex V.17 Sejam G um espaço euclidiano e $M\subset G$ uma variedade sem bordo. Sejam $x\in M$, $w\in T_x(M)$, $t\in\mathbb{R}$ e $f\colon]a,b[\to M$ a geodésica máxima para as condições iniciais $f(t)=x$ e $f'(t)=w$. Mostrar que:

a) Se a é finito, então, para cada compacto $K\subset M$, existe $c>0$ tal que, para cada $a<s<a+c$, tem-se $f(s)\notin K$;

b) Se b é finito, então, para cada compacto $K\subset M$, existe $c>0$ tal que, para cada $b-c<s<b$, tem-se $f(s)\notin K$.

Deduzir que, se a variedade sem bordo M é compacta, então, para cada $x\in M$, $w\in T_x(M)$ e $t\in\mathbb{R}$, existe uma geodésica $f\colon\mathbb{R}\to X$ (definida na

totalidade de $\mathbb{R}$), tal que $f(t) = x$ e $f'(t) = w$ (a variedade é *geodesicamente completa*).
Sugestão: Trata-se de uma conclusão do tipo da apontada em IV.7.5. No entanto, para poder aplicar esse resultado, tem que associar ao compacto $K \subset M$ um subconjunto compacto conveniente de $T(M)$, e, para isso, será útil ter em conta V.3.4 e a alínea a) de III.3.19.

Ex V.18 Sejam G e $\widehat{G}$ espaços euclidianos, $M \subset G$ e $\widehat{M} \subset \widehat{G}$ variedades e $\varphi\colon M \to \widehat{M}$ um difeomorfismo isométrico ou, mais geralmente, uma aplicação suave paralela (cf. III.8.32). Mostrar que, se $f\colon J \to M$ é uma geodésica, então $\varphi \circ f\colon J \to \widehat{M}$ é também uma geodésica.
Sugestão: Lembrar o exercício III.70.

Ex V.19 **(Propriedade recíproca)** Sejam G e $\widehat{G}$ espaços euclidianos e $M \subset G$ e $\widehat{M} \subset \widehat{G}$ duas variedades, a primeira das quais supomos, para simplificar, que não tem bordo. Seja $\varphi\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave tal que, qualquer que seja o intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ e a geodésica $f\colon J \to M$, a composta $\varphi \circ f\colon J \to \widehat{M}$ também seja uma geodésica. Mostrar que φ é uma aplicação paralela.
Sugestão: Uma vez que $\beta(\varphi)_x\colon T_x(M) \times T_x(M) \to T_{\varphi(x)}(\widehat{M})$ é bilinear simétrica, basta verificar que, para cada $u \in T_x(M)$, $\beta(f)_x(u,u) = 0$. Para isso utilizar o exercício III.70, considerando uma geodésica $f\colon]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ com $f(0) = x$ e $f'(0) = u$.

Ex V.20 **(O espelho de uma simetria)** Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo. Seja $\varphi\colon M \to M$ uma *simetria*, isto é, um difeomorfismo isométrico tal que $\varphi \circ \varphi = Id_M$. Seja $M' \subset M$ o *espelho* da simetria, isto é, o conjunto

$$M' = \{x \in M \mid \varphi(x) = x\}.$$

Sejam $x_0 \in M'$ e $F \subset T_{x_0}(M)$ o subespaço vectorial

$$F = \{u \in T_{x_0}(M) \mid D\varphi_{x_0}(u) = u\}.$$

a) Mostrar que, se $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $a \in J$ e $f\colon J \to M$ é uma geodésica com $f(a) = x_0$ e $f'(a) \in F$, então $f(J) \subset M'$. Concluir que, sendo $\exp_{x_0}\colon \mathcal{D}_{x_0} \to M$ a aplicação exponencial de M em x_0 (cf. V.3.12), em que $\mathcal{D}_{x_0}$ é um aberto de $T_{x_0}(M)$, tem-se $\exp_{x_0}(\mathcal{D}_{x_0} \cap F) \subset M'$.
Sugestão: $\varphi \circ f$ é outra geodésica de M com o mesmo valor e a mesma derivada no ponto a.
b) Mostrar que se tem $T_{x_0}(M') \subset F$ a aplicar o segundo teorema da submersão (cf. II.4.39) à restrição de $\exp_{x_0}$ ao aberto $\mathcal{D}_{x_0} \cap F$ de F para concluir que M' é uma variedade em x_0 e com

$$T_{x_0}(M') = \{u \in T_{x_0}(M) \mid D\varphi_{x_0}(u) = u\}.$$

c) Mostrar que M' é uma subvariedade totalmente geodésica de M.

Sugestão: $\varphi: M \to M$ sendo totalmente geodésica, $D\varphi: T(M) \to \varphi^* T(M)$ é um morfismo linear paralelo, pelo que $D\varphi_{/M'}: T(M)_{/M'} \to T(M)_{/M'}$ é paralelo e basta então reparar que $T(M')$ é o kernel de $D\varphi_{/M'} - Id$.

Ex V.21 Utilizar o exercício precedente para mostrar que:

a) Sejam E um espaço euclidiano, $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ e F um subespaço vectorial de E. O subconjunto $S' = S \cap F$ é então uma subvariedade totalmente geodésica de S. **Sugestão:** Considerar a restrição a S da simetria linear relativamente a F.

b) Sejam E um espaço euclidiano (respectivamente hermitiano) e consideremos em $L(E;E)$ o produto interno de Hilbert-Schmidt (respectivamente a parte real deste). Sendo $O(E) \subset L(E;E)$ o grupo ortogonal, conjunto dos $\xi \in L(E;E)$ tais que $\xi^* \circ \xi = Id$, e $\widehat{\mathcal{R}}_2(E) \subset O(E)$ o conjunto dos $\xi \in O(E)$ tais que $\xi \circ \xi = Id$ (cf. o exercício II.40). Mostrar que $\widehat{\mathcal{R}}_2(E)$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $O(E)$. **Sugestão:** Reparar que $\widehat{\mathcal{R}}_2(E)$ é o conjunto dos $\xi \in O(E)$ tais que $\xi^* = \xi$.

Ex V.22 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo. Mostrar que, se $x \in M$ e $\exp_x: \mathcal{D}_x \to M$ é a aplicação exponencial de M no ponto x, então $\mathcal{D}_x$ é uma parte de $T_x(M)$ estrelada relativamente a 0.

Ex V.23 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo e notemos $\exp: \mathcal{D} \to M$ a respectiva aplicação exponencial, onde, como sabemos, $\mathcal{D}$ é um aberto de $T(M)$ contendo $M \times \{0\}$. Seja $\overline{\exp}: \mathcal{D} \to M \times M$ a aplicação suave definida por

$$\overline{\exp}(x, w) = (x, \exp(x, w)).$$

a) Mostrar que, para cada $x_0 \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que o aberto

$$\{(x, w) \in T(M) \mid \|x - x_0\| < \varepsilon, \|w\| < \varepsilon\}$$

de $T(M)$ esteja contido em $\mathcal{D}$ e que a restrição de $\overline{\exp}$ a este aberto seja um difeomorfismo sobre um aberto de $M \times M$, contendo (x_0, x_0). Concluir que, para cada $x \in M$ tal que $\|x - x_0\| < \varepsilon$, a bola aberta de centro 0 e raio ε de $T_x(M)$ está contida em $\mathcal{D}_x$ e a restrição de $\exp_x$ a essa bola aberta é um difeomorfismo sobre um aberto de M.

b) Utilizar o exercício II.24 para concluir, mais geralmente, que, para cada compacto $K \subset M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que o aberto

$$\{(x, w) \in T(M) \mid d(x, K) < \varepsilon, \|w\| < \varepsilon\}$$

de $T(M)$ esteja contido em $\mathcal{D}$ e que a restrição de $\overline{\exp}$ a este aberto seja um difeomorfismo sobre um aberto de $M \times M$. Concluir que, para cada $x \in M$ tal que $d(x, K) < \varepsilon$, a bola aberta de centro 0 e raio ε de $T_x(M)$ está contida em $\mathcal{D}_x$ e a restrição de $\exp_x$ a essa bola aberta é um difeomorfismo sobre um aberto de M.

Ex V.24 Seja E um espaço euclidiano (respectivamente hermitiano) e considere-se em $L(E;E)$ o produto interno de Hilbert-Schmidt (respectivamente, a parte real deste). Seja $O(E) \subset L_{iso}(E;E)$ o conjunto dos isomorfismos ortogonais, que sabemos ser uma variedade compacta sem bordo e com $T_\xi(O(E))$ constituído pelos $\mu \in L(E;E)$ tais que $\mu^* \circ \xi = -\xi^* \circ \mu$ (cf. II.5.7).

a) Mostrar que a aplicação exponencial $\exp_{Id}$, de $O(E)$ no elemento Id_E, está definida na totalidade de $T_{Id}(O(E))$ por

$$\exp_{Id}(\mu) = \exp(\mu),$$

onde $\exp(\mu)$ nota a exponencial do endomorfismo μ (cf. o exercício IV.24). **Sugestão:** Utilizar a alínea e) do exercício referido e o exercício III.22 para mostrar que a aplicação que a t associa $\exp(t\mu)$ toma valores em $O(E)$ e é uma geodésica de $O(E)$, que em 0 toma o valor Id_E e tem derivada μ.

b) Utilizar o exercício V.18 para mostrar, mais geralmente, que, para cada $\xi \in O(E)$ e $\mu \in T_\xi(O(E))$,

$$\exp_\xi(\mu) = \xi \circ \exp(\xi^{-1} \circ \mu).$$

Nota: Se em vez de $O(E)$ considerássemos a variedade $GL(E)$, constituída por todos os isomorfismos de E sobre E, a respectiva aplicação exponencial tinha um aspecto totalmente distinto (cf. o exemplo 1 em V.3.14).

Ex V.25 **(O lema de Gauss)** Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo, com dimensão $n \geq 1$. Sejam $x \in M$ e $r > 0$, tais que a bola aberta B_r de $T_x(M)$, com centro 0 e raio r, esteja contida no domínio da aplicação exponencial $\exp_x$ e que a restrição de $\exp_x$ a B_r seja um difeomorfismo de B_r sobre um aberto $\widehat{B}_r$ de M (cf. V.3.16). Seja $S \subset T_x(M)$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1 e notemos

$$\varphi\colon]-r,r[\times S \to X$$

a aplicação suave definida por

$$\varphi(t,w) = \exp_x(tw).$$

a) Mostrar que, para cada $(t,w) \in]-r,r[\times S$,

$$\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,w), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,w)\rangle = 1.$$

Sugestão: Ter em conta V.3.4.

b) Mostrar que, para cada $(t,w) \in]-r,r[\times S$ e $u \in T_w(S)$,

$$\langle D_2\varphi_{(t,w)}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,w)\rangle = 0,$$

onde $D_2\varphi$ nota a derivada parcial de φ relativamente à segunda variável. **Sugestão:** Verificar que o primeiro membro da igualdade é nulo para $t = 0$,

pelo que basta ver que é nula a sua derivada, como função de t. Essa derivada é soma de duas parcelas, uma das quais é nula, por $t \mapsto \varphi(t, w)$ ser uma geodésica e para ver que a outra é nula basta derivar, como função de w, ambos os membros da igualdade obtida em a).
Nota: Notando, para cada $0 < a < r$, S_a a hipersuperfície esférica de $T_x(M)$, com centro 0 e raio a, e $\widehat{S}_a \subset M$, $\widehat{S}_a = \exp_x(S_a)$, que é portanto uma variedade compacta, sem bordo, de dimensão $n-1$, a conclusão de b) garante que a geodésica, que a t associa $\varphi(t, w)$, é ortogonal às variedades $\widehat{S}_a$.

Ex V.26 Coloquemo-nos nas hipóteses e com as notações utilizadas no exercício precedente. Para cada aplicação suave $f\colon [\alpha, \beta] \to M$, consideremos o seu *comprimento* $\mathrm{comp}(f)$, definido por

$$\mathrm{comp}(f) = \int_\alpha^\beta \|f'(t)\|\, dt.$$

a) Sejam $0 < a < b < r$. Mostrar que, para cada $w \in S$, a aplicação $f\colon [a, b] \to M$, definida por $f(t) = \varphi(t, w) = \exp_x(tw)$, é uma geodésica com $f(a) \in \widehat{S}_a$, $f(b) \in \widehat{S}_b$ e $\mathrm{comp}(f) = b - a$ e que, se $g\colon [\alpha, \beta] \to M$ é uma aplicação suave, verificando $g(\alpha) \in \widehat{S}_a$ e $g(\beta) \in \widehat{S}_b$, então $\mathrm{comp}(g) \geq b - a$, tendo-se $\mathrm{comp}(g) = b - a$ se, e só se, existir $w \in S$ e uma aplicação suave $\rho\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$, crescente (no sentido lato) e verificando $\rho(\alpha) = a$ e $\rho(\beta) = b$, tais que $g(t) = \varphi(\rho(t), w) = \exp_x(\rho(t)w)$.
Sugestão: Considerando o máximo α' dos t tais que $g(t) \in \widehat{S}_a$ e o mínimo β' dos $t \in [\alpha', \beta]$ tais que $g(t) \in \widehat{S}_b$, mostrar que se pode já supor que a imagem de g está contida em $\widehat{B}_r \setminus \{x\}$. Escrever então

$$g(t) = \varphi(\rho(t), W(t)),$$

com $\rho\colon [\alpha, \beta] \to]0, r[$ e $W\colon [\alpha, \beta] \to S$ aplicações suaves e, utilizando o exercício precedente (lema de Gauss), mostrar que $W'(t) = 0$ e $\rho'(t) \geq 0$.
b) Seja $0 < b < r$. Mostrar que, para cada $w \in S$, a aplicação $f\colon [0, b] \to M$, definida por $f(t) = \varphi(t, w) = \exp_x(tw)$, é uma geodésica verificando $f(0) = x$, $f(b) \in \widehat{S}_b$ e $\mathrm{comp}(f) = b$ e que, se $g\colon [\alpha, \beta] \to M$ é uma aplicação suave, com $g(\alpha) = x$ e $g(\beta) \in \widehat{S}_b$, então $\mathrm{comp}(g) \geq b$, tendo-se $\mathrm{comp}(g) = b$ se, e só se, existe $w \in S$ e uma aplicação suave $\rho\colon [\alpha, \beta] \to [0, b]$, crescente (no sentido lato) e verificando $\rho(\alpha) = 0$, $\rho(\beta) = b$ e

$$g(t) = \varphi(\rho(t), w) = \exp_x(\rho(t)w).$$

Sugestão: Considerar o máximo α' dos $t \in [\alpha, \beta]$ tais que $g(t) = x$ e aplicar a conclusão da alínea precedente à restrição de g a cada intervalo $[t, \beta]$, com $\alpha' < t < \beta$, passando ao limite para $t \to \alpha'$.

c) Mostrar que, se $g\colon [\alpha, \beta] \to M$ é uma aplicação suave tal que $g(\alpha) = x$ e $g(\beta) \notin \widehat{B}_r$, então comp$(g) \geq r$.

Ex V.27 Sejam G um espaço euclidiano e $M \subset G$ uma variedade sem bordo, e seja $g\colon [\alpha, \beta] \to M$ uma geodésica. Mostrar que existe então $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$, com $\delta - \gamma \leq \varepsilon$, o comprimento da restrição de g a $[\gamma, \delta]$ é menor ou igual ao de qualquer outra aplicação suave $h\colon [c, d] \to M$, verificando $h(c) = g(\gamma)$ e $h(d) = g(\delta)$ (a restrição de g a $[\gamma, \delta]$ é uma *geodésica minimizante*). **Sugestão:** Aplicar o exercício precedente e a alínea b) do exercício V.23.

CAPÍTULO VI
Estruturas Diferenciáveis e Variedades Abstractas

§1. Estruturas diferenciáveis e aplicações suaves.

As variedades, que estudámos até agora, são subconjuntos de espaços vectoriais ambientes de dimensão finita que são localmente difeomorfos a abertos de outros espaços vectoriais de dimensão finita (ou, mais geralmente, a abertos de sectores destes últimos). O espaço vectorial ambiente é utilizado para permitir dizer o que são as aplicações suaves e, em particular, os difeomorfismos, e às variedades neste quadro pode-se dar o nome de *variedades concretas*. O nosso objectivo neste capítulo é a apresentação dos fundamentos da teoria das *variedades abstractas*, que vão ser, mais uma vez, conjuntos localmente difeomorfos a abertos de espaços vectoriais de dimensão finita (ou de sectores destes) mas que não são, em geral, subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita. Há, no entanto, a dificuldade de, sem a presença de uma estrutura suplementar conveniente, não fazer sentido falar de difeomorfismos locais no âmbito de conjuntos arbitrários. É por isso que somos conduzidos a começar por definir uma noção de estrutura diferenciável sobre um conjunto, na presença da qual fará sentido falar de aplicações suaves e, em particular, de difeomorfismos.

VI.1.1 Seja A um conjunto. Vamos chamar *carta* de A a toda a bijecção $\varphi: A \to B$, em que B é uma parte arbitrária de um espaço vectorial E de dimensão finita[108]. No caso em que A é um espaço topológico, dizemos que uma tal carta é *compatível com a topologia* de A, ou que é uma *carta do espaço topológico* A, se $\varphi: A \to B$ for um homeomorfismo.

VI.1.2 É claro que, se A é um conjunto e $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta de A, existe uma única topologia em A com a qual a carta é compatível (*a carta define a topologia*).

VI.1.3 Sejam A um conjunto e $\varphi: A \to B$ e $\psi: A \to C$ duas cartas de A, onde $B \subset E$ e $C \subset F$. Diz-se que as cartas φ e ψ são *compatíveis* se a bijecção

[108] Se quisermos ser mais precisos, a carta não é simplesmente a bijecção φ, mas sim o par formado por esta e pelo espaço vectorial E que se considera como ambiente de B (um mesmo conjunto B pode estar contido num espaço vectorial E e nalgum dos seus subespaços vectoriais).

$\psi \circ \varphi^{-1}: B \to C$, entre subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita, for um difeomorfismo. Fica assim definida uma relação de equivalência na classe das cartas do conjunto A.

Dem: O facto de se ter $\varphi \sim \varphi$ resulta de que $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_B$ que é um difeomorfismo. Supondo que $\varphi \sim \psi$, $\psi \circ \varphi^{-1}: B \to C$ é um difeomorfismo cujo inverso é $\varphi \circ \psi^{-1}: C \to B$, o que mostra que $\psi \sim \varphi$. Dada uma terceira carta $\rho: A \to D \subset H$, se $\varphi \sim \psi$ e $\psi \sim \rho$, então $\psi \circ \varphi^{-1}: B \to C$ e $\rho \circ \psi^{-1}: C \to D$ são difeomorfismos, o que implica que

$$\rho \circ \varphi^{-1} = (\rho \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}): B \to D$$

é um difeomorfismo, e portanto $\varphi \sim \rho$. □

VI.1.4 Sejam A um conjunto e $\varphi: A \to B \subset E$ e $\psi: A \to C \subset F$ duas cartas compatíveis de A. Uma topologia de A é então compatível com a carta φ se, e só se, for compatível com a carta ψ (as cartas φ e ψ definem a mesma topologia em A).

Dem: Basta atender a que se pode escrever $\psi = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$, onde $\psi \circ \varphi^{-1}: B \to C$ é um difeomorfismo, em particular um homeomorfismo. □

VI.1.5 **(Nota)** Sejam $\varphi: A \to B \subset E$ e $\psi: A \to C \subset F$ duas cartas do conjunto A e seja $E' \subset E$ um subespaço vectorial tal que se tenha ainda $B \subset E'$. Tal como observámos na nota de pé de página 108, a carta φ, quando se considera E como espaço ambiente de B, deve ser considerada formalmente diferente da carta φ, quando se considera E' como espaço ambiente de B. No entanto, se recordarmos o que se disse nas alíneas a) e b) da nota II.2.17, sobre a independência da noção de aplicação de classe C^k relativamente aos espaços ambientes que se consideram no domínio e no espaço de chegada, constatamos imediatamente que a carta ψ é compatível com a carta φ, com E como espaço ambiente de B, se, e só se, for compatível com φ, com E' como espaço ambiente de B.

VI.1.6 Chama-se *estrutura diferenciável* de um conjunto, ou de um espaço topológico, A a uma classe de equivalência de cartas do conjunto, ou do espaço topológico, A, para a relação de compatibilidade atrás referida.

É claro que, tendo em conta VI.1.2 e VI.1.4, dada uma estrutura diferenciável de um conjunto A, existe uma única topologia de A tal que ela seja uma estrutura diferenciável do espaço topológico (a estrutura diferenciável determina a topologia). Dizemos que esta topologia é a *topologia associada à estrutura diferenciável*.[109]

VI.1.7 Em geral, dada uma estrutura diferenciável do conjunto A, chamamos *cartas da estrutura diferenciável* às cartas da classe de equivalência em questão. Repare-se que, tendo em conta o que dissémos na nota VI.1.5, se $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta de A e se $E' \subset E$ é um subespaço vectorial tal

[109]Falar de estrutura diferenciável sobre um conjunto ou sobre um espaço topológico é assim meramente uma questão de comodidade.

que $B \subset E'$, então φ é uma carta da estrutura diferenciável, quando se considera E como ambiente de B se, e só se, φ é uma carta da estrutura diferenciável, quando se considera E' como ambiente de B.

Note-se que a definição de estrutura diferenciável que estamos a apresentar não é a mais usual. O que se faz com mais frequência é definir estrutura diferenciável sobre um espaço topológico A a partir de um atlas, isto é, de um conjunto de cartas locais, homeomorfismos de subconjuntos abertos de A sobre subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita (que por vezes se pede que sejam abertos), cartas locais essas que devem ser compatíveis entre si, num sentido conveniente, e cujos domínio devem ter união A.
Para explicar a razão da opção que estamos a tomar, podemos referir que, como se verificará adiante, o que vamos fazer até ao fim desta secção é referir uma série de resultados mais ou menos óbvios e com justificações igualmente óbvias, que serão necessários para podermos utilizar o conceito; pelo contrário, se tivéssemos seguido a via mais usual teríamos igualmente de referir resultados do mesmo tipo, mas com demonstrações técnicamente mais artificiosas e desagradáveis de explicitar.
É claro que, quando se procura uma simplificação, raramente se foge de pagar um preço: Para estabelecermos um resultado importante em muitas aplicações, que garante, em particular, a possibilidade de caracterizar estruturas diferenciáveis a partir de cartas locais, vamos necessitar de provar um resultado não trivial, que consiste essencialmente no teorema do mergulho de Whitney, o que será feito mais adiante na secção 3 (cf. a nota VI.3.16).

VI.1.8 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $A \subset E$ um subconjunto arbitrário, sobre o qual consideramos a topologia induzida. Tem-se então que a aplicação $Id_A\colon A \to A \subset E$ é uma carta de A que define assim uma estrutura diferenciável de A. É esta a estrutura diferenciável que consideramos implicitamente num subconjunto A de um espaço vectorial de dimensão finita (podemos chamar-lhe a *estrutura diferenciável canónica* de A).

VI.1.9 **(O exemplo das variedades de Grassmann abstractas)** Relembremos que, se E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, notamos $\mathbb{G}(E)$ o conjunto dos subespaços vectoriais de E e, para cada $0 \le k \le n$, $\mathbb{G}_k(E)$ o subconjunto daqueles cuja dimensão é k (cf. II.5.12). Pode-se então definir uma *estrutura diferenciável canónica* em $\mathbb{G}(E)$ (e, em particular, uma *topologia canónica* neste conjunto) pela condição de, para cada produto interno que se considere em E, a bijecção φ de $\mathbb{G}(E)$ sobre o subconjunto $G(E) \subset L(E;E)$, cujos elementos são as projecções ortogonais, que a cada $F \in \mathbb{G}(E)$ associa a projecção ortogonal π_F, ser uma carta da estrutura diferenciável.
A topologia de $\mathbb{G}(E)$ é então um compacta e separada e, para cada $0 \le k \le n$, o subconjunto $\mathbb{G}_k(E)$ é aberto e fechado em $\mathbb{G}(E)$.

Dem: É claro que, fixado um produto interno em E, ficamos com uma carta $\varphi\colon \mathbb{G}(E) \to G(E)$ que define uma estrutura diferenciável em $\mathbb{G}(E)$. O que temos que verificar é que esta não depende do produto interno que se considera em E. Para isso, consideramos um segundo produto interno, para o qual notamos $\widehat{\pi}_F$ as projecções ortogonais, $\widehat{G}(E) \subset L(E;E)$ o conjunto destas últimas e $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{G}(E) \to \widehat{G}(E)$ a carta que a F associa $\widehat{\pi}_F$ e ficamos reduzidos a mostrar que as duas cartas φ *e* $\widehat{\varphi}$ são compatíveis, isto é, que a bijecção $\widehat{\varphi} \circ \varphi^{-1}\colon G(E) \to \widehat{G}(E)$, que a π_F associa $\widehat{\pi}_F$, é um difeomorfismo e isso já foi verificado em III.1.22. As propriedades relativas à topologia associada de $\mathbb{G}(E)$ resultam de $\varphi\colon \mathbb{G}(E) \to G(E)$ ser um homeomorfismo que aplica $\mathbb{G}_k(E)$ sobre $G_k(E)$, uma vez que, como foi provado em II.5.13, $G(E) \subset L(E;E)$ é compacto, e evidentemente separado, e os seus subconjuntos $G_k(E)$ são simultaneamente abertos e fechados em $G(E)$. □

VI.1.10 Sejam A um espaço topológico e $\widehat{A} \subset A$ um subconjunto, sobre o qual se considera, naturalmente, a topologia induzida. Tem-se então:

a) Se $\varphi\colon A \to B \subset E$ é uma carta de A, então a restrição

$$\varphi_{/\widehat{A}}\colon \widehat{A} \to \varphi(\widehat{A}) \subset E$$

é uma carta de $\widehat{A}$ (damos-lhe o nome de *restrição* a $\widehat{A}$ da carta local φ).

b) Se $\varphi\colon A \to B \subset E$ e $\psi\colon A \to C \subset F$ são cartas compatíveis de A, então as cartas $\varphi_{/\widehat{A}}$ e $\psi_{/\widehat{A}}$ de $\widehat{A}$ são também compatíveis.

Dem: A alínea a) é trivial. A alínea b) resulta de que a bijecção $\psi_{/\widehat{A}} \circ (\varphi_{/\widehat{A}})^{-1}\colon \varphi(\widehat{A}) \to \psi(\widehat{A})$ é um difeomorfismo, por ser a restrição do difeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1}\colon B \to C$. □

VI.1.11 Sejam A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $\widehat{A} \subset A$. Chama-se então *estrutura diferenciável induzida* em $\widehat{A}$ à estrutura diferenciável definida pela carta $\varphi_{/\widehat{A}}$ de $\widehat{A}$, em que φ é uma carta arbitrária que defina a estrutura diferenciável de A.

Salvo aviso em contrário, num subconjunto de um espaço topológico em que se está a considerar uma estrutura diferenciável, será sempre a estrutura diferenciável induzida aquela que se considera implicitamente.

VI.1.12 As três propriedades seguintes são de demonstração trivial mas são necessárias para que as convenções referidas em, VI.1.8 e VI.1.11 não conduzam a complicações:

a) Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $\widehat{A} \subset A \subset E$. Tem-se então que a estrutura diferenciável canónica de $\widehat{A}$, enquanto subconjunto de E, coincide com a estrutura diferenciável induzida em $\widehat{A}$ pela estrutura diferenciável canónica de A, enquanto subconjunto de E.

b) Seja A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável. Tem-se então que a estrutura diferenciável induzida em A, enquanto subconjunto de A é a estrutura diferenciável de partida[110].

c) Sejam A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e subconjuntos $A'' \subset A' \subset A$. Tem-se então que a estrutura diferenciável de A'' induzida pela estrutura diferenciável de A coincide com a estrutura diferenciável induzida em A'' pela estrutura diferenciável de A' induzida pela de A.

VI.1.13 **(O exemplo das variedades de Grassmann abstractas)** Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, e consideremos a variedade de Grassmann $\mathbb{G}(E)$, cujos elementos são os subespaços vectoriais de E, com a sua estrutura diferenciável canónica (cf. VI.1.9). Seja $E' \subset E$ um subespaço vectorial e consideremos a respectiva variedade de Grassmann $\mathbb{G}(E')$, que é evidentemente um subconjunto de $\mathbb{G}(E)$. Tem-se então que $\mathbb{G}(E')$ é fechado em $\mathbb{G}(E)$ e a estrutura diferenciável induzida em $\mathbb{G}(E')$ é a estrutura diferenciável canónica.

Dem: Fixemos um produto interno em E e consideremos em E' o produto interno induzido. Ficamos então com os correspondentes conjuntos de projecções ortogonais $G(E) \subset L(E;E)$ e $G(E') \subset L(E';E')$ e com as cartas $\varphi\colon \mathbb{G}(E) \to G(E)$ e $\psi\colon \mathbb{G}(E') \to G(E')$, definindo as estruturas diferenciáveis canónicas, definidas por $\varphi(F) = \pi_F$ e $\psi(F) = \pi'_F$, onde notamos π_F a projecção ortogonal de E sobre F e π'_F a projecção ortogonal de E' sobre F. A estrutura diferenciável induzida em $\mathbb{G}(E')$ vai estar assim definida pela carta restrição $\varphi_{/\mathbb{G}(E')}\colon \mathbb{G}(E') \to \varphi(\mathbb{G}(E'))$ pelo que, para provarmos que ela coincide com a estrutura diferenciável canónica, tudo o que temos que verificar é que as cartas $\varphi_{/\mathbb{G}(E')}$ e ψ são compatíveis, ou seja, que a bijecção

$$\varphi_{/\mathbb{G}(E')} \circ \psi^{-1}\colon G(E') \to \varphi(\mathbb{G}(E'))$$

é um difeomorfismo. Ora, uma vez que esta bijecção associa a cada projecção ortogonal π'_F, de E' sobre F, a projecção ortogonal π_F, de E sobre F, o facto de termos um difeomorfismo resulta de aplicar III.1.21 à aplicação linear inclusão $E' \to E$. Por fim, o facto de $\mathbb{G}(E')$ ser fechado em $\mathbb{G}(E)$ resulta de que, com a topologia induzida pela do espaço topológico separado $\mathbb{G}$(E), é um espaço topológico compacto. □

VI.1.14 Sejam A e $\widehat{A}$ espaços topológicos, cada um dos quais munido de uma estrutura diferenciável. Diz-se que uma aplicação $f\colon A \to \widehat{A}$ é de classe C^p se existir uma carta $\varphi\colon A \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de A e uma carta $\widehat{\varphi}\colon \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{E}$ da estrutura diferenciável de $\widehat{A}$ tais que

$$\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}\colon B \to \widehat{B},$$

seja C^p, enquanto aplicação entre subconjuntos de espaços vectoriais de

[110] O autor sente-se um pouco envergonhado ao enunciar uma propriedade tão trivial mas pensa, apesar de tudo, que isso possa ter algum interesse formativo.

dimensão finita. Chamamos *suaves* às aplicações de classe C^∞.
Quando $f: A \to \widehat{A}$ é C^p, f é também contínua e, quaisquer que sejam as cartas $\psi: A \to C \subset F$ da estrutura diferenciável de A e $\widehat{\psi}: \widehat{A} \to \widehat{C} \subset \widehat{F}$ da estrutura diferenciável de $\widehat{A}$, a aplicação

$$\widehat{\psi} \circ f \circ \psi^{-1}: C \to \widehat{C},$$

é ainda C^p.
Dem: O facto de f ser contínua resulta de que podemos escrever

$$f = \widehat{\varphi}^{-1} \circ (\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi,$$

onde φ e $\widehat{\varphi}^{-1}$ são homeomorfismos e $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}$ é contínua por ser uma aplicação C^p entre subconjuntos de E e $\widehat{E}$. O facto de, para cartas arbitrárias $\psi: A \to C \subset F$ e $\widehat{\psi}: \widehat{A} \to \widehat{C} \subset \widehat{F}$, $\widehat{\psi} \circ f \circ \psi^{-1}: C \to \widehat{C}$ ser ainda C^p vem de que podemos escrever

$$\widehat{\psi} \circ f \circ \psi^{-1} = (\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}) \circ (\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}),$$

onde $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}: B \to \widehat{B}$ é C^p e $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}: \widehat{B} \to \widehat{C}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}: C \to B$ são difeomorfismos.

VI.1.15 Por exemplo, se $f: A \to \widehat{A}$ é uma aplicação constante, f é trivialmente suave.

VI.1.16 **a)** Sejam A é um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $\widehat{A} \subset A$ um subconjunto, sobre o qual se considera a estrutura diferenciável induzida. A inclusão $\iota: \widehat{A} \to A$ é então uma aplicação suave. Em particular, a aplicação identidade $Id_A: A \to A$ é uma aplicação suave.
b) Sejam A, $\widehat{A}$ e $\tilde{A}$ espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $f: A \to \widehat{A}$ e $g: \widehat{A} \to \tilde{A}$ duas aplicações de classe C^p. Então que a aplicação composta $g \circ f: A \to \tilde{A}$ é também de classe C^p.
Dem: Para a alínea a) basta escolher uma carta $\varphi: A \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de A e utilizar esta carta para o espaço de chegada e a carta $\varphi_{/\widehat{A}}: \widehat{A} \to \varphi(\widehat{A}) \subset E$ para o domínio, notando que

$$\varphi \circ Id_A \circ (\varphi_{/\widehat{A}})^{-1}: \varphi(\widehat{A}) \to B$$

é a inclusão, e portanto suave. Para demonstrar b), consideramos cartas arbitrárias $\varphi: A \to B \subset E$, $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{E}$ e $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \to \tilde{B} \subset \tilde{E}$ e reparamos que se tem

$$\tilde{\varphi} \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\tilde{\varphi} \circ g \circ \widehat{\varphi}^{-1}) \circ (\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}),$$

com $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}: B \to \widehat{B}$ e $\tilde{\varphi} \circ g \circ \widehat{\varphi}^{-1}: \widehat{B} \to \tilde{B}$ de classe C^p, o que implica que $\tilde{\varphi} \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}: B \to \tilde{B}$ é de classe C^p. □

VI.1.17 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $A \subset E$ e $B \subset F$ dois subconjuntos e $f: A \to B$ uma aplicação. Tem-se então que a aplicação f é C^p, enquanto aplicação entre subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita, se, e só se, f é C^p, relativamente às estruturas diferenciáveis de A e de B, enquanto subconjuntos de E e de F, respectivamente.

Dem: Basta utilizarmos a definição, com as cartas $Id_A: A \to A \subset E$ e $Id_B: B \to B \subset F$. □

VI.1.18 Sejam A e $\widehat{A}$ espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $\widehat{A}' \subset \widehat{A}$ um subconjunto, sobre o qual se considera a estrutura diferenciável induzida. Se $f: A \to \widehat{A}'$ é uma aplicação, então f é de classe C^p enquanto aplicação $A \to \widehat{A}'$ se, e só se, o for enquanto aplicação $A \to \widehat{A}$.

Dem: Para uma das implicações, basta atender a que $f: A \to \widehat{A}$ é a composta de $f: A \to \widehat{A}'$ com a inclusão $\iota: \widehat{A}' \to \widehat{A}$. Suponhamos, reciprocamente, que $f: A \to \widehat{A}$ é C^p. Podemos considerar uma carta $\varphi: A \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de A e uma carta $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{E}$ da estrutura diferenciável de $\widehat{A}$ e então $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}: B \to \widehat{B}$ é de classe C^p. Então a restrição $\widehat{\varphi}_{/\widehat{A}'}: \widehat{A}' \to \widehat{\varphi}(\widehat{A}') \subset \widehat{B} \subset \widehat{E}$ é uma carta de $\widehat{A}'$ e $\widehat{\varphi}_{/\widehat{A}'} \circ f \circ \varphi^{-1}: B \to \widehat{\varphi}(\widehat{A}')$ coincide com $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}: B \to \widehat{B}$, sendo assim também C^p, o que mostra que $f: A \to \widehat{A}'$ é C^p. □

VI.1.19 Sejam A e $\widehat{A}$ espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $A' \subset A$ um subconjunto, sobre o qual se considera a estrutura diferenciável induzida. Se $f: A \to \widehat{A}$ é uma aplicação de classe C^p, então a restrição $f_{/A'}: A' \to \widehat{A}$ é também de classe C^p.

Dem: Basta atender a que a restrição não é mais do que a composta de $f: A \to \widehat{A}$ com a inclusão $\iota: A' \to A$. □

VI.1.20 **(O exemplo das variedades de Grassmann abstractas)** Sejam E e $\widehat{E}$ espaços vectoriais, reais ou complexos, de dimensão finita e $\xi: E \to \widehat{E}$ uma aplicação linear injectiva. Considerando então as correspondentes variedades de Grassmann $\mathbb{G}(E)$ e $\mathbb{G}(\widehat{E})$, com as estruturas diferenciáveis canónicas, tem lugar uma aplicação suave $\xi_*: \mathbb{G}(E) \to \mathbb{G}(\widehat{E})$ definida por $\xi_*(F) = \xi(F)$.

Dem: Fixemos produtos internos em E e em $\widehat{E}$ e consideremos os correspondentes conjuntos $G(E)$ e $G(\widehat{E})$, cujos elementos são as projecções ortogonais, e as cartas $\varphi: \mathbb{G}(E) \to G(E)$ e $\widehat{\varphi}: \mathbb{G}(\widehat{E}) \to G(\widehat{E})$, que associam a cada subespaço vectorial a correspondente projecção ortogonal, que definem as estruturas diferenciáveis canónicas. Para mostrar que a aplicação ξ_* é suave basta assim mostrar que a composta $\widehat{\varphi} \circ \xi_* \circ \varphi^{-1}: G(E) \to G(\widehat{E})$ é suave e, uma vez que esta composta associa a cada projecção ortogonal π_F a projecção ortogonal $\pi_{\xi(F)}$, essa suavidade está garantida por III.1.21. □

VI.1.21 **(Variedades de Grassmann abstractas e fibrados vectoriais)** Sejam E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, G um espaço vectorial real de dimensão finita, $A \subset G$ um conjunto e $(E_x)_{x\in A}$ uma família de subespaços vectoriais de E. Tem-se então que esta família é um fibrado vectorial se, e só se, for suave a aplicação de A para $\mathbb{G}(E)$ que a cada x associa E_x.

Dem: Fixemos um produto interno em E e consideremos o correspondente conjunto $G(E)$ das projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E e a carta $\varphi\colon \mathbb{G}(E) \to G(E)$, que define a estrutura diferenciável da variedade de Grassmann, a qual associa a cada F a projecção ortogonal π_F. A aplicação de A para $\mathbb{G}(E)$ que a x associa E_x é assim suave se, e só se, for sua a sua composta com φ, isto é a aplicação de A em $G(E)$ que a cada x associa a projecção ortogonal π_x de E sobre E_x e sabemos que isso é equivalente ao facto de a família ser um fibrado vectorial (cf. a alínea b) de III.1.18). □

VI.1.22 **(A suavidade é uma noção local)** Sejam A e $\widehat{A}$ espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $(W_j)_{j\in J}$ uma família de abertos de A tal que $A = \bigcup_{j\in J} W_j$. Seja $f\colon A \to \widehat{A}$ uma aplicação tal que, para cada $j \in J$, a restrição $f_{/W_j}\colon W_j \to \widehat{A}$ seja C^p. Tem-se então que $f\colon A \to \widehat{A}$ é C^p.

Dem: Sejam $\varphi\colon A \to B \subset E$ e $\psi\colon \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{E}$ cartas locais das estruturas diferenciáveis de A e de $\widehat{A}$, respectivamente. Tem-se então que, para cada j, $\varphi_{/W_j}\colon W_j \to \varphi(W_j) \subset B \subset E$ é uma carta da estrutura diferenciável induzida em W_j, com $\varphi(W_j)$ aberto em B. Vemos então que a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon B \to \widehat{B}$ tem restrição a cada um dos abertos $\varphi(W_j)$ de B, cuja união é B, igual a $\psi \circ f \circ (\varphi_{/W_j})^{-1}\colon \varphi(W_j) \to \widehat{B}$, que é C^p, o que implica que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon B \to \widehat{B}$ é C^p, e portanto que $f\colon A \to \widehat{A}$ é C^p. □

VI.1.23 Sejam A e $\widehat{A}$ espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis. Diz-se que uma aplicação bijectiva $f\colon A \to \widehat{A}$ é um *difeomorfismo* se as aplicações $f\colon A \to \widehat{A}$ e $f^{-1}\colon \widehat{A} \to A$ são ambas suaves. É claro que f é então também um homeomorfismo (toda a aplicação suave é contínua).

VI.1.24 Os difeomorfismos entre conjuntos munidos de estruturas diferenciáveis gozam trivialmente das seguintes propriedades:

a) Se A é um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, então $Id_A\colon A \to A$ é um difeomorfismo.

b) Se A e $\widehat{A}$ são espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, e se $f\colon A \to \widehat{A}$ é um difeomorfismo, então $f^{-1}\colon \widehat{A} \to A$ é um difeomorfismo.

c) Se A, $\widehat{A}$ e $\tilde{A}$ são espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, e se $f\colon A \to \widehat{A}$ e $g\colon \widehat{A} \to \tilde{A}$ são difeomorfismos, então $g \circ f\colon A \to \tilde{A}$ é um difeomorfismo.

d) Se A e $\widehat{A}$ são espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, e se $f\colon A \to \widehat{A}$ é um difeomorfismo, então, para cada subconjunto $A' \subset A$, a bijecção $f_{/A'}\colon A' \to f(A')$ é também um difeomorfismo.

O resultado que enunciamos em seguida identifica, *a posteriori*, as cartas duma estrutura diferenciável com os difeomorfismos desta para subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita, com a estrutura diferenciável canónica.

VI.1.25 Seja A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável. Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $B \subset E$ um subconjunto e $\varphi: A \to B$ uma aplicação bijectiva. Tem-se então que φ é uma carta de estrutura diferenciável de A se, e só se, φ é um difeomorfismo, quando se considera em B a estrutura diferenciável que lhe vem de ser uma parte de E.
Dem: Vamos começar por supor que $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta da estrutura diferenciável de A. Considerando a carta da estrutura diferenciável de B, $Id_B: B \to B \subset E$, vemos que $Id_B \circ \varphi \circ \varphi^{-1}: B \to B$ é a aplicação identidade, em particular suave, o que mostra que $\varphi: A \to B$ é uma aplicação suave, e, do mesmo modo, $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ Id_B: B \to B$ é a identidade, em particular suave, o que mostra que $\varphi^{-1}: B \to A$ é também uma aplicação suave. Ficou assim provado que $\varphi: A \to B$ é um difeomorfismo.
Suponhamos agora, reciprocamente, que $\varphi: A \to B$ é um difeomorfismo. Consideremos uma carta $\psi: A \to C \subset F$ da estrutura diferenciável de A. O facto de $\varphi: A \to B$ ser suave implica que $Id_B \circ \varphi \circ \psi^{-1}: C \to B$ é uma aplicação suave e o facto de $\varphi^{-1}: B \to A$ ser suave implica que $\psi \circ \varphi^{-1} \circ Id_B: B \to C$ é suave. Concluímos assim que a bijecção $\psi \circ \varphi^{-1}: B \to C$, cujo inverso é $\varphi \circ \psi^{-1}$, é um difeomorfismo, o que implica que as cartas φ e ψ são compatíveis, e portanto que φ também é uma carta da estrutura diferenciável de A. □

VI.1.26 **(Transporte duma estrutura diferenciável)** Sejam A e $\widehat{A}$ conjuntos (respectivamente, espaços topológicos), o primeiro dos quais munido de uma estrutura diferenciável, e $f: A \to \widehat{A}$ uma bijecção (respectivamente um homeomorfismo). Existe então sobre $\widehat{A}$ uma, e uma só, estrutura diferenciável, relativamente à qual f fica a ser um difeomorfismo (dizemos então que esta estrutura diferenciável de $\widehat{A}$ é a obtida a partir da de A por *transporte por meio de* f). Para cada carta $\varphi: A \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de A, a bijecção $\varphi \circ f^{-1}: \widehat{A} \to B \subset E$ vai ser uma carta da estrutura diferenciável de $\widehat{A}$.
Dem: Escolhamos uma carta $\varphi: A \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de A e consideremos o homeomorfismo $\varphi \circ f^{-1}: \widehat{A} \to B \subset E$. Dada uma estrutura diferenciável de $\widehat{A}$ tal que $f: A \to \widehat{A}$ seja um difeomorfismo, podemos aplicar duas vezes VI.1.25 para deduzir $\varphi \circ f^{-1}: \widehat{A} \to B \subset E$ é um difeomorfismo, e portanto uma carta da estrutura diferenciável de $\widehat{A}$. Ficou assim provada a unicidade da estrutura diferenciável de $\widehat{A}$ nas condições pedidas e, quanto à existência, consideramos em $\widehat{A}$ a estrutura diferenciável definida pela carta $\varphi \circ f^{-1}: \widehat{A} \to B \subset E$ e reparamos que, para esta estrutura diferenciável, $f: A \to \widehat{A}$ fica um difeomorfismo, uma vez que se pode

escrever $f = (\varphi \circ f^{-1})^{-1} \circ \varphi$ onde, mais uma vez por VI.1.25, $\varphi: A \to B$ e $(\varphi \circ f^{-1})^{-1}: B \to \widehat{A}$ são difeomorfismos. □

VI.1.27 **(Corolário)** Seja A um conjunto, sobre o qual consideramos duas estruturas diferenciáveis. Tem-se então que estas estruturas diferenciáveis coincidem se, e só se, a bijecção $Id_A: A \to A$ for um difeomorfismo, quando no domínio se considera a primeira estrutura diferenciável e no espaço de chegada se considera a segunda estrutura diferenciável.

Dem: A condição necessária resulta da alínea a) de VI.1.24 e a condição suficiente é uma consequência de pelo resultado precedente, não existir mais que uma estrutura diferenciável em A para a qual a bijecção $Id_A: A \to A$ fique um difeomorfismo, com essa estrutura no espaço de chegada e a primeira estrutura no espaço de partida. □

VI.1.28 Seja A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável. Tem-se então:

a) Se $F_1, \ldots, F_n$ são espaços vectoriais de dimensão finita e se, para cada $1 \leq j \leq n$, $f_j: A \to F_j$ é uma aplicação C^p, então é também C^p a aplicação $f: A \to F_1 \times \cdots \times F_n$, definida por

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

(a aplicação com as componentes f_j).

b) Se F é um espaço vectorial de dimensão finita e se $f, g: A \to F$ são duas aplicações C^p, então a aplicação $f + g: A \to F$ é também C^p.

c) Sejam F, G, H espaços vectoriais de dimensão finita e $\pi: F \times G \to H$ uma aplicação bilinear. Se $f: A \to F$ e $g: A \to G$ são aplicações C^p, então é também C^p a aplicação $f \cdot g: A \to H$, definida por

$$f \cdot g(x) = \pi(f(x), g(x)).$$ [111]

Dem: Comecemos por provar a). Podemos considerar uma carta $\varphi: A \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de A e as cartas $Id_{F_j}: F_j \to F_j$ das estruturas diferenciáveis dos F_j e concluímos que são suaves as aplicações $f_j \circ \varphi^{-1}: B \to F_j$ e portanto, pelo resultado já conhecido no quadro dos subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita,

$$f \circ \varphi^{-1}: B \to F_1 \times \cdots \times F_n$$

é também suave, o que mostra que $f: A \to F_1 \times \cdots \times F_n$ é suave. As alíneas b) e c) são agora consequências de a) e do facto de a composta de aplicações suaves ser suave, visto que $f + g$ é a composta de $+: F \times F \to F$ com a

[111] Dentro do espírito do que foi dito em I.5.13, este facto pode ser enunciado intuitivamente dizendo que o produto de aplicações C^p é C^p. É claro que um caso particular importante é aquele em que temos, como aplicação bilinear, a multiplicação dos escalares, $\mathbb{R} \times F \to F$ ou $\mathbb{C} \times F \to F$, caso em que a expressão “produto de aplicações C^p” se aplica num sentido mais estrito.

aplicação com componentes f e g e $f \cdot g$ é a composta de $\pi: F \times G \to H$ com a aplicação com componentes f e g. □

A alínea a) do resultado precedente pode ser generalizada ao caso em que as funções f_j tomam valores em em conjuntos A_j munidos de estruturas diferenciáveis, desde que se explicite qual a estrutura diferenciável que se considera no produto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$.

VI.1.29 Sejam $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos munidos de estruturas diferenciáveis. Existe então sobre o produto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ uma, e uma só, estrutura diferenciável (a *estrutura diferenciável produto*, que é a que se considera implicatamente) com a seguinte propriedade: Quaisquer que sejam o conjunto A, munido de uma estrutura diferenciável, e as aplicações $f_j: A \to A_j$ ($1 \le j \le n$), a aplicação

$$f: A \to A_1 \times \cdots \times A_n, \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

é de classe C^p se, e só se, cada aplicação $f_j: A \to A_j$ é de classe C^p.
Para esta estrutura diferenciável, cuja topologia associada é a topologia produto das topologias associadas dos A_j, as projecções canónicas

$$\pi_j: A_1 \times \cdots \times A_n \to A_j$$

são aplicações suaves.
Mais precisamente, se, para cada j, $\varphi_j: A_j \to B_j \subset E_j$ é uma carta da estrutura diferenciável de A_j, então

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n: A_1 \times \cdots \times A_n \to B_1 \times \cdots \times B_n \subset E_1 \times \cdots \times E_n$$

é uma carta da estrutura diferenciável de $A_1 \times \cdots \times A_n$.
Dem: Comecemos por reparar que, se considerarmos uma estrutura diferenciável em $A_1 \times \cdots \times A_n$ verificando a condição do enunciado, então as projecções canónicas $\pi_j: A_1 \times \cdots \times A_n \to A_j$ ficam suaves, uma vez que a aplicação cujas componentes são os π_j não é mais do que a aplicação identidade de $A_1 \times \cdots \times A_n$, portanto uma aplicação suave. A unicidade de uma estrutura diferenciável em $A_1 \times \cdots \times A_n$ verificando a condição do enunciado é agora uma consequência de VI.1.27, uma vez que, a haver duas estruturas diferenciáveis nessas condições a aplicação identidade de $A_1 \times \cdots \times A_n$ ia ser uma aplicação suave de cada uma delas para a outra, por isso acontecer às suas componentes, que são as projecções canónicas.
Vamos agora provar a existência de uma estrutura diferenciável em $A_1 \times \cdots \times A_n$ verificando a condição do enunciado. Escolhamos, para cada $1 \le j \le n$, uma carta $\varphi_j: A_j \to B_j \subset E_j$ da estrutura diferenciável de A_j e consideremos uma estrutura diferenciável em $A_1 \times \cdots \times A_n$ definida pela carta

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n : A_1 \times \cdots \times A_n \to B_1 \times \cdots \times B_n \subset E_1 \times \cdots \times E_n$$

de $A_1 \times \cdots \times A_n$. Uma vez que esta carta é um homeomorfismo, quando se considera em $A_1 \times \cdots \times A_n$ a topologia produto, vemos que a topologia associada a esta estrutura diferenciável é a topologia produto. Consideremos agora um conjunto A, munido de uma estrutura diferenciável definida por uma carta $\varphi: A \to B \subset E$, e n aplicações $f_j: A \to A_j$, assim como a correspondente aplicação $f: A \to A_1 \times \cdots \times A_n$ definida por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Tem-se então que a aplicação

$$(\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n) \circ f \circ \varphi^{-1}: B \to B_1 \times \cdots \times B_n$$

está definida por

$$(\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n) \circ f \circ \varphi^{-1}(y) = (\varphi_1 \circ f_1 \circ \varphi^{-1}(y), \ldots, \varphi_n \circ f_n \circ \varphi^{-1}(y)),$$

pelo que f é de classe C^p, se, e só se, $(\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n) \circ f \circ \varphi^{-1}$ é C^p, se e só se, cada $\varphi_j \circ f_j \circ \varphi^{-1}: B \to B_j$ é C^p, se, e só se, cada $f_j: A \to A_j$ é C^p, como pretendíamos. □

VI.1.30 Como é habitual, é importante assegurarmo-nos que a convenção de considerar implicitamente a estrutura diferenciável produto num produto cartesiano de conjuntos munidos de estruturas diferenciáveis não conduz a ambiguidades em situações em que outras convenções já referidas também se apliquem. É para isso que enunciamos os dois resultados seguintes:

a) Sejam, para cada $1 \le j \le n$, E_j um espaço vectorial de dimensão finita e $A_j \subset E_j$, subre o qual se considera a estrutura diferenciável canónica. Tem-se então que a estrutura diferenciável canónica de $A_1 \times \cdots \times A_n$, enquanto parte do espaço vectorial de dimensão finita $E_1 \times \cdots \times E_n$, coincide com a estrutura diferenciável produto das estruturas diferenciáveis dos A_j.

b) Sejam, para cada $1 \le j \le n$, A_j um conjunto munido de uma estrutura diferenciável, e $\widehat{A}_j \subset A_j$, sobre o qual se considera a estrutura diferenciável induzida. Tem-se então que em $\widehat{A}_1 \times \cdots \times \widehat{A}_n$ coincidem a estrutura diferenciável produto das estruturas diferenciáveis dos $\widehat{A}_j$ e a estrutura diferenciável induzida pela estrutura diferenciável produto de $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Dem: Para a alínea a) basta atender a que cada $Id_{A_j}: A_j \to A_j \subset E_j$ é uma carta local da estrutura diferenciável canónica de A_j e portanto

$$Id_{A_1 \times \cdots \times A_n A'}: A_1 \times \cdots \times A_n \to A_1 \times \cdots \times A_n \subset E_1 \times \cdots \times E_n,$$

que não é mais do que $Id_{A_1} \times \cdots \times Id_{A_n}$, é simultaneamente uma carta local de ambas as estruturas diferenciáveis de $A_1 \times \cdots \times A_n$. Quanto à alínea b), basta verificarmos que a estrutura diferenciável induzida em $\widehat{A}_1 \times \cdots \times \widehat{A}_n$ pela estrutura diferenciável produto de $A_1 \times \cdots \times A_n$ verifica a condição que define a estrutura produto de $\widehat{A}_1 \times \cdots \times \widehat{A}_n$ e isso é uma consequência da mesma condição para a definição da estrutura produto de $A_1 \times \cdots \times A_n$ e da propriedade referida em VI.1.18. $\square$

VI.1.31 Sejam, para cada $1 \le j \le n$, A_j, e $\widehat{A}_j$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $f_j: A_j \to \widehat{A}_j$ uma aplicação C^p. É então C^p a aplicação

$$f_1 \times \cdots \times f_n: A_1 \times \cdots \times A_n \to \widehat{A}_1 \times \cdots \times \widehat{A}_n.$$

Em consequência, se os f_j fossem difeomorfismos, o mesmo ia acontecer a $f_1 \times \cdots \times f_n$.

Dem: A segunda afirmação é uma consequência trivial da primeira e, para esta, basta atender a que, sendo $\pi_j: A_1 \times \cdots \times A_n \to A_j$ as projecções canónicas, as componentes da aplicação

$$f_1 \times \cdots \times f_n: A_1 \times \cdots \times A_n \to \widehat{A}_1 \times \cdots \times \widehat{A}_n$$

são as aplicações de classe C^p $f_j \circ \pi_j: A_1 \times \cdots \times A_n \to \widehat{A}_j$. $\square$

VI.1.32 **(Prolongamento de funções suaves)** Sejam A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, $A' \subset A$ um subconjunto, G um espaço vectorial de dimensão finita e $f: A' \to G$ uma aplicação de classe C^p. Existe então um aberto U de A, com $A' \subset U$ e uma aplicação de classe C^p $\overline{f}: U \to G$ cuja restrição a A' seja f.

Dem: Seja $\varphi: A \to B \subset F$ uma carta da estrutura diferenciável de A. Aplicando II.3.10 à aplicação C^p $f \circ (\varphi^{-1})_{/\varphi(A')}: \varphi(A') \to G$, podemos considerar um aberto V de F, contendo $\varphi(A')$, e um prolongamento C^p $g: V \to G$ de $f \circ (\varphi^{-1})_{/\varphi(A')}$. Tem-se então que $V \cap B$ é um aberto de B contendo $\varphi(A')$, pelo que $U = \varphi^{-1}(V \cap B)$ é um aberto de A contendo A', e podemos então considerar o prolongamento C^p $\overline{f}: U \to G$ de f definido por $\overline{f}(x) = g(\varphi(x))$. $\square$

VI.1.33 **(Teorema da partição da unidade)** Sejam A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $(A_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de A de união A. Existe então uma família localmente finita de funções suaves $g_j: A \to [0,1]$, onde $j \in J$, tal que cada g_j é nula fora de uma certa parte C_j de A_j, fechada em A, e que, para cada $x \in A$, $\sum\limits_{j \in J} g_j(x) = 1$.

Como na secção II.3, dizemos que a família das aplicações g_j é uma *partição da unidade* de A subordinada à cobertura aberta de A constituída pelos conjuntos A_j.

Dem: O resultado deduz-se trivialmente da versão demonstrada em II.3.11, através da consideração de uma carta $\varphi: A \to B \subset F$ da estrutura diferenciável de A. $\square$

VI.1.34 **(Prolongamento global de funções suaves)** Sejam A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, $A' \subset A$ um subconjunto **fechado**, G um espaço vectorial de dimensão finita e $f: A' \to G$ uma aplicação de classe C^p. Existe então uma aplicação de classe C^p $\overline{f}: A \to G$ cuja restrição a A' seja f.

Dem: O resultado deduz-se trivialmente da versão demonstrada em II.3.12, através da consideração de uma carta $\varphi: A \to B \subset F$ da estrutura diferenciável de A. □

O resultado que estabelecemos em seguida é uma consequência da existência de partições da unidade, que teremos ocasião de utilizar.

VI.1.35 **(Aplicações suaves próprias)** Seja A um espaço topológico localmente compacto, munido de uma estrutura diferenciável. Existe então uma função suave $\theta: A \to [0, +\infty[$ com a propriedade de, para cada $r \geq 0$, existir um compacto $K \subset A$ tal que, para cada $x \in A \setminus K$, $\theta(x) > r$ (no caso em que M é compacto, este resultado é trivial, visto que se pode tomar $K = M$. No caso geral, ele exprime que $\theta: M \to [0, +\infty[$ é uma *aplicação própria*, ou que θ converge para $+\infty$ no "ponto do infinito" de M).

Dem: Uma vez que A, sendo homeomorfo a um subconjunto de um espaço vectorial de dimensão finita, é separado e de base contável, podemos aplicar o lema II.7.9, para garantir a existência de uma sucessão de compactos de A, $(K_n)_{n\geq 1}$ tal que $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ e que $A = \bigcup_{n\geq 1} K_n$. Pelo teorema da partição da unidade, relativo à cobertura aberta de A constituída pelos abertos $\text{int}(K_n)$, podemos agora considerar uma família localmente finita de funções suaves $g_n: A \to [0, 1]$, onde $n \geq 1$, tal que $g_n(x) = 0$, para cada $x \notin \text{int}(K_n)$, e que, para cada $x \in A$, $\sum_{n\geq 1} g_n(x) = 1$. Uma vez que a família das funções $ng_n: A \to [0, +\infty[$ é trivialmente também localmente finita, pode-se definir uma função suave $\theta: A \to [0, +\infty[$ por

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ng_n(x)$$

(cada ponto de A pertence a um aberto de A onde a soma anterior coincide com uma soma finita de funções suaves). Vemos agora que, para cada $r \geq 0$, podemos considerar $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq r$ e o compacto K_k, tendo-se então, para cada $x \in A \setminus K_k$ e $1 \leq j \leq k$, $g_j(x) = 0$, donde

$$\theta(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} ng_n(x) \geq \sum_{n=k+1}^{\infty} (k+1)g_n(x) = (k+1)\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = k+1 > r,$$

o que termina a demonstração. □

§2. Variedades abstractas.

VI.2.1 Sejam A e $\widehat{A}$ espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, $x_0 \in A$ e $y_0 \in \widehat{A}$. Diz-se que o par (A, x_0) é *localmente difeomorfo* ao par $(\widehat{A}, y_0)$, ou que A, no ponto x_0, é *localmente difeomorfo* a $\widehat{A}$, no ponto y_0, se existir um aberto U de A, com $x_0 \in U$, um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{A}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, e um difeomorfismo $\varphi: U \to \widehat{U}$ tal que $\varphi(x_0) = y_0$. Diz-se então também que φ é um *difeomorfismo local* de (A, x_0) sobre $(\widehat{A}, y_0)$ (comparar com II.4.2).

VI.2.2 Repetindo os argumentos utilizados em II.4.3, no quadro dos subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita, verifica-se que a relação "localmente difeomorfo" é uma relação de equivalência na classe dos pares formados por um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e por um dos seus pontos.

VI.2.3 Seja A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e seja $\varphi: A \to B \subset E$ uma carta da estrutura diferenciável. Para cada $x \in A$, o par (A, x) fica então localmente difeomorfo a $(B, \varphi(x))$, a aplicação φ sendo um difeomorfismo local entre estes pares (é mesmo um difeomorfismo global).

VI.2.4 Sejam M um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $x_0 \in M$. Tal como no caso dos subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita, dizemos que o par (M, x_0) é uma *variedade de dimensão n e índice p*, ou que M é, no ponto x_0, uma variedade de dimensão n e índice p, se M, no ponto x_0, é localmente difeomorfo a um sector de índice p de um espaço vectorial de dimensão n, no ponto 0.

Tal como no caso particular referido, é imediato constatar que, quando (M, x_0) é uma variedade de dimensão n e índice p, M, no ponto x_0, é mesmo localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^n_p = \mathbb{R}^{n-p} \times [0, +\infty[^p$, no ponto 0 (cf. a alínea b) de II.6.12).

VI.2.5 Sejam M um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $x_0 \in M$. Se $\varphi: M \to B \subset E$ é uma carta da estrutura diferenciável de M, então (M, x_0) é uma variedade de dimensão n e índice p se, e só se, $(B, \varphi(x_0))$ for uma variedade de dimensão n e índice p. Em particular, a dimensão e o índice de M no ponto x_0 são números bem definidos e a dimensão é menor ou igual que a dimensão do espaço vectorial E (as dimensões de M nos diferentes pontos constituem sempre um conjunto limitado).

Dem: Basta atender a VI.2.3, ao facto de a relação "…localmente difeomorfo a…" ser uma relação de equivalência e ao facto de a dimensão e o índice serem números bem definidos no quadro das variedades que são subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita. □

VI.2.6 Sejam M um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, $x_0 \in M$ e $A \subset M$ uma vizinhança de x_0. Tem-se então que (M, x_0) e (A, x_0) são localmente difeomorfos (a identidade de int(A) é um difeomorfismo local), em particular (M, x_0) é uma variedade de dimensão n e índice p se, e só se, isso acontecer a (A, x_0).

VI.2.7 Seja M um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável. Diz-se que M é uma *variedade* (ou uma *variedade abstracta*[112]) se, para cada $x \in M$, o par (M, x) é uma variedade de dimensão n e índice p (a dimensão e o índice podendo variar de ponto para ponto).
No caso em que a dimensão n é a mesma em todos os pontos, diz-se que M é uma *variedade de dimensão* n e no caso em que o índice é 0 em todos os pontos, diz-se que M é uma *variedade sem bordo*.

VI.2.8 Seja M um espaço topológico discreto. Tem-se então que M admite uma estrutura diferenciável se, e só se, M é finito ou numerável e, nesse caso, uma tal estrutura é única e torna M uma variedade de dimensão 0.
Dem: Suponhamos que M admite uma estrutura diferenciável, definida por uma carta $\varphi: M \to B \subset E$. Uma vez que φ é um homeomorfismo, segue-se que B tem a topologia discreta, sendo assim uma variedade de dimensão 0, em particular um conjunto finito ou numerável (cf, a alínea c) de II.7.8). Concluímos assim que M é também finito ou numerável e uma variedade de dimensão 0. Para provar a unicidade supomos que M tem outra estrutura diferenciável, definida por uma carta $\psi: M \to C \subset F$. Como antes, C tem a topologia discreta e daqui resulta que a bijecção $\psi \circ \varphi^{-1}: B \to C$, cujo inverso é $\varphi \circ \psi^{-1}: C \to B$ é um difeomorfismo, uma vez que ela e a sua inversa são aplicações suaves, por terem restrições constantes, e portanto suaves, a cada um dos subconjuntos unitários dos seus domínios que constituem uma cobertura aberta destes. As duas cartas φ e ψ são assim compatíveis, o que mostra que as duas estruturas diferenciáveis coincidem. Resta-nos provar a existência de uma tal estrutura diferenciável para qualquer espaço topológico discreto finito ou numerável M. Para isso, consideramos um subconjunto discreto $B \subset \mathbb{R}$ com o mesmo número de elementos que M, por exemplo o conjunto $\mathbb{N}$, se B é infinito, ou o conjunto dos números naturais entre 1 e n, se M tem n elementos e consideramos uma bijecção $\varphi: M \to B$, a qual vai ser um homeomorfismo, uma vez que toda a aplicação cujo domínio tem a topologia discreta é contínua. A estrutura diferenciável de M definida pela carta φ é então compatível com a topologia discreta. □

---

[112]A designação *variedade abstracta* aparece por oposição às *variedades concretas*, que são aquelas que se estudam no quadro dos subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita. Note-se que uma variedade concreta vai ser, em particular, uma variedade abstracta.

VI.2.9 **(O exemplo das variedades de Grassmann abstractas)** Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n e consideremos a correspondente variedade de Grassmann $\mathbb{G}(E)$, cujos elementos são os subespaços vectoriais de E, com a estrutura diferenciável canónica. Tem-se então que $\mathbb{G}(E)$ é uma variedade sem bordo cuja dimensão em cada F, subespaço de dimensão k, é $k(n-k)$, se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, e $2k(n-k)$, se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Dem: Fixemos um produto interno e consideremos o correspondente conjunto $G(E) \subset L(E;E)$ cujos elementos são as projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E e a carta $\varphi: \mathbb{G}(E) \to G(E)$, que define a estrutura diferenciável de $\mathbb{G}(E)$, que está definida por $\varphi(F)=\pi_F$. O facto de $\mathbb{G}(E)$ ser em cada F uma variedade de índice 0 e com a dimensão indicada no enunciado resulta de isso acontecer a $G(E)$ em π_F, tendo em conta II.5.13. □

Alguns dos resultados que enunciamos em seguida são generalizações triviais de resultados análogos já conhecidos para as variedades contidas num espaço vectorial ambiente e podem ser deduzidos trivialmente destes últimos, por consideração de cartas que definam as estruturas diferenciáveis em questão (cf. VI.2.3). Quando isso acontecer, limitamos as suas demonstrações a uma referência ao resultado já conhecido que lhes corresponde.

VI.2.10 **(Algumas propriedades topológicas das variedades)** Seja M uma variedade abstracta. Tem-se então:

a) M é um espaço topológico localmente compacto.

b) M é um espaço topológico localmente conexo[113]. Em particular as componentes conexas de M são conjuntos abertos em M, e portanto também variedades, com a mesma dimensão e índice que M em cada ponto.

c) O conjunto das componentes conexas de M é finito ou numerável.

Dem: Ver II.6.21 e II.7.8. □

VI.2.11 Sejam M e $\widehat{M}$ espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis tais que M seja uma variedade com dimensão n e índice p num ponto $x_0 \in M$ e $\widehat{M}$ seja uma variedade com dimensão $\widehat{n}$ e índice $\widehat{p}$ num ponto $y_0 \in \widehat{M}$. Tem-se então que $M \times \widehat{M}$ é, no ponto (x_0, y_0), uma variedade com dimensão $n+\widehat{n}$ e índice $p+\widehat{p}$.

Mais geralmente, seja, para cada $1 \le j \le N$, M_j um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável e que seja uma variedade com dimensão n_j e índice p_j num certo $x_{j_0} \in M_j$. Tem-se então que $M_1 \times \cdots \times M_N$ é, no ponto $(x_{10}, \ldots, x_{N0})$ uma variedade com dimensão $n_1 + \cdots + n_N$ e índice $p_1 + \cdots + p_N$.

Dem: Ver II.6.14 e II.6.15. □

[113] Aliás, mesmo localmente conexo por arcos.

VI.2.12 Sejam M um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $x_0 \in M$ tal que (M, x_0) seja uma variedade com dimensão n e índice p. Tem-se então:

a) Existe um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que, para cada $x \in U$, o par (M, x) seja uma variedade com dimensão n e índice menor ou igual a p.

b) Qualquer que seja a vizinhança V de x_0 em M, e qualquer que seja j tal que $0 \leq j \leq p$, existe um ponto $x \in V$ tal que (M, x) seja uma variedade de dimensão n e índice j.

Em particular, se M é uma variedade conexa, então M tem a mesma dimensão em todos os pontos.

Dem: Ver II.6.17. □

VI.2.13 Seja M um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e notemos, para cada inteiro $p \geq 0$, $\partial_p(M)$ o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que (M, x) seja uma variedade com índice p. Tem-se então que, para cada $x \in \partial_p(M)$, onde M tenha dimensão n, $(\partial_p(M), x)$ é uma variedade com dimensão $n - p$ e índice 0. Em particular, se M é uma variedade, cada $\partial_p(M)$ é uma variedade sem bordo.

Dem: Ver II.6.20. □

Recordemos que as imersões e as submersões foram definidas como aplicações suaves entre subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita cujas derivadas são, respectivamente, injectivas e sobrejectivas. No quadro dos espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e, em particular, no das variedades abstractas, não definimos ainda o que se entende por espaço vectorial tangente nem, portanto, o que se entende por derivada de uma aplicação. Para evitarmos ter que o fazer agora, vamos definir as imersões e as submersões, no quadro dos espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis, a partir do que elas significam no contexto já estudado.

VI.2.14 Sejam A e $\widehat{A}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f: A \to \widehat{A}$ uma aplicação suave. Vamos dizer que f é uma *imersão no ponto* $x_0 \in A$ se existirem cartas $\varphi: A \to B \subset E$ e $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{E}$ das estruturas diferenciáveis tais que a aplicação suave $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}: B \to \widehat{B}$ seja uma imersão no ponto $\varphi(x_0)$. Quando isso acontecer, tem-se, mais geralmente, quaisquer que sejam as cartas $\psi: A \to C \subset F$ e $\widehat{\psi}: \widehat{A} \to \widehat{C} \subset \widehat{F}$ das estruturas diferenciáveis, a aplicação $\widehat{\psi} \circ f \circ \psi^{-1}: C \to \widehat{C}$ é ainda uma imersão no ponto $\psi(x_0)$.

Dem: Tem-se

$$\widehat{\psi} \circ f \circ \psi^{-1} = (\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}) \circ (\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}),$$

onde $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}: \widehat{B} \to \widehat{C}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}: C \to B$ são difeomorfismos, pelo que

$$D(\widehat{\psi}\circ f\circ\psi^{-1})_{\psi(x_0)} =$$
$$= D(\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x_0))}\circ D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}\circ D(\varphi\circ\psi^{-1})_{\psi(x_0)},$$

com

$$D(\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x_0))}\colon T_{\widehat{\varphi}(f(x_0))}(\widehat{B})\to T_{\widehat{\psi}(f(x_0))}(\widehat{C})$$
$$D(\varphi\circ\psi^{-1})_{\psi(x_0)}\colon T_{\psi(x_0)}(C)\to T_{\varphi(x_0)}(B)$$

isomorfismos e

$$D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}\colon T_{\varphi(x_0)}(B)\to T_{\widehat{\varphi}(f(x_0))}(\widehat{B})$$

injectiva, o que implica que

$$D(\widehat{\psi}\circ f\circ\psi^{-1})_{\psi(x_0)}\colon T_{\psi(x_0)}(C)\to T_{\widehat{\psi}(f(x_0))}(\widehat{C})$$

é também injectiva. □

VI.2.15 Sejam A e $\widehat{A}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f\colon A\to\widehat{A}$ uma aplicação suave. Dizemos que f é uma *imersão* se, para cada $x\in A$, f é uma imersão no ponto x.

VI.2.16 Sejam A e $\widehat{A}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f\colon A\to\widehat{A}$ uma aplicação suave. Vamos dizer que f é uma *submersão no ponto* $x_0\in A$ se existirem cartas $\varphi\colon A\to B\subset E$ e $\widehat{\varphi}\colon\widehat{A}\to\widehat{B}\subset\widehat{E}$ das estruturas diferenciáveis tais que a aplicação suave $\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1}\colon B\to\widehat{B}$ seja uma submersão no ponto $\varphi(x_0)$. Quando isso acontecer, tem-se, mais geralmente, quaisquer que sejam as cartas $\psi\colon A\to C\subset F$ e $\widehat{\psi}\colon\widehat{A}\to\widehat{C}\subset\widehat{F}$ das estruturas diferenciáveis, que $\widehat{\psi}\circ f\circ\psi^{-1}\colon C\to\widehat{C}$ é ainda uma submersão no ponto $\psi(x_0)$.
Dem: Tem-se

$$\widehat{\psi}\circ f\circ\psi^{-1} = (\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})\circ(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi^{-1}),$$

onde $\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1}\colon\widehat{B}\to\widehat{C}$ e $\varphi\circ\psi^{-1}\colon C\to B$ são difeomorfismos, pelo que

$$D(\widehat{\psi}\circ f\circ\psi^{-1})_{\psi(x_0)} =$$
$$= D(\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x_0))}\circ D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}\circ D(\varphi\circ\psi^{-1})_{\psi(x_0)},$$

com

$$D(\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x_0))}\colon T_{\widehat{\varphi}(f(x_0))}(\widehat{B})\to T_{\widehat{\psi}(f(x_0))}(\widehat{C})$$
$$D(\varphi\circ\psi^{-1})_{\psi(x_0)}\colon T_{\psi(x_0)}(C)\to T_{\varphi(x_0)}(B)$$

isomorfismos e

$$D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}\colon T_{\varphi(x_0)}(B)\to T_{\widehat{\varphi}(f(x_0))}(\widehat{B})$$

sobrejectiva, o que implica que

$$D(\widehat{\psi}\circ f\circ\psi^{-1})_{\psi(x_0)}\colon T_{\psi(x_0)}(C)\to T_{\widehat{\psi}(f(x_0))}(\widehat{C})$$

é também sobrejectiva. □

VI.2.17 Sejam A e $\widehat{A}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f\colon A\to\widehat{A}$ uma aplicação suave. Dizemos que f é uma *submersão* se, para cada $x\in A$, f é uma submersão no ponto x.

VI.2.18 No caso em que A e $\widehat{A}$ são subconjuntos de espaços vectoriais E e $\widehat{E}$, de dimensões finitas, com as estruturas diferenciáveis canónicas, uma aplicação suave $f\colon A\to\widehat{A}$ é uma imersão (respectivamente submersão) num ponto $x_0\in A$, no sentido das definições precedentes se, e só se, $Df_{x_0}\colon T_{x_0}(A)\to T_{f(x_0)}(\widehat{A})$ é uma aplicação linear injectiva (respectivamente sobrejectiva), isto é, se, e só se, f é uma imersão (respectivamente submersão) em x_0, no sentido já conhecido anteriormente.
Dem: Basta considerar as cartas Id_A e $Id_{\widehat{A}}$ das estruturas diferenciáveis de A e $\widehat{A}$, respectivamente. □

O facto de termos caracterizações alternativas das imersões e das submersões entre espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis em termos de "existem cartas tais que…" e de "quaisquer que sejam as cartas …" faz com que frequentemente resultados conhecidos no quadro dos subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita se estendam trivialmente ao quadro dos espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis. Apresentamos em seguida algumas dessas generalizações triviais, cujas justificações limitamos à referência ao resultado conhecido do qual elas resultam, embora, noutros casos, tomemos a liberdade de utilizar generalizações desse tipo, sem mesmo as enunciarmos.

VI.2.19 Sejam A um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável e $A'\subset A$ um subconjunto. Tem-se então que a inclusão $\iota\colon A'\to A$ é uma imersão. Além disso, se A' é uma vizinhança de x em A, aquela inclusão é também uma submersão em x.
Dem: Basta atender a que o resultado é válido no caso em que A é uma parte de um espaço vectorial de dimensão finita, uma vez que então a derivada da inclusão em cada ponto é a inclusão entre os espaços tangentes, portanto uma aplicação linear injectiva, sendo mesmo um isomorfismo (a identidade) no caso em que A' é vizinhança de x. □

VI.2.20 Sejam A e $\widehat{A}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f\colon A\to\widehat{A}$ um difeomorfismo. Tem-se então que f é simultanea-

mente imersão e submersão.
Dem: Trata-se de uma consequência de acontecer o mesmo no caso em que A e $\widehat{A}$ são partes de espaços vectoriais de dimensão finita, caso em que temos uma consequência de a derivada de um difeomorfismo em cada ponto ser um isomorfismo entre os espaços tangentes. □

VI.2.21 Sejam A, $\widehat{A}$ e $\tilde{A}$ espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f: A \to \widehat{A}$ e $g: \widehat{A} \to \tilde{A}$ duas aplicações suaves. Tem-se então:
a) Se f e g são imersões (respectivamente, submersões) em x_0 e $f(x_0)$, respectivamente então $g \circ f: A \to \tilde{A}$ é uma imersão (respectivamente, submersão) em x_0.
b) Se $g \circ f: A \to \tilde{A}$ é uma imersão (respectivamente, submersão) em x_0, então f é uma imersão em x_0 (respectivamente, g é uma submersão em $f(x_0)$).
Dem: Como anteriormente, basta demonstrar o resultado no caso em que A, $\widehat{A}$ e $\tilde{A}$ são subconjuntos de espaços vectoriais de dimensões finitas, caso em que temos uma consequência do teorema de derivação da função composta, tendo em conta o facto de a composta $\mu \circ \lambda$ de duas aplicações injectivas (respectivamente, sobrejectivas) ser injectiva (respectivamente, sobrejectiva), assim como o facto de sempre que uma composta $\mu \circ \lambda$ é injectiva (respectivamente, sobrejectiva) λ é também injectiva (respectivamente, μ é também sobrejectiva). □

VI.2.22 Sejam M e $\widehat{M}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação. Seja $x_0 \in M$ tal que M, no ponto x_0, e $\widehat{M}$, no ponto $f(x_0)$, sejam variedades com dimensões m e n, respectivamente.
a) Se f é uma imersão (respectivamente uma submersão) no ponto x_0, então $m \le n$ (respectivamente $m \ge n$).
b) Se f é uma imersão (respectivamente uma submersão) no ponto x_0 e se $m = n$, então f é também uma submersão (respectivamente uma imersão) no ponto x_0.
c) Se f é uma submersão em x_0 e M tem índice 0 em x_0, então $\widehat{M}$ também tem índice 0 em $f(x_0)$.
Dem: Basta mostrarmos que acontece o mesmo no caso em que M e $\widehat{M}$ são partes de espaços vectoriais de dimensão finita. Nesse caso, temos uma aplicação linear injectiva (respectivamente sobrejectiva) $Df_{x_0}: T_{x_0}(M) \to T_{f(x_0)}(\widehat{M})$, com $T_{x_0}(M)$ com dimensão m e $T_{f(x_0)}(\widehat{M})$ com dimensão n, pelo que $m \le n$ (respectivamente $m \ge n$) e, se $m = n$, aquela aplicação linear também é sobrejectiva (respectivamente injectiva). No caso em que f é submersão em x_0 e M tem índice 0 em x_0, tem-se que Df_{x_0} aplica $\mathrm{t}_{x_0}(M) = T_{x_0}(M)$, por um lado em $\mathrm{t}_{f(x_0)}(\widehat{M})$ e, por outro lado, em $T_{f(x_0)}(\widehat{M})$, pelo que $\mathrm{t}_{f(x_0)}(\widehat{M}) = T_{f(x_0)}(\widehat{M})$, o que implica que $\widehat{M}$ também tem índice 0 em $f(x_0)$. □

VI.2.23 Sejam M e $\widehat{M}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Seja $x_0 \in M$ tal que M, no ponto x_0, e $\widehat{M}$, no ponto $f(x_0)$, sejam variedades de índice 0 e que f seja simultaneamente imersão e submersão no ponto x_0. Existe então um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que $f_{/U}$ seja um difeomorfismo de U sobre $f(U)$, com $f(U)$ aberto em $\widehat{M}$, em particular f é então simultaneamente imersão e submersão em cada ponto $x \in U$.

Dem: Ver o teorema da função inversa em II.4.16. □

VI.2.24 Sejam M e $\widehat{M}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Seja $x_0 \in M$ tal que M seja uma variedade de dimensão n e índice p no ponto x_0 e que f seja uma imersão no ponto x_0. Existe então um aberto U de M, com $x_0 \in U$, tal que $f_{/U}$ seja um difeomorfismo de U sobre $f(U)$, em particular f é então uma imersão em cada ponto $x \in U$.

Dem: Ver II.6.25. □

VI.2.25 Sejam M uma variedade abstracta, eventualmente com bordo, $\widehat{M}$ um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $f: M \to \widehat{M}$ uma imersão. Sejam $\tilde{M}$ um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $g: \tilde{M} \to M$ uma aplicação contínua tal que $f \circ g: \tilde{M} \to \widehat{M}$ seja de classe C^p. Tem-se então que $g: \tilde{M} \to M$ é de classe C^p.

Dem: Ver II.6.26. □

VI.2.26 **(Corolário)** Sejam M uma variedade abstracta, eventualmente com bordo, $\widehat{M}$ um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $f: M \to \widehat{M}$ uma imersão tal que f seja um homeomorfismo de M sobre $f(M)$. Tem-se então que f é um difeomorfismo de M sobre $f(M)$, em particular $f(M)$ é também uma variedade abstracta.

Dem: Basta aplicar o resultado precedente a $f^{-1}: f(M) \to M$, que é, por hipótese, contínua. □

VI.2.27 Sejam M e $\widehat{M}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Sejam $x_0 \in M$ e $y_0 \in \widehat{M}$ tais que (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ sejam variedades de índice 0 e que f seja uma submersão em x_0, com $f(x_0) = y_0$. Tem-se então:

a) Existe um aberto U de M, com $x_0 \in U$ tal que, para cada $x \in U$, f é ainda uma submersão em x.

b) A aplicação f é aberta no ponto x_0 (cf. II.4.29).

c) Existe um aberto $\widehat{U}$ de $\widehat{M}$, com $y_0 \in \widehat{U}$, e uma aplicação suave $g: \widehat{U} \to M$ tal que $g(y_0) = x_0$ e $f \circ g = Id_{\widehat{U}}$ (uma secção local suave de f)

Dem: Ver II.4.22 e II.4.28. □

VI.2.28 Sejam M e $\widehat{M}$ variedades abstractas sem bordo e $f: M \to \widehat{M}$ uma submersão. Tem-se então que f é uma aplicação aberta.

Dem: Ver II.4.30. □

VI.2.29 Sejam M e $\widehat{M}$ variedades abstractas sem bordo e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma submersão sobrejectiva. Sejam $\tilde{M}$ um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $h\colon \widehat{M} \to \tilde{M}$ uma aplicação tal que $h \circ f\colon M \to \tilde{M}$ seja de classe C^p. Tem-se então que $h\colon \widehat{M} \to \tilde{M}$ é de classe C^p.
Dem: Ver II.4.31. □

VI.2.30 Sejam M e $\widehat{M}$ dois espaços topológicos munidos de estruturas diferenciáveis e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Sejam $x_0 \in M$ e $y_0 \in \widehat{M}$ tais que (M, x_0) e $(\widehat{M}, y_0)$ sejam variedades de índice 0, com dimensões m e n, respectivamente, e que f seja uma submersão em x_0, com $f(x_0) = y_0$. Seja $y_0 \in \widehat{M}' \subset \widehat{M}$ com $(\widehat{M}', y_0)$ variedade de dimensão n' e índice p. Tem-se então que $M' = \{x \in M \mid f(x) \in \widehat{M}'\}$ é, no ponto x_0, uma variedade de dimensão $m - n + n'$ e índice p.
Dem: Ver II.6.29. □

Por definição, se M é uma variedade abstracta, podemos considerar uma carta $\varphi\colon M \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de M, que é assim um difeomorfismo entre M e uma variedade concreta B, contida no espaço vectorial E de dimensão finita. Uma carta é, de certo modo, tanto mais "simples" quanto mais pequena for a dimensão do espaço vectorial E e é por vezes importante termos a certeza de que existe uma carta de M cujo contradomínio está contido num espaço vectorial de dimensão suficientemente pequena (essa dimensão não pode ser decerto inferior à dimensão máxima de M nos diferentes pontos). O resultado VI.2.32, que provaremos adiante, vai nesse sentido e é essencialmente a versão que se encontra em [10] do teorema do mergulho de Whitney. Ele vai ser, em particular, utilizado na resolução do problema da colagem de variedades que será abordado na próxima secção. Para abordar esse resultado, necessitamos de um lema de carácter técnico.

VI.2.31 **(Lema)** Sejam E um espaço euclidiano e $B_1(0)$ a respectiva bola aberta de centro 0 e raio 1. Existe então um difeomorfismo $\Psi\colon E \to B_1(0)$, definido por $\Psi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$, cujo difeomorfismo inverso $\Psi^{-1}\colon B_1(0) \to E$ está definido por $\Psi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-\|y\|^2}}$.
Dem: É imediato que as expressões para Ψ e Ψ^{-1} no enunciado definem aplicações suaves $E \to E$ e $B_1(0) \to E$, respectivamente, e que se tem

$$\|\Psi(x)\|^2 = \frac{\|x\|^2}{1+\|x\|^2} < 1, \quad \|\Psi^{-1}(y)\|^2 = \frac{\|y\|^2}{1-\|y\|^2},$$

em particular Ψ toma valores em $B_1(0)$. Verifica-se agora facilmente que $\Psi^{-1}(\Psi(x)) = x$, para cada $x \in E$, e que $\Psi(\Psi^{-1}(y)) = y$, para cada $y \in B_1(0)$, pelo que as aplicações Ψ e Ψ^{-1} são inversas uma da outra. □

VI.2.32 **(Whitney)** Seja M uma variedade abstracta com dimensão menor ou igual a m em cada um dos seus pontos. Existe então uma carta $\varphi: M \to \widehat{M} \subset E$, da estrutura diferenciável de M, com E espaço vectorial de dimensão $2m+1$ e $\widehat{M}$ fechado em E.[114]

Dem: (cf. [10]) Vamos dividir a demonstração em várias partes:

a) Sejam G um espaço vectorial de dimensão finita e $\psi: M \to M' \subset G$ uma carta da estrutura diferenciável de M. Em particular, M' é uma variedade concreta com dimensão menor ou igual a m em cada um dos seus pontos. É com esta variedade M' que vamos trabalhar nas próximas alíneas e só no fim da demonstração voltaremos à variedade M.

b) Vamos mostrar a existência de um espaço vectorial E, de dimensão $2m+1$, e de uma imersão injectiva $g: M' \to E$.

Subdem: Seja n a dimensão de G. Se $n = 2m+1$, este facto é trivial, bastando tomar $E = G$ e, para g, a inclusão. Este facto é também trivial no caso em que $n < 2m+1$, visto que se pode então tomar $E = G \times \mathbb{R}^{2m+1-n}$ e, para g, a aplicação definida por $g(x) = (x, 0)$. Vamos portanto supor que $n > 2m+1$.

Uma vez que a inclusão $M' \to G$ é uma imersão injectiva, podemos considerar o mínimo $n'_0 \leq n$ de todos os inteiros $n' \geq 2m+1$, para os quais existe uma imersão injectiva de M' para um espaço vectorial de dimensão n', e o que queremos provar nesta alínea é que se tem $n'_0 = 2m+1$. Vamos provar isso por absurdo, supondo, para isso, que se tinha $n'_0 > 2m+1$.

Seja E um espaço vectorial de dimensão n'_0 e $g: M' \to E$ uma imersão injectiva.

Consideremos o espaço total $T(M') \subset G \times G$ do fibrado vectorial tangente a M', que sabemos ser uma variedade com dimensão menor ou igual a $2m$ em cada ponto (cf. III.1.27), e a variedade $M' \times M' \times \mathbb{R} \subset G \times G \times \mathbb{R}$, que tem dimensão menor ou igual a $2m+1$ em cada ponto. Consideremos as aplicações suaves

$$\begin{aligned} &\widehat{g}: T(M') \to E, && \widehat{g}(x,u) = Dg_x(u) \\ &\tilde{g}: M' \times M' \times \mathbb{R} \to E, && \tilde{g}(x,y,t) = t(g(y) - g(x)). \end{aligned}$$

Tendo em conta o corolário do teorema de Sard II.7.17, os conjuntos $\widehat{g}(T(M'))$ e $\tilde{g}(M' \times M' \times \mathbb{R})$ são magros em E pelo que é também magro em E o conjunto $\widehat{g}(T(M')) \cup \tilde{g}(M' \times M' \times \mathbb{R})$. Em particular, pelo teorema de Baire, esta união tem interior vazio, o que nos garante a existência de $w \in E \setminus \{0\}$ que não lhe pertence. Podemos então considerar o subespaço vectorial $\mathbb{R}w$, de dimensão 1, gerado por w e o respectivo complementar ortogonal $F = (\mathbb{R}w)^\perp$ (relativamente a um produto interno que fixaremos em E).

[114] Como é referido em [10], Whitney demonstrou que se pode obter a mesma conclusão com a dimensão $2m+1$ substituída por $2m$, mas essa demonstração utiliza técnicas bastante mais elaboradas.

O subespaço vectorial $F \subset E$ tem dimensão $n'_0 - 1$ e vamos verificar que, sendo π_F a projecção ortogonal de E sobre F, a aplicação suave $h = \pi_F \circ g: M' \to F$ é uma imersão injectiva, o que será o absurdo procurado, visto que se tem $2m + 1 \le n'_0 - 1 < n'_0$.
Se h não fosse injectiva, existiriam $x \ne y$ em M' tais que $h(x) = h(y)$, isto é, tais que $\pi_F(g(y) - g(x)) = 0$, ou seja, $g(y) - g(x) \in F^\perp = \mathbb{R}w$, isto é, para algum $t \in \mathbb{R}$, $g(y) - g(x) = tw$; tendo em conta a injectividade de g, vinha $t \ne 0$, pelo que a igualdade anterior podia ser escrita na forma $w = \tilde{g}(x, y, \frac{1}{t})$, o que era absurdo, tendo em conta o facto de w não pertencer à imagem de $\tilde{g}$.
Do mesmo modo, se h não fosse uma imersão, existiria $x \in M'$ e $u \in T_x(M')$, $u \ne 0$, tais que $0 = Dh_x(u) = \pi_F(Dg_x(u))$, ou seja, $Dg_x(u) \in F^\perp = \mathbb{R}w$, isto é, para algum $t \in \mathbb{R}$, $Dg_x(u) = tw$; tendo em conta o facto de g ser uma imersão vinha $t \ne 0$, pelo que a igualdade anterior podia ser escrita na forma $w = \widehat{g}(x, \frac{1}{t}u)$, o que era absurdo, tendo em conta o facto de w não pertencer à imagem de $\widehat{g}$.
Terminámos assim a prova da conclusão desta alínea.
c) Se a variedade M fosse compacta, o mesmo acontecia a M' e portanto a imersão injectiva g era um homeomorfismo de M' sobre $\widehat{M} = g(M') \subset E$, que seria compacto, em particular, fechado, e II.6.27 garantia então que g era um difeomorfismo de M' sobre $\widehat{M}$. Então $\varphi = g \circ \psi: M \to \widehat{M} \subset E$ era a carta procurada.
O que fazemos nas proximas alíneas é substituir este raciocínio trivial por uma justificação que não necessita da compacidade da variedade M.
d) De acordo com o que provámos em b), existe um espaço vectorial E de dimensão $2m + 1$ e uma imersão injectiva $g: M' \to E$. Tendo em conta o lema VI.2.31, vemos que, se necessário substituindo g pela sua composta como o difeomorfismo $\Psi: E \to B_1(0)$, pode-se já supor que se tem $\|g(x)\| < 1$, para cada $x \in M'$.
e) Tendo em conta VI.1.35, seja $\theta: M' \to [0, +\infty[$ uma aplicação suave tal que, para cada $r \ge 0$, exista um compacto $K \subset M'$ tal que, para cada $x \in M' \setminus K$, venha $\theta(x) > r$.
f) Como anteriormente, consideramos as variedades $T(M') \subset G \times G$ e $M' \times M' \times \mathbb{R} \subset G \times G \times \mathbb{R}$ e as aplicações suaves

$$\begin{aligned} &\widehat{g}: T(M') \to E \times \mathbb{R}, && \widehat{g}(x, u) = (Dg_x(u), D\theta_x(u)) \\ &\tilde{g}: M' \times M' \times \mathbb{R} \to E \times \mathbb{R}, && \tilde{g}(x, y, t) = t(g(y) - g(x), \theta(y) - \theta(x)). \end{aligned}$$

Vamos verificar a existência de $w \ne 0$ em E tal que $(w, 1)$ não pertença à imagem de nenhuma destas duas aplicações.
Subdem: Uma vez que $E \times \mathbb{R}$ tem dimensão $2m + 2$, mais uma vez o corolário do teorema de Sard, garante que os conjuntos $\widehat{g}(T(M'))$ e $\tilde{g}(M' \times M' \times \mathbb{R})$ são magros $E \times \mathbb{R}$ e portanto o mesmo acontece a $\widehat{g}(T(M')) \cup \tilde{g}(M' \times M' \times \mathbb{R})$. Em particular esta união tem interior vazio e portanto, considerando o aberto não vazio de $E \times \mathbb{R}$, constituído pelos

(w', a) tais que $w' \neq 0$ e $a \neq 0$, vai existir um elemento (w', a) desse aberto não pertencente àquela união e a invariância por homotetia das imagens de $\widehat{g}$ e de $\tilde{g}$ garante então que $(\frac{w'}{a}, 1)$ também não pertence àquela união.
g) Seja $f\colon M' \to E$ a aplicação suave definida por $f(x) = g(x) - \theta(x)w$. Vamos verificar nas próximas três alíneas que $\widehat{M} = f(M')$ é fechado em E e que a aplicação f é um difeomorfismo de M' sobre $\widehat{M}$.
h) Comecemos por verificar que a aplicação $f\colon M' \to E$ é ainda uma imersão injectiva.
Subdem: Supondo que f não era injectiva, existiam $x \neq y$ em M' tais que $f(x) = f(y)$, isto é, tais que $g(x) - \theta(x)w = g(y) - \theta(y)w$, ou seja, tais que $g(y) - g(x) = (\theta(y) - \theta(x))w$, tendo-se $\theta(y) - \theta(x) \neq 0$, por g ser injectiva, e então

$$(w, 1) = \frac{1}{\theta(y) - \theta(x)}(g(y) - g(x), \theta(y) - \theta(x)) = \tilde{g}(x, y, \frac{1}{\theta(y) - \theta(x)}),$$

o que era absurdo, tendo em conta a hipótese de $(w, 1)$ não pertencer à imagem de $\tilde{g}$. Supondo agora que f não era uma imersão, existia $x \in M'$ e $u \neq 0$ em $T_x(M')$ tais que $Df_x(u) = 0$, isto é, $Dg_x(u) - D\theta_x(u)w = 0$, tendo-se $D\theta_x(u) \neq 0$, por g ser uma imersão, e então

$$(w, 1) = (Dg_x(\frac{u}{D\theta_x(u)}), D\theta_x(\frac{u}{D\theta_x(u)})) = \widehat{g}(x, \frac{u}{D\theta_x(u)}),$$

o que, mais uma vez, era absurdo, tendo em conta a hipótese de $(w, 1)$ não pertencer à imagem de $\widehat{g}$.
i) Vamos agora verificar que o conjunto $\widehat{M} = f(M')$ é fechado em E e que a bijecção $f\colon M' \to \widehat{M}$ é um homeomorfismo.
Subdem: Uma vez que a bijecção $f\colon M' \to \widehat{M}$ é contínua, basta provar que, para cada subconjunto fechado A de M', $f(A)$ é fechado em E.
Seja então $y \in E$ aderente a $f(A)$ e consideremos uma sucessão de elementos $x_j \in A$, tal que $f(x_j) \to y$. Reparemos que, para cada $x \in M'$,

$$\theta(x)\|w\| = \|g(x) - f(x)\| \leq \|g(x)\| + \|f(x)\| \leq 1 + \|f(x)\|,$$

donde

$$\theta(x) \leq \frac{1 + \|f(x)\|}{\|w\|}.$$

Escolhendo então $r > \frac{1+\|y\|}{\|w\|}$, vai existir j_0 tal que, para cada $j \geq j_0$,

$$\theta(x_j) \leq \frac{1 + \|f(x_j)\|}{\|w\|} < r$$

pelo que as hipóteses feitas em e) sobre a aplicação θ garantem a existência de um compacto $K \subset M'$ tal que, para cada $j \geq j_0$, $x_j \in K$. Tem-se então que $A \cap K$ é fechado em K, e portanto compacto, pelo que $f(A \cap K)$ é compacto em E, e portanto fechado e o facto de se ter, para cada $j \geq j_0$, $f(x_j) \in f(A \cap K)$ implica que o seu limite y pertence também a $f(A \cap K)$, e, em particular a $f(A)$. Fica assim provado que $f(A)$ é realmente fechado em E.

j) Tendo em conta II.6.27, o facto de a imersão injectiva $f: M' \to E$ ser um homeomorfismo sobre $\widehat{M} = f(M')$ implica que $f: M' \to \widehat{M} \subset E$ é mesmo um difeomorfismo.

k) A aplicação $\varphi = f \circ \psi: M \to \widehat{M} \subset E$ é um difeomorfismo, e portanto uma carta da estrutura diferenciável de M, nas condições do enunciado. □

§3. A colagem de variedades: O teorema de Whitney.

Suponhamos que A é um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e que $(A_j)_{j \in J}$ é uma família de abertos de A, com união A. Cada um dos A_j tem, como sabemos, uma estrutura diferenciável induzida e gostaríamos de poder pensar na estrutura diferenciável de A como sendo obtida *por colagem* das estruturas diferenciáveis dos diferentes A_j. O problema que vamos examinar nesta secção é o de verificar em que condições é que, partindo de um espaço topológico A, união de subconjuntos abertos A_j sobre os quais são dadas estruturas diferenciáveis, podemos determinar uma estrutura diferenciável em A que seja uma colagem das estruturas diferenciáveis dadas. Os dois primeiros resultados, ambos de natureza elementar, estabelecem, por um lado, uma condição necessária para a existência de colagens, por outro a impossibilidade de existir mais que uma colagem. O resto da secção tem como objectivo mostrar que, sob hipóteses restrictivas convenientes, as colagens existem efectivamente, o que é um resultado muito menos elementar, que corresponde essencialmente àquilo a que se dá usualmente o nome de "teorema do mergulho de Whitney". É esse resultado que vai permitir fazer a ponte entre a definição mais usual das variedades abstractas, através de atlas formados por cartas locais, e a via que seguimos utilizando cartas globais.

VI.3.1 Sejam A um espaço topológico e $(A_j)_{j \in J}$ uma família de subconjuntos abertos de A, com união A, cada um dos quais munido de uma estrutura diferenciável. Vamos dizer que uma estrutura diferenciável de A é uma *colagem* das estruturas diferenciáveis dos A_j se a estrutura diferenciável de cada A_j for a estrutura diferenciável induzida pela de A.

VI.3.2 Sejam A um espaço topológico e $(A_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de A, com união A, cada um dos quais munido de uma estrutura diferenciável. Uma condição necessária para a existência em A de uma estrutura diferenciável colagem das estruturas diferenciáveis dos A_j é a seguinte *condição de compatibilidade*: Quaisquer que sejam os índices $j, k \in J$, as estruturas diferenciáveis induzidas em $A_j \cap A_k$ pelas de A_j e de A_k coincidem.

Dem: Suponhamos que havia uma tal estrutura diferenciável colagem em A e sejam $j, k \in J$. As estruturas diferenciáveis de $A_j \cap A_k$ induzidas pelas de A_j e de A_k coincidem, por coincidirem ambas com a estrutura diferenciável induzida pela de A. □

VI.3.3 Dados um espaço topológico A e uma família $(A_j)_{j \in J}$ de abertos de A com união A, cada um dos quais munido de uma estrutura diferenciável, vamos dizer que estas estruturas diferenciáveis são *mutuamente compatíveis* se, quaisquer que sejam os índices $j, k \in J$, as estruturas diferenciáveis induzidas em $A_j \cap A_k$ pelas de A_j e de A_k coincidem.

VI.3.4 Sejam A um espaço topológico e $(A_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de A, com união A, cada um dos quais munido de uma estrutura diferenciável. Não existe então sobre A mais do que uma estrutura diferenciável colagem das dos A_j.

Dem: Suponhamos que temos duas estruturas diferenciáveis sobre A colagens das dos A_j e notemos A' e A'' o espaço topológico A com cada uma destas estruturas diferenciáveis. A identidade $Id_A : A' \to A''$ tem então restrição suave a cada um dos abertos A_j de A', cuja união é A, por a estrutura diferenciável em A_j induzida pela de A' coincidir com a induzida pela de A''. Tendo em conta VI.1.22, concluímos que $Id_A : A' \to A''$ é suave e, por simetria dos papéis de A' e A'', $Id_A : A'' \to A'$ é também suave. Tendo em conta VI.1.27, concluímos agora que $A' = A''$. □

Vamos agora passar a examinar o problema da existência de colagens, começando por verificar que ao nível da topologias, temos um resultado simples de existência e unicidade de colagens, que é utilizado com frequência para construir topologias sobre um conjunto, sobre o qual se pretende posteriormente construir uma estrutura diferenciável por colagem.

VI.3.5 **(A colagem de topologias)** Sejam A um conjunto e $(A_j)_{j \in J}$ uma família de subconjuntos de A, com união A, cada um dos quais munidos de uma topologia. Vamos dizer que estas topologias são *mutuamente compatíveis* se, quaisquer que sejam os índices $j, k \in J$, $A_j \cap A_k$ é aberto em A_j e em A_k e as topologias induzidas em $A_j \cap A_k$ pelas de A_j e de A_k coincidem. Quando isso acontecer, existe uma, e uma só, topologia em A que induza em cada A_j a topologia dada e tal que cada A_j seja aberto em A, topologia a que damos o nome de *colagem* das topologias dos A_j.

Dem: Comecemos por provar a unicidade que, analogamente ao que sucedia em VI.3.4, vai ser uma consequência de a continuidade ser uma noção local. Suponhamos então que existiam duas topologias sobre A nas condições do enunciado e notemos A' e A'' o conjunto A com cada uma dessas topologias.

A aplicação $Id_A\colon A' \to A''$ ia então ser contínua, visto que isso acontecia à sua restrição a cada um dos abertos A_j, de união A, por em A_j as topologias induzidas por A' e A'' coincidirem. Pela mesma razão $Id_A\colon A'' \to A'$ era também contínua, o que prova que $A' = A''$.
Seja agora $\mathcal{U}$ a classe dos subconjuntos $U \subset A$ tais que, para cada j, $U \cap A_j$ seja aberto na topologia dada em A_j. É evidente que $\emptyset \in \mathcal{U}$ e $A \in \mathcal{U}$ e as identidades $(\bigcap\limits_k U_k) \cap A_j = \bigcap\limits_k (U_k \cap A_j)$ e $(\bigcup\limits_k U_k) \cap A_j = \bigcup\limits_k (U_k \cap A_j)$, válidas para toda a família não vazia de subconjuntos de A, implicam que toda a intersecção finita de conjuntos pertencentes a $\mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{U}$ e que toda a união de conjuntos pertencentes a $\mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{U}$. Provámos assim a existência de uma topologia sobre A cujos abertos são os conjuntos pertencentes a $\mathcal{U}$ e vamos verificar que esta topologia verifica as condições do enunciado. Em primeiro lugar, o facto de cada A_i ser aberto em A resulta da hipótese de, para cada j, $A_i \cap A_j$ ser aberto para a topologia dada em A_j. Resta-nos provar que a topologia induzida em cada A_j pela topologia que definimos em A é a topologia dada originalmente. Ora, se V é aberto em A_j para a topologia induzida, vai existir um aberto U de A tal que $V = U \cap A_j$ e então, por definição dos abertos de A, V é aberto em A_j para a topologia original. Reciprocamente, se V é aberto em A_j para a topologia original, então, para cada índice i, $V \cap A_i = V \cap A_i \cap A_j$ é aberto em $A_i \cap A_j$ para a topologia induzida pela de A_j, que coincide com a induzida pela de A_i, pelo que, por $A_i \cap A_j$ ser aberto em A_i, $V \cap A_i$ é aberto em A_i, o que, pela definição da topologia de A, implica que V é aberto em A, e portanto também aberto em A_j para a topologia induzida. □

VI.3.6 É claro que, se A é um espaço topológico e $(A_j)_{j\in J}$ uma família de abertos de A, com união A, sobre os quais consideramos as topologias induzidas, então estas topologias são mutuamente compatíveis e a topologia dada em A é a colagem das topologias dos A_j.

O resultado seguinte aponta duas condições necessárias triviais para a existência de colagens de estruturas diferenciáveis, que verificamos em seguida, com dois exemplos, não serem redundantes.

VI.3.7 Sejam A um espaço topológico e $(A_j)_{j\in J}$ uma família de abertos de A, com união A, cada um dos quais munido de uma estrutura diferenciável. Uma condição necessária para a existência de uma estrutura diferenciável em A colagem das dos A_j é que A seja separado (isto é, de Hausdorff) e de base contável (cf. II.3.7).
Dem: Basta atender a que a topologia associada a qualquer estrutura diferenciável é sempre de Hausdorff e com base contável, por isso acontecer à topologia de qualquer subconjunto de um espaço vectorial de dimensão finita (cf. II.3.7). □

VI.3.8 **(Exemplos) a)** Seja A um espaço topológico discreto não contável e consideremos a família dos abertos $\{x\}$ de A com um único elemento. Consideremos sobre cada um desses conjuntos unitários a sua única estrutura diferenciável (uma estrutura de variedade abstracta de dimensão 0). Estas estruturas diferenciáveis são trivialmente mutuamente compatíveis e, no entanto A não tem base contável de abertos, e portanto não admite nenhuma estrutura diferenciável.

b) Consideremos um conjunto $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \cup \{0'\}$, cujos elementos são os números reais e mais um, que estamos a notar $0'$.[115] Consideremos em $\mathbb{R}$ a sua topologia e estrutura diferenciável canónicas e em $U = \mathbb{R}' \setminus \{0\}$ a topologia e a estrutura diferenciável definidas pela carta $\varphi: U \to \mathbb{R}$, com $\varphi(0') = 0$ e $\varphi(x) = x$, para $x \in U \setminus \{0'\}$ (trata-se assim de duas variedades abstractas de dimensão 1). Reparando que a restrição de φ a $U \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é a identidade, em particular aplica $U \cap \mathbb{R}$ no aberto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de $\mathbb{R}$, vemos que $U \cap \mathbb{R}$ é aberto em U e em $\mathbb{R}$, para as topologias consideradas, e que as topologias e as estruturas diferenciáveis induzidas em $U \cap \mathbb{R}$ pelas de U e de $\mathbb{R}$ coincidem. Podemos assim considerar em $\mathbb{R}'$ a topologia colagem das topologias de U e de $\mathbb{R}$ e as estruturas diferenciáveis dos abertos U e $\mathbb{R}$ são mutuamente compatíveis. No entanto, a topologia em $\mathbb{R}'$ não é separada, como se constata, por exemplo, se repararmos que a sucessão $x_n = \frac{1}{n}$ converge simultaneamente para 0 e para $0'$ (neste último caso porque $\varphi(x_n) = x_n$ converge para $0 = \varphi(0')$).

O nosso próximo passo vai ser a prova da existência de colagens finitas, para o que necessitaremos de uma versão do teorema da partição da unidade, com utilidade provisória, a qual será precedida de um lema de natureza topológica.

VI.3.9 **(Lema topológico)** Seja A um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável e sejam $A_1, \ldots, A_p$ abertos de A com união A. Existem então abertos $U_1, \ldots, U_p$ de A, ainda com união A, tais que, para cada $1 \le \alpha \le p$, a aderência $\mathrm{ad}(U_\alpha)$ de U_α esteja contida em A_α.[116]

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

a) Para cada $x \in A$, escolhamos $1 \le \alpha(x) \le p$ tal que $x \in A_{\alpha(x)}$ e uma vizinhança compacta C_x de x, contida em $A_{\alpha(x)}$.

b) Tendo em conta o lema II.7.9, podemos considerar uma família de

---

[115] Intuitivamente, $0'$ vai ser olhado como uma espécie de gémeo de 0.

[116] Este lema pode ser generalizado, sem aumentar significativamente a complexidade da demonstração, ao caso em que, em vez de uma família finita de abertos A_α de A, partimos de uma família arbitrária de abertos de A, com união A, obtendo-se então uma correspondente família de abertos U_α de A, com o mesmo conjunto de índices, e que vai ser, além disso, *localmente finita*. Uma vez que não iremos utilizar essa versão mais geral, preferimos estabelecer a versão finita, que nos dispensa de explicitar o conceito de família localmente finita de subconjuntos.

compactos de A, $(K_n)_{n\geq 1}$, com união A e tal que, para cada n, $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$. Ponhamos $K_0 = K_{-1} = \emptyset$.
c) Para cada $n \geq 1$, seja $L_n = K_n \setminus \text{int}(K_{n-1})$ e $W_n = \text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}$ e reparemos que L_n é um compacto de A e W_n é um aberto de A, com $L_n \subset W_n$, e que a união dos L_n é igual a A, uma vez que, para cada $x \in A$, tem-se $x \in L_n$ desde que n seja o menor dos índices tais que $x \in K_n$.
d) Para cada $n \geq 1$, o compacto L_n está contido na união dos abertos $\text{int}(C_x)$, com $x \in A$, pelo que podemos considerar uma parte finita I_n de A tal que

$$L_n \subset \bigcup_{x \in I_n} \text{int}(C_x).$$

e) Para cada $1 \leq \alpha \leq p$ notemos U_α o aberto de A, união dos abertos $\text{int}(C_x) \cap W_n$ com $n \geq 1$, $x \in I_n$ e $\alpha(x) = \alpha$.
f) Vamos verificar que a união dos U_α é igual a A. Ora, para cada $y \in X$, podemos escolher n tal que $y \in L_n$ e então existe $x \in I_n$ tal que $y \in \text{int}(C_x)$ donde também $y \in \text{int}(C_x) \cap W_n$, e portanto $y \in U_\alpha$, com $\alpha = \alpha(x)$.
g) Resta-nos mostrar que se tem $\text{ad}(U_\alpha) \subset A_\alpha$. Seja então $y \in A$ aderente a U_α. Escolhamos n_0 tal que $y \in K_{n_0}$. O conjunto K_{n_0+1} é uma vizinhança de y com $K_{n_0+1} \cap W_n = \emptyset$, para cada $n \geq n_0 + 3$. Qualquer que seja a vizinhança V de y, $V \cap K_{n_0+1}$ é também uma vizinhança de y, pelo que $V \cap K_{n_0+1} \cap U_\alpha \neq \emptyset$ o que implica que $V \cap K_{n_0+1}$, e portanto também V, tem intersecção não vazia com a união dos abertos $\text{int}(C_x) \cap W_n$, com $n \leq n_0 + 2$, $x \in I_n$ e $\alpha(x) = \alpha$, uma união portanto finita. Fica assim provado que y é aderente à união finita destes abertos $\text{int}(C_x) \cap W_n$, e portanto também aderente à correspondente união finita dos C_x, que é compacta, e portanto fechada em A. Podemos assim concluir que y pertence a essa união finita de conjuntos C_x, que estão contidos em $A_{\alpha(x)} = A_\alpha$, pelo que $y \in A_\alpha$, como queríamos. □

VI.3.10 **(Lema)** Sejam A um espaço topológico separado e localmente compacto e $A_1, \ldots, A_p$ abertos de A, de união A, munidos de estruturas diferenciáveis mutuamente compatíveis. Existem então aplicações $f_1, \ldots, f_p \colon A \to [0,1]$, verificando as seguintes condições:
1) Para cada $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, p\}$, $f_{\alpha/A_\beta} \colon A_\beta \to [0,1]$ é suave.[117]
2) Para cada $1 \leq \alpha \leq p$, existe um subconjunto C_α de A_α, fechado em A, tal que $f_\alpha(x) = 0$, para cada $x \in A \setminus C_\alpha$.
3) Para cada $x \in A$, $f_1(x) + \cdots + f_p(x) \geq 1$.
Dem: Reparemos que A é um espaço topológico de base contável, por isso acontecer a cada um dos A_α, uma vez que, escolhendo uma base contável de abertos para cada A_α a união finita dessas bases é uma base contável de abertos para A.

[117]Esta condição exprime que, "moralmente" as aplicações $f_\alpha \colon A \to [0,1]$ são suaves, já que essa suavidade não faz sentido por A não ter ainda uma estrutura diferenciável.

Podemos agora aplicar duas vezes o lema topológico precedente para considerar, primeiro, abertos $U_1, \dots, U_p$ de A, com união A, tais que $\mathrm{ad}(U_\alpha) \subset A_\alpha$ e, depois, abertos $V_1, \dots, V_p$ de A, com união A, tais que $\mathrm{ad}(V_\alpha) \subset U_\alpha$. Ponhamos $C_\alpha = \mathrm{ad}(U_\alpha)$, para cada $1 \le \alpha \le p$.
Para cada $1 \le \alpha \le p$, podemos aplicar o teorema da partição da unidade em VI.1.33 à cobertura aberta de A_α constituída pelos conjuntos U_α e $A_\alpha \setminus \mathrm{ad}(V_\alpha)$ para concluir a existência de uma aplicação suave $\tilde{f}_\alpha: A_\alpha \to [0,1]$ tal que $\tilde{f}_\alpha(x) = 1$, para cada $x \in \mathrm{ad}(V_\alpha)$ e $\tilde{f}_\alpha(x) = 0$, para cada $x \notin U_\alpha$ (tomar para $\tilde{f}_\alpha$ a função correspondente ao aberto U_α e ignorar a função correspondente ao aberto $A_\alpha \setminus \mathrm{ad}(V_\alpha)$).
Para cada $1 \le \alpha \le p$, podemos considerar o prolongamento $f_\alpha: A \to [0,1]$ de $\tilde{f}_\alpha$ definido por

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \tilde{f}_\alpha(x), & \text{se } x \in A_\alpha \\ 0, & \text{se } x \notin A_\alpha \end{cases}$$

e reparamos que se tem mesmo $f_\alpha(x) = 0$ para cada $x \in A \setminus C_\alpha$. Qualquer que seja $1 \le \beta \le p$, tem-se que $f_{\alpha/A_\beta}: A_\beta \to [0,1]$ é suave, uma vez que tem restrições suaves aos abertos $A_\beta \cap A_\alpha$ e $A_\beta \setminus C_\alpha$ de união A_β, a segunda por ser identicamente nula e a primeira por a estrutura diferenciável de $A_\beta \cap A_\alpha$ induzida pela de A_β coincidir com a induzida pela de A_α. Por fim, para cada $x \in X$,

$$f_1(x) + \cdots + f_p(x) \ge 1,$$

uma vez que existe α tal que $x \in V_\alpha$ e então $f_\alpha(x) = 1$. □

VI.3.11 **(Colagem finita de estruturas diferenciáveis)** Sejam A um espaço topológico separado e localmente compacto e $A_1, \dots, A_p$ abertos de A, de união A, munidos de estruturas diferenciáveis mutuamente compatíveis. Existe então sobre A uma única estrutura diferenciável colagem das dos A_j.
Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:
a) A unicidade de uma estrutura diferenciável colagem é já conhecida (cf. VI.3.4).
b) Seja, para cada $1 \le \alpha \le p$, $\varphi_\alpha: A_\alpha \to B_\alpha \subset E_\alpha$ uma carta da estrutura diferenciável de A_α. Consideremos aplicações $f_1, \dots, f_p: A \to [0,1]$ verificando as condições 1), 2) e 3) do lema precedente. Para cada $1 \le \alpha \le p$, seja $\psi_\alpha: A \to E_\alpha$ a aplicação definida por

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x)\varphi_\alpha(x), & \text{se } x \in A_\alpha \\ 0, & \text{se } x \notin A_\alpha \end{cases}$$

e reparemos que se tem mesmo $\psi_\alpha(x) = 0$, para cada $x \in A \setminus C_\alpha$, uma vez que, se fosse também $x \in A_\alpha$, tinha-se $f_\alpha(x) = 0$. Além disso, para cada $1 \le \beta \le p$, a restrição $\psi_{\alpha/A_\beta}: A_\beta \to E_\alpha$ é suave, por ter restrições suaves aos abertos $A_\beta \cap A_\alpha$ e $A_\beta \setminus C_\alpha$, de união A_β a segunda por ser identicamente

nula e a primeira por f_α e φ_α terem restrições suaves a $A_\beta \cap A_\alpha$ (para a suavidade da restrição de φ_α lembrar que a estrutura diferenciável induzida em $A_\beta \cap A_\alpha$ pela de A_β coincide com a induzida pela de A_α).
c) Consideremos a aplicação $\varphi: A \to E_1 \times \cdots \times E_p \times \mathbb{R}^p$ definida por

$$\varphi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_p(x), f_1(x), \dots, f_p(x)),$$

que tem restrição suave a cada conjunto A_β. Vamos verificar que a aplicação φ é injectiva. Sejam, com efeito, $x, y \in A$ tais que $\varphi(x) = \varphi(y)$. O facto de se ter $f_1(x) + \cdots + f_p(x) \geq 1$ implica a existência de $1 \leq \alpha \leq p$ tal que $f_\alpha(x) = f_\alpha(y) \neq 0$, em particular tem-se então $x, y \in C_\alpha \subset A_\alpha$, e portanto

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\psi_\alpha(x)}{f_\alpha(x)} = \frac{\psi_\alpha(y)}{f_\alpha(y)} = \varphi_\alpha(y),$$

o que implica, por $\varphi_\alpha: A_\alpha \to B_\alpha$ ser bijectiva, que $x = y$.
d) Sendo $C = \varphi(A)$, $\varphi: A \to C \subset E_1 \times \cdots \times E_p \times \mathbb{R}^p$ é uma bijecção contínua, por ter restrição suave, em particular contínua, a cada um dos abertos A_β de A, cuja união é A.
e) Reparemos agora que, para cada $(y_1, \dots, y_p, s_1, \dots, s_p) \in C$, tem-se, para cada $1 \leq \beta \leq p$, $s_\beta \in [0, 1]$ e $s_1 + \cdots + s_p \geq 1$, pelo que existe $1 \leq \beta \leq p$ tal que $s_\beta > 0$. O conjunto C é assim união de subconjuntos abertos $V_1, \dots, V_p$, onde

$$V_\beta = \{(y_1, \dots, y_p, s_1, \dots, s_p) \in C \mid s_\beta > 0\}$$

e, para cada $(y_1, \dots, y_p, s_1, \dots, s_p) = \varphi(x) \in V_\beta$, tem-se $f_\beta(x) = s_\beta > 0$, portanto $x \in A_\beta$ e $y_\beta = \psi_\beta(x) = f_\beta(x)\varphi_\beta(x) = s_\beta\varphi_\beta(x)$, o que implica que $\frac{y_\beta}{s_\beta} = \varphi_\beta(x) \in B_\beta$ e que

$$\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_p, s_1, \dots, s_p) = x = \varphi_\beta^{-1}(\frac{y_\beta}{s_\beta}).$$

f) O que vimos em e) mostra, em particular, que a bijecção contínua $\varphi: A \to C \subset E_1 \times \cdots \times E_p \times \mathbb{R}^p$ é mesmo um homeomorfismo, uma vez que $\varphi^{-1}: C \to A$ é contínua, por ter restrição contínua a cada um dos abertos $V_1, \dots, V_p$ de C, com união C.
De facto, o que vimos em e) mostra mesmo que, para cada $1 \leq \beta \leq p$, a restrição de φ^{-1} ao aberto V_β de C toma valores em A_β e é uma aplicação suave de V_β em A_β.
g) Consideremos em A a estrutura diferenciável definida pela carta $\varphi: A \to C \subset E_1 \times \cdots \times E_p \times \mathbb{R}^p$ e verifiquemos que esta estrutura diferenciável é a colagem pretendida. temos assim que mostrar que a estrutura diferenciável induzida em cada A_α pela estrutura diferenciável de A é a estrutura diferenciável de partida, para o que basta mostrar que cada $\varphi_{/A_\alpha}: A_\alpha \to \varphi(A_\alpha) \subset C$ é um difeomorfismo, quando se considera em A_α a estrutura diferenciável de partida. Já vimos em c) que $\varphi_{/A_\alpha}: A_\alpha \to C$ é

suave. Por outro lado $\varphi(A_\alpha)$ é a união dos subconjuntos $\varphi(A_\alpha)\cap V_\beta$, $1\le\beta\le p$, que são abertos em $\varphi(A_\alpha)$, e a restrição de $(\varphi_{/A_\alpha})^{-1}$ a $\varphi(A_\alpha)\cap V_\beta$ é uma aplicação suave $\varphi(A_\alpha)\cap V_\beta\to A_\alpha$ uma vez que, como vimos em f), ela toma valores em A_β e é suave como aplicação $\varphi(A_\alpha)\cap V_\beta\to A_\beta$ e, por hipótese, as estruturas diferenciáveis induzidas em $A_\alpha\cap A_\beta$ pelas de A_α e A_β coincidem. Concluímos agora que $(\varphi_{/A_\alpha})^{-1}\colon\varphi(A_\alpha)\to A_\alpha$ é também suave, e portanto $\varphi_{/A_\alpha}\colon A_\alpha\to\varphi(A_\alpha)$ é efectivamente um difeomorfismo. □

O nosso próximo passo é estabelecer existência de colagens para famílias numeráveis de abertos disjuntos dois a dois, munidos de estruturas diferenciáveis. O método para provar essa existência baseia-se no teorema de Whitney VI.2.32, provado na secção precedente, e para o podermos fazer vamos ter que fazer hipóteses um pouco mais fortes que as do resultado precedente, mais precisamente, vamos supor que os abertos são mesmo variedades abstractas e com dimensões globalmente limitadas.

VI.3.12 **(Colagem disjunta de variedades)** Sejam M um espaço topológico e $(M_n)_{n\ge1}$ uma família numerável de abertos de M, disjuntos dois a dois e com união M, cada um dos quais munido de uma estrutura diferenciável. Suponhamos que existe $m\ge0$ tal que cada M_n seja uma variedade abstracta com dimensão menor ou igual a m em todos os pontos. Existe então sobre M uma única estrutura diferenciável colagem das estruturas dos M_n e M, com esta estrutura, fica a ser uma variedade abstracta com dimensão menor ou igual a m em cada ponto.

Dem: A unicidade de uma tal estrutura diferenciável colagem já foi estabelecida em VI.3.4 e, a existir uma tal colagem, para cada $x_0\in M$ vai existir n tal que $x_0\in M_n$ e então o facto de M_n ser aberto em M implica que (M,x_0) e (M_n,x_0) são localmente difeomorfos, e portanto que M é no ponto x_0 uma variedade com dimensão igual à dimensão de M_n nesse ponto, em particular menor ou igual a m.

Tendo em conta VI.2.32, podemos considerar, para cada $n\ge1$, um espaço vectorial E_n de dimensão $2m+1$ e uma carta $\varphi_n\colon M_n\to A_n\subset E_n$ da estrutura diferenciável de M_n. Escolhendo, para cada n, um isomorfismo $E_n\to\mathbb{R}^{2m+1}$ e substituindo φ_n pela composta de φ_n com este isomorfismo, podemos já supor que se tem mesmo $E_n=\mathbb{R}^{2m+1}$. Para além disso, considerando em $\mathbb{R}^{2m+1}$ o produto interno canónico e compondo, se necessário, φ_n com um difomeofismo Ψ nas condições do lema VI.2.31, pode-se já supor que $A_n=\varphi_n(M_n)$ está contido na bola $B_1(0)$, de centro 0 e raio 1, de $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Notemos e_1 o primeiro vector da base canónica de $\mathbb{R}^{2m+1}$ e reparemos que as bolas abertas $B_1(2ne_1)$ de $\mathbb{R}^{2m+1}$, com centro $2ne_1$ e raio 1, são trivialmente disjuntas duas a duas. Podemos então considerar difeomorfismos

$$\widehat{\varphi}_n: M_n \to \widehat{A}_n = 2ne_1 + A_n \subset B_1(2ne_1), \quad \widehat{\varphi}_n(x) = 2ne_1 + \varphi_n(x),$$

que são portanto também cartas das estruturas diferenciáveis dos M_n, e definir uma bijecção $\varphi: M \to \widehat{A} = \bigcup_{n\geq 1} \widehat{A}_n \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ pela condição de ter restrição φ_n a cada M_n. Esta bijecção é um homeomorfismo por ter restrição contínua a cada um dos abertos M_n cuja união é M e por a sua inversa ter restrição contínua a cada um dos abertos $\widehat{A}_n = \varphi(M_n) = \widehat{A} \cap B_1(2ne_1)$ cuja união é $\widehat{A}$. Consideremos, enfim, a estrutura diferenciável de M definida pela carta φ. A estrutura diferenciável induzida em cada M_n admite $\varphi_{/M_n} = \widehat{\varphi}_n$ como carta, sendo assim a estrutura diferenciável dada em M_n. Esta estrutura diferenciável de M é assim a colagem procurada. □

Vamos passar agora ao resultado geral sobre a existência de colagens de estruturas de variedade abstracta. A demonstração que utilizamos, baseia-se numa ideia de Spanier e utiliza o seguinte lema topológico, também útil noutras situações.

VI.3.13 **(Greub, Halperin e Vanstone, [9])** Seja M um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável. Para cada base de abertos $\mathcal{U}$ de M, notemos $\mathcal{U}_f$ a base de abertos de M, que contém $\mathcal{U}$, formada por todas as uniões de famílias finitas de conjuntos pertencentes a $\mathcal{U}$, e $\mathcal{U}_s$ a base de abertos de M, que contém $\mathcal{U}$, formada por todas as uniões de famílias numeráveis de conjuntos pertencentes a $\mathcal{U}$, disjuntos dois a dois. Seja $\mathcal{U}$ uma base arbitrária de abertos de M. Tem-se então que $((\mathcal{U}_f)_s)_f$ é o conjunto de todos os abertos de M.

Dem: Basta mostrarmos que $M \in ((\mathcal{U}_f)_s)_f$, visto que então, dado um aberto arbitrário U de M, U é ainda um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável, que admite uma base de abertos $\mathcal{U}'$, constituída pelos conjuntos pertencentes a $\mathcal{U}$ que estão contidos em U, tendo-se trivialmente $((\mathcal{U}'_f)_s)_f \subset ((\mathcal{U}_f)_s)_f$.

Tendo em conta II.7.9, podemos considerar uma sucessão $(K_n)_{n\geq 1}$ de compactos de M, com união M, verificando a condição $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$, para cada n, e ponhamos, por comodidade, $K_{-1} = K_0 = \emptyset$, o que é compatível com a condição referida.

Para cada $n \geq 1$, consideremos um aberto $U_n \in \mathcal{U}_f$, verificando

$$K_n \setminus \text{int}(K_{n-1}) \subset U_n \subset \text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}.$$

Para provarmos a existência de $U_n \in \mathcal{U}_f$ nessas condições, atendemos a que $K_n \setminus \text{int}(K_{n-1})$ é um compacto contido no aberto $\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}$, escolhemos, para cada x nesse compacto, um aberto $V_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V_x \subset \text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}$ e tomamos para U_n uma união finita de tais abertos V_x, que ainda contenha o compacto.

Reparemos que a união dos abertos U_n é M, visto que, para cada $x \in M$,

podemos considerar o menor dos naturais n tais que $x \in K_n$, tendo-se então $x \notin K_{n-1}$, portanto $x \in K_n \setminus \mathrm{int}(K_{n-1}) \subset U_n$.
Reparemos agora que, se $n \geq m+3$, tem-se $U_n \cap U_m = \emptyset$, visto que se tem $U_n \cap K_{n-2} = \emptyset$ e $U_m \subset K_{m+1} \subset K_{n-2}$. Podemos assim considerar abertos A_1, A_2 e A_3, pertencentes a $(\mathcal{U}_f)_s$, definidos por

$$\begin{aligned} A_1 &= \bigcup_{n\geq 1} U_{3n-2} = U_1 \cup U_4 \cup U_7 \cup \cdots \\ A_2 &= \bigcup_{n\geq 1} U_{3n-1} = U_2 \cup U_5 \cup U_8 \cup \cdots \\ A_3 &= \bigcup_{n\geq 1} U_{3n} \quad\;\; = U_3 \cup U_6 \cup U_9 \cup \cdots, \end{aligned}$$

e tem-se $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, o que mostra que $M \in ((\mathcal{U}_f)_s)_f$. □

VI.3.14 **(Teorema de Whitney sobre a existência de colagens de variedades)** Sejam M um espaço topológico separado e de base contável, e $(M_j)_{j\in J}$ uma família de abertos de M de união M, cada um dos quais munido de uma estrutura diferenciável. Suponhamos que:

1) As estruturas diferenciáveis dos M_j são mutuamente compatíveis.

2) Para um certo $m \geq 0$, cada M_j é uma variedade abstracta com dimensão menor ou igual a m em cada ponto.

Existe então sobre M uma, e uma só, estrutura diferenciável colagem das dos M_j e, com esta estrutura, M é uma variedade abstracta com dimensão menor ou igual a m em cada ponto.

Dem: Vamos dividir a demonstração, que se baseia no lema anterior, em várias alíneas:

a) A unicidade de uma tal estrutura diferenciável colagem já foi estabelecida em VI.3.4 e, a existir uma tal colagem, para cada $x_0 \in M$ vai existir j tal que $x_0 \in M_j$ e então o facto de M_j ser aberto em M implica que (M, x_0) e (M_j, x_0) são localmente difeomorfos, e portanto que M é no ponto x_0 uma variedade com dimensão igual à dimensão de M_j nesse ponto, em particular menor ou igual a m.

b) Reparemos que a topologia de M, além de separada e de base contável, é também localmente compacta, uma vez que, se $x_0 \in M_j$, qualquer sistema fundamental de vizinhanças de x_0 em M_j é também sistema fundamental de vizinhanças de x_0 em M, por M_j ser aberto em M.

c) Se U é um aberto de M, U vai ser a união dos abertos $U \cap M_j$ de U, sobre cada um dos quais podemos considerar a estrutura diferenciável induzida pela de M_j, relativamente à qual $U \cap M_j$, sendo aberto em M_j, é uma variedade com dimensão menor ou igual a m em cada ponto. Vamos dizer que U é um *bom aberto* se existir em U uma estrutura diferenciável colagem das estruturas dos $U \cap M_j$, caso em que U fica a ser uma variedade com dimensão menor ou igual a m em cada ponto.

O resultado ficará provado se verificarmos que M é um bom aberto e é isso

que faremos nas alíneas seguintes.
d) Se U é aberto num dos M_i, então U é um bom aberto de M.
Subdem: A estrutura diferenciável de U induzida pela de M_i é uma colagem das estruturas diferenciáveis dos $U \cap M_j$, induzidas pelas dos M_j, visto que a estrutura diferenciável de $U \cap M_j$ induzida pela de M_j coincide com a induzida pela de M_i, uma vez que ambas coincidem com a induzida pela estrutura diferenciável de $M_i \cap M_j$, que é a induzida tanto pela de M_i como pela de M_j.
e) Se $U_1, \ldots, U_p$ são bons abertos de M, $U = U_1 \cup \cdots \cup U_p$ é também um bom aberto.
Subdem: Comecemos por reparar que as estruturas diferenciáveis dos U_α, $1 \leq \alpha \leq p$, são mutuamente compatíveis. Uma vez que $U_\alpha \cap U_\beta$ é a união dos abertos $U_\alpha \cap U_\beta \cap M_j$, $j \in J$, o resultado sobre a unicidade das colagens VI.3.4 reduz essa verificação à verificação de que, para cada j, as estruturas diferenciáveis induzidas em $U_\alpha \cap U_\beta \cap M_j$ pelas de U_α e U_β coincidem e isso é consequência de ambas coincidirem com a estrutura diferenciável aí induzida pela de M_j (a estrutura diferenciável induzida em $U_\alpha \cap M_j$ pela de U_α é, por definição a induzida aí pela de M_j, e analogamente com β no lugar de α).
Uma vez que os U_α são variedades, em particular localmente compactos, podemos aplicar VI.3.11 para garantir a existência sobre U de uma estrutura diferenciável colagem das dos U_α.
Vamos agora verificar que esta estrutura diferenciável de U permite deduzir que U é efectivamente um bom aberto, ou seja, vamos verificar que, para cada j, a estrutura diferenciável induzida em $U \cap M_j$ pela de U coincide com a induzida pela de M_j. Ora, isso é uma consequência do resultado sobre a unicidade das colagens VI.3.4, visto que $U \cap M_j$ é a união dos abertos $U_\alpha \cap M_j$, $1 \leq \alpha \leq p$, e as estruturas diferenciáveis induzidas em $U_\alpha \cap M_j$ pelas de U e de M_j coincidem, por a primeira ser a induzida pela de U_α.
f) Se $(U_n)_{n \geq 1}$ é uma família numerável de bons abertos de M disjuntos dois a dois, então $U = \bigcup\limits_{n \geq 1} U_n$ é também um bom aberto.
Subdem: Uma vez que os U_n são variedades com dimensão menor ou igual a m em cada ponto, podemos aplicar VI.3.12 para concluir a existência em U de uma estrutura diferenciável colagem das dos U_n. Vamos agora verificar que esta estrutura diferenciável permite deduzir que U é efectivamente um bom aberto, ou seja, vamos verificar que, para cada n, a estrutura diferenciável induzida em $U \cap M_j$ pela de U coincide com a induzida pela de M_j. Ora, isso é uma consequência do resultado sobre a unicidade das colagens VI.3.4, visto que $U \cap M_j$ é a união dos abertos $U_n \cap M_j$, $n \geq 1$, e as estruturas diferenciáveis induzidas em $U_n \cap M_j$ pelas de U e de M_j coincidem, por a primeira ser a induzida pela de U_n.
g) Vamos agora aplicar o lema VI.3.13 para terminar a demonstração. Começamos por notar que a classe $\mathcal{U}$ dos abertos de M que estão contidos nalgum dos M_i é uma base de abertos que, pelo que vimos em d), é formada

por bons abertos de M. Tendo em conta o que vimos em e) e f), deduzimos sucessivamente que as bases de abertos $\mathcal{U}_f$, $(\mathcal{U}_f)_s$ e $((\mathcal{U}_f)_s)_f$ são também constutuidas por bons abertos de M. O lema referido diz-nos que esta última base é constituida por todos os abertos de M pelo que, em particular, M é um bom aberto de M, o que termina a demonstração. □

VI.3.15 **(Nota)** Repare-se que, no resultado precedente, a hipótese de a topologia de M ser de base contável é automaticamente verificada no caso em que o conjunto dos índices j é finito ou numerável. Com efeito, se, para cada j, $\mathcal{U}_j$ é uma base contável de abertos de M_j, constata-se facilmente que a união dos $\mathcal{U}_j$ é uma base contável de abertos de M. Já a hipótese de esta topologia ser separada é essencial, como se viu na alínea b) de VI.3.8.

VI.3.16 **(Nota)** Tal como já referimos, o resultado precedente permite fazer a ponte entre a definição de variedade abstracta que temos vindo a desenvolver e aquela que é apresentada mais usualmente. Para simplificar limitamos as nossas observações ao caso em que se pretendem definir apenas as variedades abstractas sem bordo e com a mesma dimensão n em todos os pontos (caso esse que é aliás o único que é examinado em muitos livros de texto)

Quando M é um espaço topológico, parte-se usualmente do conceito de *carta local* de M, dando esse nome a um homeomorfismo $\varphi: U \to A$, onde U é um aberto de M e A um aberto $\mathbb{R}^n$[118]. Duas cartas locais $\varphi: U \to A$ e $\psi: V \to B$ dizem-se *compatíveis* se o homeomorfismo $(\psi_{/U\cap V}) \circ (\varphi_{/U\cap V})^{-1}$, entre os abertos $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ de $\mathbb{R}^n$, é um difeomorfismo. Um *atlas* de M é então um conjunto $\mathcal{A}$ de cartas locais $\varphi_j: U_j \to A_j \subset \mathbb{R}^n$, compatíveis duas a duas e tais que a união dos U_j seja M.

Se o espaço topológico M é separado e de base contável um tal atlas $\mathcal{A}$ determina uma estrutura de variedade abstracta de dimensão n (no sentido que temos estado a utilizar) do seguinte modo: Para cada j, consideramos a estrutura de variedade abstracta de dimensão n em U_j que é definida pela carta global φ_j; verifica-se imediatamente que a condição de compatibilidade entre as cartas locais φ_j e φ_k significa exactamente que as correspondentes estruturas de variedade abstracta em U_j e U_k induzem a mesma estrutura em $U_j \cap U_k$; a estrutura de variedade abstracta determinada em M é então a colagem das estruturas dos U_j, estrutura essa cuja existência é garantida pelo resultado precedente.

Há ainda que ter em conta a possibilidade de uma mesma estrutura de variedade abstracta de dimensão n poder ser definida por dois atlas distintos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Constata-se facilmente que isso acontece se, e só se, cada carta local do atlas $\mathcal{A}$ é compatível com cada carta local do atlas $\mathcal{B}$ (ou, o que é o mesmo, se, e só se, a união dos dois atlas é ainda um atlas).

A definição usual de variedade abstracta de dimensão n sobre o espaço

[118] Se se pretendesse estudar, mais geralmente, as variedades abstractas com bordo, permitir-se-ia que A fosse um aberto de um sector de $\mathbb{R}^n$.

topológico M, separado e de base contável, corresponde à fixação de uma classe de equivalência de atlas de M para a relação de equivalência entre atlas que corresponde a exigir que cada carta local do primeiro seja compatível com cada carta local do segundo. Tem-se, é claro, que mostrar que a relação referida entre atlas é de equivalência (apesar de a relação de compatibilidade entre cartas locais não o ser!), o que é uma demonstração trabalhosa, principalmente pelo peso das notações envolvidas.

Uma vez que é claro que, para cada variedade abstracta M de dimensão n, no sentido que temos estado a usar, podemos sempre considerar uma família de difeomorfismos $\varphi_j: U_j \to A_j$, com U_j aberto em M e A_j aberto em $\mathbb{R}^n$, cujos domínios tenham união M e que esta família de difeomorfismos vai constituir um atlas do espaço topológico M cuja estrutura de variedade associada é a de partida, constatamos que a via que seguimos e a via mais usual conduzem a conceitos equivalentes de variedade abstracta de dimensão n.

§4. Variedades quociente.

VI.4.1 Sejam M uma variedade abstracta sem bordo, $\widehat{M}$ um conjunto e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação sobrejectiva. Chama-se *estrutura de variedade quociente* sobre $\widehat{M}$ a qualquer estrutura diferenciável sobre $\widehat{M}$, relativamente à qual $\widehat{M}$ seja uma variedade sem bordo e $f: M \to \widehat{M}$ seja uma submersão (cf. VI.2.17).

A propriedade fundamental das estruturas de variedade quociente é a referida em VI.2.29: Se A é um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, uma aplicação $g: \widehat{M} \to A$ é suave se, e só se, a composta $g \circ f: M \to A$ é suave. Essa propriedade permite, em particular, mostrar que não pode existir mais que uma estrutura de variedade quociente em $\widehat{M}$:

VI.4.2 Sejam M uma variedade abstracta sem bordo, $\widehat{M}$ um conjunto e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação sobrejectiva. Não pode então existir sobre $\widehat{M}$ mais que uma estrutura de variedade quociente. Além disso, relativamente à topologia associada de $\widehat{M}$, a aplicação f fica contínua e aberta.

Dem: A haver duas estruturas nessas condições, concluíamos que a aplicação $Id_{\widehat{M}}: \widehat{M} \to \widehat{M}$ ia ser suave de cada uma das estruturas para a outra, o que implicava que as duas estruturas diferenciáveis coincidiam. A continuidade de f é uma consequência da sua suavidade e o facto de f ser uma aplicação aberta resulta de VI.2.28. □

Vamos agora estabelecer um condição necessária e suficiente para a existência de estrutura de variedade quociente. Começamos com a prova de que a condição é necessária, prova essa será precedida de um lema envolvendo variedades concretas, ao qual a condição necessária se reduz pelos métodos habituais de invariância por difeomorfismo.

VI.4.3 **(Lema)** Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo e $f: M \to \widehat{M}$ uma submersão. Sendo

$$C = \{(x, y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\},$$

tem-se então:
a) C é uma subvariedade sem bordo fechada em $M \times M$.
b) A restrição da primeira projecção $\pi_1: M \times M \to M$ a C é uma submersão de C para M.
c) Sendo $(x, y) \in C$ tal que as dimensões de M em x, de M em y e de $\widehat{M}$ em $f(x) = f(y)$ sejam respectivamente m, n e k, a dimensão de C em (x, y) é $m + n - k$ e

$$T_{(x,y)}(C) = \{(u, v) \in T_x(M) \times T_y(M) \mid Df_x(u) = Df_x(v)\}.$$

Dem: Seja $\Delta \subset \widehat{M} \times \widehat{M}$ o conjunto diagonal,

$$\Delta = \{(z, z)\}_{z \in \widehat{M}} = \{(z, z') \in \widehat{M} \times \widehat{M} \mid z = z'\}.$$

A caracterização $\Delta = \{(z, z') \in \widehat{M} \times \widehat{M} \mid z - z' = 0\}$ mostra que Δ é fechado em $\widehat{M}$ e, considerando o difeomorfismo $g: \widehat{M} \to \Delta$, definido por $g(z) = (z, z)$, cujo inverso é a restrição da primeira projecção $\widehat{M} \times \widehat{M} \to \widehat{M}$, vemos que Δ é uma variedade sem bordo, tendo, em cada ponto (z, z), a mesma dimensão que a variedade $\widehat{M}$ em z. Além disso, o facto de se ter $Dg_z(w) = (w, w)$ implica que $T_{(z,z)}(\Delta) \subset T_z(\widehat{M}) \times T_z(\widehat{M})$ é o conjunto dos (w, w), com $w \in T_z(\widehat{M})$. Por outro lado, a aplicação suave

$$h: M \times M \to \widehat{M} \times \widehat{M}, \quad h(x, y) = (f(x), f(y)),$$

tem a derivada

$$Dh_{(x,y)}: T_x(M) \times T_y(M) \to T_{f(x)}(\widehat{M}) \times T_{f(y)}(\widehat{M})$$

definida por $Dh_{(x,y)}(u, v) = (Df_x(u), Df_x(v))$, sendo portanto, uma aplicação linear sobrejectiva. Podemos assim concluir que $C = h^{-1}(\Delta)$ é fechado em $M \times M$ e, tendo em conta II.4.32, que C é uma variedade sem bordo, com dimensão $m + n - (2k - k) = m + n - k$ em cada ponto (x, y) tal que m, n e k sejam as dimensões de M em x, de M em y e de $\widehat{M}$ em $f(x) = f(y)$, respectivamente. O mesmo resultado garante também que, para cada $(x, y) \in C$, $T_{(x,y)}(C)$ é o conjunto dos $(u, v) \in T_x(M) \times T_y(M)$ tais que $Dh_x(u, v) \in T_{(f(x),f(y))}(\Delta)$, isto é, tais que $Df_x(u) = Df_y(v)$.

Sejam agora $(x,y) \in C$ e $u \in T_x(M)$. Tem-se $Df_x(u) \in T_{f(x)}(\widehat{M}) = T_{f(y)}(\widehat{M})$ pelo que o facto de a aplicação linear $Df_y: T_y(M) \to T_{f(y)}(\widehat{M})$ ser sobrejectiva implica a existência de $v \in T_y(M)$ tal que $Df_x(u) = Df_y(v)$, portanto, pelo que vimos atrás, tal que $(u,v) \in T_{(x,y)}(C)$; o facto de a derivada da primeira projecção $\pi_1: M \times M \to M$ em (x,y), na direcção de (u,v), ser igual a u implica assim que a derivada da restrição a C dessa projecção no ponto (x,y) é sobrejectiva. □

VI.4.4 Sejam M uma variedade abstracta sem bordo, $\widehat{M}$ um conjunto e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação sobrejectiva e suponhamos que existe em $\widehat{M}$ uma estrutura de variedade quociente. Sendo

$$C = \{(x,y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\},$$

tem-se então:

a) C é fechado em $M \times M$ e, com a estrutura diferenciável induzida pela de $M \times M$, é uma variedade sem bordo.

b) A restrição da primeira projecção $\pi_1: M \times M \to M$ a C é uma submersão de C para M.

c) Sendo $(x,y) \in C$ tal que as dimensões de M em x, de M em y e de $\widehat{M}$ em $f(x) = f(y)$ sejam respectivamente m, n e k, a dimensão de C em (x,y) é $m+n-k$.

Dem: Consideremos cartas $\varphi: M \to M' \subset E$ e $\psi: \widehat{M} \to \widehat{M}' \subset \widehat{E}$ das duas variedades abstractas. Tem-se então que M' e $\widehat{M}'$ são variedades concretas sem bordo e a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: M' \to \widehat{M}'$ é uma submersão, à qual podemos aplicar o lema precedente. Deduzimos, em primeiro lugar, que

$$\begin{aligned} C' &= \{(z,w) \in M' \times M' \mid \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(w)\} = \\ &= \{(z,w) \in M' \times M' \mid f \circ \varphi^{-1}(z) = f \circ \varphi^{-1}(w)\} = \\ &= \{(z,w) \in M' \times M' \mid (\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(w)) \in C\} \end{aligned}$$

é uma subvariedade de $M' \times M'$ e portanto, considerando o difeomorfismo $\varphi \times \varphi: M \times M \to M' \times M'$, $C = (\varphi \times \varphi)^{-1}(C')$ é uma variedade sem bordo. Seguidamente, notando $\pi'_1: M' \times M' \to M'$ a primeira projecção, cuja restrição a C' sabemos ser uma submersão de C' para M', vemos que, para cada $(x,y) \in C$, tem-se

$$\pi_1(x,y) = x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\pi'_1((\varphi \times \varphi)(x,y))),$$

o que mostra que $\pi_{1/C}: C \to M$ é a composta do difeomorfismo $\varphi \times \varphi: C \to C'$ com a submersão $\pi'_{1/C'}: C' \to M'$ com o difeomorfismo $\varphi^{-1}: M' \to M$, sendo assim uma submersão. Seja enfim $(x,y) \in C$ tal que as dimensões de M em x, de M em y e de $\widehat{M}$ em $f(x) = f(y)$ sejam respectivamente m, n e k. Considerando o correspondente ponto $(x',y') = (\varphi \times \varphi)(x,y) = (\varphi(x), \varphi(y)) \in C'$, o facto de M' ter dimensões m e n em

$x' = \varphi(x)$ e em $y' = \varphi(y)$ e de $\widehat{M}'$ ter dimensão k em $\psi(f(x)) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x')$ implica que a dimensão de C' em (x', y') é $m + n - k$, e portanto, considerando o difeomorfismo $C' \to C$, restrição de $(\varphi \times \varphi)^{-1}$, esta é também a dimensão de C em (x, y). □

Vamos ver adiante que as condições a) e b) atrás descritas são também suficientes para garantir a existência de uma estrutura de variedade quociente. A respectiva demonstração é bastante menos elementar que a anterior e é cómodo começar por estabelecer o seguinte lema:

VI.4.5 **(Lema)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $U \subset E$ um aberto, com $0 \in U$, $\widehat{M}$ um conjunto e $f: U \to \widehat{M}$ uma aplicação tal que

$$C = \{(x, y) \in U \times U \mid f(x) = f(y)\}$$

seja uma variedade sem bordo. Existe então um aberto U_0 de E, com $0 \in U_0 \subset U$, e um subespaço vectorial $G \subset E$ tais que:
a) Para cada $x \in U_0$, existe um, e um só, $y \in U_0 \cap G$ tal que $f(x) = f(y)$.
b) A aplicação $\rho: U_0 \to U_0 \cap G$, definida pela condição de se ter $f(x) = f(\rho(x))$, é uma submersão sobrejectiva.
Dem: Para uma melhor sistematização, vamos dividir a demonstração em várias alíneas:
1) Seja $F \subset E$ o subespaço vectorial

$$F = \{w \in E \mid (0, w) \in T_{(0,0)}(C)\}$$

e fixemos um subespaço vectorial $G \subset E$ tal que $E = F \oplus G$. Vamos mostrar que se tem então

$$E \times E = T_{(0,0)}(C) \oplus (\{0\} \times G).$$

Subdem: Começamos por reparar que o facto de, para cada $x \in U$, se ter $(x, x) \in C$ implica, por derivação, que, para cada $u \in E$, se tem $(u, u) \in T_{(0,0)}(C)$. Para cada $(u, v) \in E \times E$, podemos escrever $v - u = w + w'$, com $w \in F$ e $w' \in G$ e então

$$(u, v) = (u, u) + (0, w) + (0, w'),$$

com $(u, u) + (0, w) \in T_{(0,0)}(C)$ e $(0, w') \in \{0\} \times G$. Uma vez que, pela definição de F e por se ter $F \cap G = \{0\}$, $T_{(0,0)}(C)$ e $\{0\} \times G$ têm, evidentemente, intersecção $\{(0, 0)\}$, concluímos que tem lugar a soma directa pretendida.
2) Seja $g: C \times G \to E \times E$ a aplicação suave definida por

$$g((x, y), z) = (x, y - z),$$

que verifica $g((0, 0), 0) = (0, 0)$. Vamos verificar a existência de um aberto U' de E, com $0 \in U' \subset U$, de um aberto V de G, com $0 \in V$, e de um

aberto W de $E \times E$ tais que a restrição de g seja um difeomorfismo do aberto $A = (C \cap (U' \times U')) \times V$ de $C \times G$ sobre W.
Subdem: A aplicação linear

$$Dg_{((0,0),0)} : T_{(0,0)}(C) \times G \to E \times E$$

está definida por $((u,v),w) \mapsto (u,v) - (0,w)$, sendo portanto um isomorfismo, tendo em conta a soma directa referida em 1). Basta então aplicar o teorema da função inversa concluir a asserção.
3) Consideremos um aberto $\tilde{V}$ de E, tal que $V = \tilde{V} \cap G$ e notemos $W_{\cdot,0}$ o aberto de E, contendo 0, constituído pelos x tais que $(x,0) \in W$. Seja

$$U'' = U' \cap W_{\cdot,0} \cap \tilde{V},$$

que é portanto um aberto de E com $0 \in U'' \subset U$. Vamos mostrar que, para cada $x \in U''$, existe um, e um só, $y \in U'' \cap G$, tal que $f(x) = f(y)$, esse y sendo nomeadamente igual à segunda componente de $(g_{/A})^{-1}(x,0) \in C \times G$.
Subdem: O facto de se ter $(x,0) \in W$ implica a existência de $(\tilde{x}, y) \in C \cap (U' \times U')$ e de $z \in V$ tais que

$$(x,0) = g((\tilde{x},y),z) = (\tilde{x}, y - z),$$

portanto $x = \tilde{x}$ e $y = z$. Em particular, $(x,y) \in C$, isto é, $f(x) = f(y)$, e o facto de se ter $(y,0) = g((y,y),y)$, com $(y,y) \in C \cap (U' \times U')$ e $y \in V$, implica que $(y,0) \in W$, donde

$$y \in U' \cap W_{\cdot,0} \cap \tilde{V} \cap G = U'' \cap G.$$

Quanto à unicidade, dado $\tilde{y} \in U'' \cap G$ tal que $f(x) = f(\tilde{y})$, temos que mostrar que se tem $\tilde{y} = y$. Ora, isso resulta de que $(x, \tilde{y}) \in C \cap (U' \times U')$, $\tilde{y} \in V$ e

$$(x,0) = g((x,\tilde{y}),\tilde{y}),$$

donde, pela injectividade da restrição de g, $((\tilde{x},y),z) = ((x,\tilde{y}),\tilde{y})$, em particular $\tilde{y} = y$.
4) Seja $\rho : U'' \to U'' \cap G$ a aplicação definida pela condição de $\rho(x)$ ser o único elemento de $U'' \cap G$ que verifica $f(x) = f(\rho(x))$. O modo de determinar um tal elemento, indicado em 3), mostra que $\rho(x)$ é a segunda componente do vector $g_{/A}^{-1}(x,0) \in C \times G$, o que implica que $\rho : U'' \to U'' \cap G$ é uma aplicação suave.
5) O modo como a aplicação ρ está definida implica trivialmente que, para cada $x \in U'' \cap G$, $\rho(x) = x$. Daqui se deduz, por derivação, que, para cada $u \in G$, $D\rho_0(u) = u$, em particular a aplicação linear $D\rho_0 : E \to G$ é sobrejectiva.
6) Pelo teorema da submersão, II.4.22, existe um aberto U''' de E, com $0 \in U''' \subset U''$ tal que, para cada $x \in U'''$, $D\rho_x : E \to G$ seja uma aplicação

linear sobrejectiva. Seja, enfim, $U_0 = \{x \in U''' \mid \rho(x) \in U'''\}$, que é portanto um aberto de E tal que $0 \in U_0 \subset U'''$. O facto de se ter $\rho(x) = x$, para cada $x \in U'' \cap G$, implica que ρ aplica U_0 sobre $U_0 \cap G$ e a restrição de ρ a U_0 vai ser portanto uma submersão sobrejectiva. □

VI.4.6 **(Existência de estrutura de variedade quociente)** Sejam M uma variedade abstracta sem bordo, $\widehat{M}$ um conjunto e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação sobrejectiva. Sendo

$$C = \{(x, y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\},$$

suponhamos que:
a) C é fechado em $M \times M$ e, com a estrutura diferenciável induzida pela de $M \times M$, é uma variedade sem bordo.
b) A restrição da primeira projecção, $\pi_1\colon M \times M \to M$, a C é uma submersão de C para M.
Existe então em $\widehat{M}$ uma, e uma só, estrutura de variedade quociente.
Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:
1) Existe uma topologia em $\widehat{M}$, cujos abertos são os conjuntos $\widehat{U} \subset \widehat{M}$ tais que $f^{-1}(\widehat{U})$ é aberto em M.
Subdem: Para isso basta mostrar que a classe dos subconjuntos de $\widehat{M}$ naquelas condições verifica os axiomas dos abertos de um espaço topológico e isso é uma consequência das igualdades $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\widehat{M}) = M$, $f^{-1}(\bigcup \widehat{U}_j) = \bigcup f^{-1}(\widehat{U}_j)$ e $f^{-1}(\widehat{U} \cap \widehat{V}) = f^{-1}(\widehat{U}) \cap f^{-1}(\widehat{V})$.
2) Consideremos em $\widehat{M}$ a topologia referida em 1). A aplicação $f\colon M \to \widehat{M}$ fica contínua e aberta.
Subdem: A continuidade de f é uma consequência imediata da caracterização da continuidade a partir das imagens recíprocas dos conjuntos abertos, mas já o facto de f ser uma aplicação aberta não é tão evidente. O que temos que mostrar é que, se U é um aberto de M, então $f(U)$ é um aberto de $\widehat{M}$, ou seja, por definição, que $f^{-1}(f(U))$ é um aberto de M. Ora, isso resulta de que a restrição de $\pi_1\colon M \times M \to M$ a C é uma submersão, em particular uma aplicação aberta (cf. VI.2.28) e de que se tem

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(U)) &= \{x \in M \mid \underset{y \in U}{\exists}\, f(x) = f(y)\} = \\ &= \{x \in M \mid \underset{y \in U}{\exists}\, (x, y) \in C\} = \pi_1((M \times U) \cap C), \end{aligned}$$

com $(M \times U) \cap C$ aberto em C.
3) A topologia que estamos a considerar em $\widehat{M}$ é separada e de base contável.
Subdem: Sejam $z \neq z'$ em $\widehat{M}$. Vem $z = f(x)$ e $z' = f(y)$, com $(x, y) \notin C$ e o facto de C ser fechado em $M \times M$ implica então que existem abertos U e U' de M, com $x \in U$, $y \in U'$ e $(U \times U') \cap C = \emptyset$ e então os abertos $f(U)$ e $f(U')$ de $\widehat{M}$, contendo z e z', respectivamente, são disjuntos, visto que, se $f(\tilde{x}) = f(\tilde{y})$, com $\tilde{x} \in U$ e $\tilde{y} \in U'$, vinha $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in (U \times U') \cap C$.

Ficou assim provado que $\widehat{M}$ é um espaço topológico separado. Para verificar que $\widehat{M}$ é de base contável basta reparar que, se $\mathcal{U}$ é uma base de abertos de M, finita ou numerável, a classe $\widehat{\mathcal{U}}$ dos conjuntos $f(U)$, com $U \in \mathcal{U}$, é uma base de abertos finita ou numerável de $\widehat{M}$, visto que, se $\widehat{U}$ é um aberto de $\widehat{M}$ e $z = f(x) \in \widehat{U}$, podemos considerar $U \in \mathcal{U}$, com $x \in U \subset f^{-1}(\widehat{U})$ e então $z \in f(U) \subset \widehat{U}$.

4) Para cada $x_0 \in M$, existe um aberto U de M, com $x_0 \in U$, e uma estrutura de variedade sem bordo sobre $f(U)$, com a topologia induzida pela de $\widehat{M}$, tal que $f_{/U}\colon U \to f(U)$ seja uma submersão.

Subdem: Comecemos por considerar um aberto U' de M, com $x_0 \in U'$, um aberto V' de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in V'$ e um difeomorfismo $\varphi\colon V' \to U'$, com $\varphi(0) = x_0$. Considerando então a aplicação $f \circ \varphi\colon V' \to \widehat{M}$, vemos que, sendo

$$C' = \{(z, z') \in V' \times V' \mid f \circ \varphi(z) = f \circ \varphi(z')\},$$

tem-se $C' = (\varphi \times \varphi)^{-1}(C \cap (U' \times U'))$. pelo que o facto de $\varphi \times \varphi$ ser um difeomorfismo de $V' \times V'$ sobre $U' \times U'$ implica que C' é uma variedade sem bordo. Podemos agora aplicar o lema precedente para garantir a existência de um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in V \subset V'$, de um subespaço vectorial de dimensão finita $G \subset \mathbb{R}^n$ e de uma submersão sobrejectiva $\rho\colon V \to V \cap G$ tal que, para cada $z \in V$, $\rho(z)$ é o único elemento de $V \cap G$, para o qual se tem $f \circ \varphi(z) = f \circ \varphi(\rho(z))$, em particular $\rho(z) = z$, para cada $z \in V \cap G$. Consideremos agora o aberto $U = \varphi(V)$ de M, com $x_0 \in U$. Vai ter lugar uma aplicação contínua $\psi\colon V \cap G \to f(U)$, definida por $\psi(z) = f(\varphi(z))$, a qual vai ser bijectiva, visto que a injectividade é uma consequência da condição de unicidade na definição de $\rho(z)$ e a sobrejectividade resulta da igualdade

$$f \circ \varphi(z) = f \circ \varphi(\rho(z)) = \psi(\rho(z)),$$

para cada $z \in V$. Esta mesma igualdade vai implicar que a aplicação ψ é aberta, e portanto um homeomorfismo, visto que, para cada aberto W de $V \cap G$, $\psi(W) = f(\varphi(\rho^{-1}(W)))$, onde $\rho^{-1}(W)$ é aberto em V, e portanto em U. Podemos agora definir uma estrutura diferenciável em $f(U)$, com a topologia induzida pela de $\widehat{M}$, pela condição de o homeomorfismo ψ ser um difeomorfismo (cf. VI.1.26), sendo trivial que $f(U)$, com esta estrutura diferenciável, é uma variedade sem bordo, com dimensão igual à de G. O facto de se ter, como vimos atrás $f_{/U} \circ \varphi_{/V} = \psi \circ \rho\colon V \to f(U)$, onde $\psi \circ \rho$ é uma submersão, por ser o composto de um difeomorfismo com uma submersão, garante-nos, tendo em conta a alínea b) de VI.2.21 e a igualdade $\varphi(V) = U$, que $f_{/U}\colon U \to f(U)$ é uma submersão.

5) O que vimos em 4) mostra-nos que, para cada $x \in M$, existe um aberto U_x de M, com $x \in U_x$, e uma estrutura de variedade sem bordo sobre o aberto $f(U_x)$ de $\widehat{M}$, com a topologia induzida pela de $\widehat{M}$, tal que a restrição

$f_{/U_x}: U_x \to f(U_x)$ seja uma submersão. O facto de a aplicação $f: M \to \widehat{M}$ ser sobrejectiva implica que a família dos abertos $f(U_x)$ de $\widehat{M}$, com $x \in M$, tem união $\widehat{M}$. Vamos verificar que as estruturas diferenciáveis nos $f(U_x)$ são mutuamente compatíveis, isto é, que, dados $x, y \in M$, as estruturas diferenciáveis nos abertos $f(U_x)$ e $f(U_y)$ induzem a mesma estrutura diferenciável em $f(U_x) \cap f(U_y)$.

Subdem: Tendo em conta o resultado de unicidade de colagens em VI.3.4, bastará provar que, para cada $z \in f(U_x) \cap f(U_y)$, existe um aberto W de $\widehat{M}$, com $z \in W \subset f(U_x) \cap f(U_y)$, tal que as estruturas diferenciáveis induzidas em W pelas de $f(U_x)$ e de $f(U_y)$ coincidam.

Seja $z = f(x') = f(y')$, com $x' \in U_x$ e $y' \in U_y$. Tem-se assim $(x', y') \in C$ pelo que o facto de a restrição da primeira projecção ser uma submersão $C \to M$ implica, tendo em conta VI.2.27, a existência de um aberto U' de M, com $x' \in U'$, e de uma aplicação suave $\sigma: U' \to M$ tal que $\sigma(x') = y'$ e que, para cada $x'' \in U'$, $(x'', \sigma(x'')) \in C$, isto é, $f(x'') = f(\sigma(x''))$. Por continuidade, vemos que, se necessário reduzindo o aberto U', pode já supor-se que $U' \subset U_x$ e $\sigma(U') \subset U_y$. Sendo $W' = f(U')$, W' é um aberto de $\widehat{M}$, contendo $z = f(x')$ e contido em $f(U_x) \cap f(U_y)$. Uma vez que $f_{/U'}: U' \to W'$ é uma submersão sobrejectiva, quando se considera em W' a estrutura de variedade sem bordo induzida pela de $f(U_x)$ e que a composta da inclusão $W' \to f(U_y)$ com $f_{/U'}$ é uma aplicação suave $U' \to f(U_y)$, por estar definida por $x'' \mapsto f(x'') = f(\sigma(x''))$, concluímos de VI.2.29 que aquela inclusão é suave, e portanto que $Id_{W'}: W' \to W'$ é suave, quando se considera no domínio a estrutura diferenciável induzida pela de $f(U_x)$ e no espaço de chegada a induzida pela de $f(U_y)$. Por simetria dos papéis de x e y, existe também um aberto W'' de $\widehat{M}$, com $z \in W'' \subset f(U_x) \cap f(U_y)$, tal que $Id_{W'}: W' \to W'$ seja suave, quando se considera no domínio a estrutura diferenciável induzida pela de $f(U_y)$ e no espaço de chegada a induzida pela de $f(U_x)$ e então $W = W' \cap W''$ é um aberto de $\widehat{M}$, com $z \in W \subset f(U_x) \cap f(U_y)$, tal que em W coincidem as estruturas diferenciáveis induzidas pela de $f(U_x)$ e pela de $f(U_y)$, por $Id_W: W \to W$ ser suave de cada uma destas para a outra.

6) Repare-se que, sendo m um majorante da dimensão de M nos diferentes pontos (cf. VI.2.3), o facto de os $f_{/U_x}: U_x \to f(U_x)$ serem submersões implica que a dimensão de $f(U_x)$ nos diferentes pontos é menor ou igual a m. Tendo em conta o teorema de existência de colagens VI.3.14, concluímos a existência de uma estrutura diferenciável no espaço topológico $\widehat{M}$ que induz em cada $f(U_x)$ a estrutura de variedade sem bordo que aí colocámos e $\widehat{M}$ fica então a ser uma variedade sem bordo. A aplicação $f: M \to \widehat{M}$ fica suave, por isso acontecer à sua restrição a cada um dos abertos U_x, de união M, e o facto de a restrição de f a cada U_x ser uma submersão implica trivialmente que $f: M \to \widehat{M}$ é uma submersão.

7) O facto de a estrutura de variedade sem bordo de $\widehat{M}$ considerada ser a única para a qual $f\colon M \to \widehat{M}$ é uma submersão resulta de VI.4.2. □

VI.4.7 **(Corolário)** Nas condições anteriores, se a variedade M tem dimensão m em x e a variedade $C \subset M \times M$ tem dimensão k em (x,x), então a variedade $\widehat{M}$ tem dimensão $2m-k$ em $f(x)$.
Dem: Trata-se de uma consequência da caracterização da dimensão de C em VI.4.4. □

§5. Subvariedades imersas e teorema de Frobenius global.

VI.5.1 Seja M uma variedade abstracta. Vamos chamar *subvariedade imersa* de M a um par formado por um subconjunto $A \subset M$ e por uma estrutura diferenciável sobre A (a topologia e a estrutura diferenciável de A não são obrigatoriamente as induzidas pelas de M) de modo que se verifiquem as seguintes condições:
a) A, com a estrutura diferenciável dada, é uma variedade. Usaremos habitualmente a notação (A) para nos referirmos a esta variedade e à sua topologia, de modo a continuar a aplicar a convenção de, ao escrevermos simplesmente A, estar subentendido que a estrutura diferenciável considerada é a induzida.
b) A inclusão $\iota\colon (A) \to M$ é uma imersão.
Diremos que a subvariedade imersa é *normal* se se verifica, além disso:
c) Para cada $x_0 \in A$, existe um aberto U de A (topologia induzida), com $x_0 \in U$, onde a dimensão de (A) é constante.[119]

VI.5.2 Se M é uma variedade abstracta, continuaremos a chamar *subvariedades* de M aos subconjuntos A de M que, com estrutura diferenciável induzida, são ainda subvariedades. Estes conjuntos, com a estrutura diferenciável induzida, são casos particulares de subvariedades imersas normais.
Dem: Uma vez que as condições a) e b) são trivialmente verificadas só temos que notar que a condição c) resulta da constância local da dimensão de uma variedade. □

VI.5.3 Se (A) é uma subvariedade imersa normal de M e se A (com a topologia induzida pela de M) é conexo, então A tem a mesma dimensão em todos os pontos.
Dem: O facto de a subvariedade ser normal implica que, para cada n o conjunto dos pontos $x \in A$ onde a dimensão de (A) é n é aberto em A (para

[119] Esta condição não é normalmente explicitada uma vez que a maioria dos autores apenas considera variedades com a mesma dimensão em todos os pontos, caso em que a condição se verifica trivialmente. No quadro geral em que nos colocamos, ela parece ser verificada na maioria dos casos interessantes e será utilizada adiante.

a topologia induzida) pelo que não pode haver mais que um destes conjuntos que seja não vazio. □

O resultado seguinte, que será aplicado com frequência, permite garantir a suavidade de certas aplicações que tomam valores numa subvariedade imersa.

VI.5.4 Sejam M uma variedade abstracta e (A) uma subvariedade imersa. Sejam $\widehat{A}$ um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $g\colon \widehat{A} \to M$ uma aplicação de classe C^p tal que $g(\widehat{A}) \subset A$ e que $g\colon \widehat{A} \to (A)$ seja contínua. Tem-se então que $g\colon \widehat{A} \to (A)$ é de classe C^p.
Dem: Basta aplicar VI.2.25 à imersão inclusão $\iota\colon (A) \to M$. □

VI.5.5 Sejam M uma variedade abstracta e (A) uma subvariedade imersa. Tem-se então que a topologia associada de (A) é mais fina[120] que a topologia induzida pela de M, sendo igual a esta se, e só se, a estrutura diferenciável de (A) for a induzida pela de M (ou seja, se, e só se, $(A) = A$).
Dem: Uma vez que $Id_A\colon (A) \to A$ é uma aplicação suave, em particular contínua, podemos concluir que a topologia de (A) é mais fina que a de A. É também evidente que, se $(A) = A$, então a topologia de (A) é a induzida pela de M. Reciprocamente, se a topologia de (A) é a induzida pela de M, segue-se que a imersão $Id_A\colon (A) \to M$ é uma homeomorfismo de (A) sobre A e portanto, tendo em conta VI.2.26, é um difeomorfismo de (A) sobre A, o que implica que $(A) = A$. □

VI.5.6 **(Corolário)** Sejam M uma variedade abstracta e (A) uma subvariedade imersa compacta. Tem-se então $(A) = A$, ou seja, (A) é mesmo uma subvariedade.
Dem: Basta atender a que a bijecção $Id_A\colon (A) \to A$ é contínua, com (A) compacto e A separado, pelo que é um homeomorfismo, o que quer dizer que as topologias de (A) e de A coincidem. □

VI.5.7 **(Corolário)** Sejam M uma variedade abstracta e (A) uma subvariedade imersa **sem bordo**, tendo em cada ponto a mesma dimensão que a de M (uma subvariedade imersa sem bordo de dimensão máxima). Tem-se então $(A) = A$, ou seja, (A) é mesmo uma subvariedade, e A é aberto em M.
Dem: A igualdade das dimensões implica que a imersão $\iota\colon (A) \to M$ é também uma submersão e, tendo em conta a alínea c) de VI.2.22, a sua imagem está contida na variedade sem bordo $\partial_0(M)$. Tendo em conta VI.2.28, $\iota\colon A \to \partial_0(M)$ é uma aplicação aberta, em particular A é aberto em $\partial_0(M)$, e portanto também em M, e $Id_A\colon (A) \to A$ é uma bijecção contínua

[120] Recordemos que uma topologia num conjunto A se diz mais fina que outra topologia sobre o mesmo conjunto se $Id_A\colon A \to A$ for contínua da primeira topologia para a segunda.

e aberta, portanto um homeomorfismo, o que implica que (A) e A têm a mesma topolgia. □

Com um espírito semelhante ao de VI.5.5, mas não implicando nem sendo implicado pela respectiva conclusão, temos o resultado seguinte, que vai, mais uma vez, no sentido que a topologia determina univocamente a estrutura de subvariedade imersa. O exemplo que apresentaremos adiante na alínea e) de VI.5.13 mostra que um mesmo subconjunto pode ter mais que uma estrutura de subvariedade imersa, desde que as respectivas topologias sejam distintas.

VI.5.8 Sejam M uma variedade abstracta e $A \subset M$ um subconjunto sobre o qual estão definidas duas estruturas $(A)'$ e $(A)''$ de subvariedade imersa de M. Se as topologias de $(A)'$ e $(A)''$ forem iguais então $(A)' = (A)''$.
Dem: Aplicando VI.5.4 à aplicação suave inclusão $\iota\colon (A)' \to M$, que é, por hipótese, contínua de $(A)'$ para $(A)''$, concluímos que $Id_A\colon (A)' \to (A)''$ é suave. Pela mesma razão, $Id_A\colon (A)'' \to (A)'$ é também suave, o que implica que $(A)' = (A)''$. □

VI.5.9 Sejam M uma variedade abstracta e (A) uma subvariedade imersa de M.
a) Se (B) é uma subvariedade imersa de (A), então (B) é uma subvariedade imersa de M.
b) Se (B) é uma subvariedade imersa de M, com $B \subset A$, e a inclusão $\iota\colon (B) \to (A)$ contínua, então (B) é uma subvariedade imersa de (A).
Dem: a) Por definição, as inclusões $\iota_{M,A}\colon (A) \to M$ e $\iota_{A,B}\colon (B) \to (A)$ são imersões e daqui decorre, tendo em conta VI.2.21, que a inclusão

$$\iota_{M,B} = \iota_{M,A} \circ \iota_{A,B}\colon (B) \to M$$

é uma imersão, e portanto que (B) é uma subvariedade imersa de M.
b) Uma vez que a inclusão $\iota_{M,B}\colon (B) \to M$ é suave e contínua de (B) para (A), resulta de VI.5.4 que $\iota_{A,B}\colon (B) \to (A)$ é suave. Tendo em conta, mais uma vez, VI.2.21, podemos concluir que $\iota_{A,B}\colon (B) \to (A)$ é uma imersão, e portanto que (B) é uma subvariedade imersa de (A). □

Ao contrário do que porventura apeteceria dizer, não podemos garantir que, se (A) é uma subvariedade imersa normal de M e (B) é uma subvariedade imersa normal de (A), (B) tenha que ser uma subvariedade imersa normal de M. Ver um contra-exemplo adiante na alínea e) de VI.5.13.

VI.5.10 Sejam M uma variedade abstracta e (A) uma subvariedade imersa de M. Para cada $x_0 \in A$ existe então um aberto W de (A), com $x_0 \in W$, tal que em W coincidam as estruturas diferenciáveis induzidas pela de M e pela de (A), em particular W é uma subvariedade de M.

Dem: Trata-se de uma consequência de utilizar VI.2.24 com a aplicação suave inclusão $\iota\colon (A) \to M$, que tem derivada injectiva em todos os pontos, visto que este resultado implica a existência de um tal W tal que a identidade Id_W seja um difeomorfismo de W, com a estrutura induzida pela de (A), sobre W, com a estrutura induzida pela de M. □

VI.5.11 **(Método de construção)** Sejam M e B duas variedades abstractas e $f\colon B \to M$ uma imersão injectiva. Seja $A = f(B)$ e notemos (A) este conjunto com a estrutura diferenciável para a qual f é um difeomorfismo. Tem-se então que (A) é uma subvariedade imersa de M.[121]

Dem: O facto de (A) ser uma variedade resulta de ser difeomorfo à variedade B. O facto de a inclusão $\iota\colon (A) \to M$ ser uma imersão resulta de ser a composta do difeomorfismo $f^{-1}\colon (A) \to B$ com a imersão $f\colon B \to M$. □

VI.5.12 Qualquer subvariedade imersa (A) duma variedade abstracta M pode ser construída pelo método anterior, podendo mesmo exigir-se que a variedade B seja concreta.

Dem: Basta considerar uma carta $\varphi\colon (A) \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de (A), para a qual B vai ser automaticamente uma variedade, e tomar $f = \varphi^{-1}$. □

VI.5.13 **(Exemplos e contraexemplos nas subvariedades imersas)**

a) O subconjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, dos números racionais, não é uma subvariedade, como se constata se repararmos, por exemplo, que ele não é localmente compacto para a topologia induzida. Podemos considerar em $\mathbb{Q}$ a sua estrutura única de variedade de dimensão 0, cuja topologia associada é a discreta (é um conjunto contável). Notando $(\mathbb{Q})$ esta variedade, é imediato que se trata de uma subvariedade imersa normal de $\mathbb{R}$.

b) Seja $B \subset \mathbb{R}$ a variedade sem bordo $]-\infty,-1[\,\cup\{0\}\cup\,]1,+\infty[$, que tem dimensão 0 em 0 e dimensão 1 nos restantes pontos. Seja $f\colon B \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & \text{se } t \in\,]-\infty,-1[\\ 0, & \text{se } t = 0 \\ t-1, & \text{se } t \in\,]1,+\infty[\end{cases},$$

que é suave por ter restrições suaves a cada um dos três abertos $]-2,-1[$, $\{0\}$ e $]1,2[$ de B e que é uma imersão por essas restrições serem imersões.

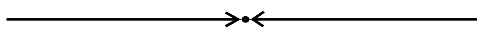

Figura 16

Tem-se $\mathbb{R} = f(B)$, que é, trivialmente, uma subvariedade sem bordo, conexa

[121] Na linguagem de Warner [26], podemos dizer que (A) é a subvariedade imersa associada ao par (B, f).

de dimensão 1 de $\mathbb{R}$. No entanto, notando $(\mathbb{R})$ este mesmo conjunto mas com a estrutura diferenciável para a qual $f\colon B \to (\mathbb{R})$ é um difeomorfismo, $(\mathbb{R})$ é uma subvariedade imersa, sem bordo, distinta de $\mathbb{R}$. De facto a topologia de $(\mathbb{R})$ não é conexa, por $\mathbb{R}$ ser a união disjunta dos abertos de $(\mathbb{R})$ $]-\infty, 0[$, $\{0\}$ e $]0, +\infty[$.
Note-se que a subvariedade imersa $(\mathbb{R})$ não é normal, uma vez que ela tem dimensão 0 em 0 e dimensão 1 em todos os outros pontos.
c) Este exemplo é uma pequena variante do exemplo em b). Seja $B \subset \mathbb{R}$ a variedade com bordo de dimensão 1, $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$. Seja $f\colon B \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in]-\infty, 0] \\ t-1, & \text{se } t \in]1, +\infty[\end{cases},$$

que é suave por ter restrições suaves a cada um dos dois abertos $]-\infty, 0]$ e $]1, +\infty[$ de B e que é uma imersão por essas restrições serem imersões.

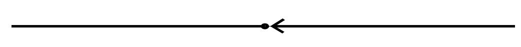

Figura 17

Tem-se $\mathbb{R} = f(B)$, que é, trivialmente, uma subvariedade sem bordo, conexa de dimensão 1 de $\mathbb{R}$. No entanto, notando $(\mathbb{R})$ este mesmo conjunto mas com a estrutura diferenciável para a qual $f\colon B \to (\mathbb{R})$ é um difeomorfismo, $(\mathbb{R})$ é uma subvariedade imersa normal, com bordo, de dimensão 1, distinta de $\mathbb{R}$. De facto a topologia de $(\mathbb{R})$ não é conexa, por $\mathbb{R}$ ser a união disjunta dos abertos de $(\mathbb{R})$ $]-\infty, 0]$ e $]0, +\infty[$.
d) Sejam $f, g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ as aplicações suaves definidas por

$$f(t) = (\sin(t), \sin(2t)), \quad g(t) = (\sin(t), -\sin(2t)),$$

as quais constituem imersões, uma vez que as derivadas

$$f'(t) = (\cos(t), 2\cos(2t)), \quad g'(t) = (\cos(t), -2\cos(2t)),$$

são diferentes de $(0, 0)$ em todos os pontos (lembrar que se tem $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, pelo que $\cos(2t) = -1$ sempre que $\cos(t) = 0$).
Lembrando a fórmula $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, que implica que

$$\sin^2(2t) = 4\sin^2(t)(1 - \sin^2(t)),$$

vemos que $f([0, 2\pi])$ e $g([0, 2\pi])$ estão ambos contidos no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x^2(1 - x^2)\}.$$

Suponhamos, reciprocamente, que $(x, y) \in A$. Tem que ser $1 - x^2 \geq 0$ (isso é automático se $x = 0$) pelo que existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que $\sin(t) = x$ e concluímos então que $y^2 = 4\sin^2(t)(1 - \sin^2(t)) = \sin^2(2t)$ pelo que, substituindo se necessário t por $\pi - t$, se $t \leq \pi$, e t por $3\pi - t$, se $t \geq \pi$, podemos conseguir que se tenha também $y = \sin(2t)$ ou, alternativamente, que se tenha também $y = -\sin(2t)$. Verificámos assim que se tem mesmo

$$A = f([0, 2\pi]) = g([0, 2\pi]),$$

em particular A é um subconjunto compacto e conexo de $\mathbb{R}^2$ (o “oito” da figura 18).

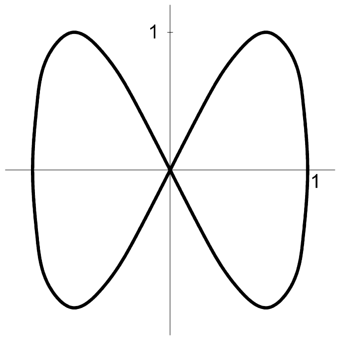

Figura 18

Reparando que

$$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = (0, 0), \quad g(0) = g(\pi) = g(2\pi) = (0, 0)$$

e fazendo uma discussão simples, envolvendo os sinais das segundas componentes de f e g e os sinais e sentidos de variação das suas primeiras componentes em cada um dos intervalos $]0, \frac{\pi}{2}[$, $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ e $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, constatamos facilmente que as restrições de f e g são duas aplicações bijectivas de $]0, 2\pi[$ sobre A (sugeridas nas figuras 19 e 20, respectivamente).

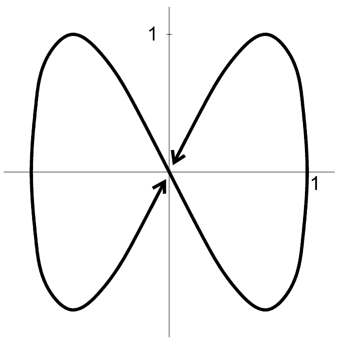

Figura 19

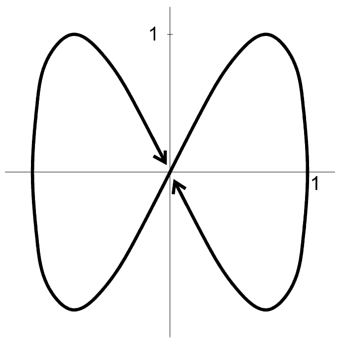

Figura 20

Estas bijecções são imersões injectivas pelo que definem em A duas estruturas de subvariedade imersa normal, conexa, de dimensão 1 e sem bordo, que notaremos $(A)'$ e $(A)''$, respectivamente.
Sendo $\varphi\colon]0, 2\pi[\to]0, 2\pi[$ a aplicação definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \pi - t, & \text{se } 0 < t < \pi \\ \pi, & \text{se } t = \pi \\ 3\pi - t, & \text{se } \pi < t < 2\pi \end{cases},$$

verificamos facilmente que, para cada $t \in]0, 2\pi[$, $g(t) = f(\varphi(t))$, por outras palavras,

$$\varphi = (f_{/]0,2\pi[})^{-1} \circ g_{/]0,2\pi[} \colon]0, 2\pi[\to]0, 2\pi[.$$

O facto de φ não ser contínua em π implica que as topologias de $(A)'$ e de $(A)''$ são distintas, e portanto as respectivas estruturas diferenciáveis também são distintas.
Observemos enfim que A não é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$. De facto, a caracterização $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x^2(1 - x^2)\}$ implica facilmente, por II.4.32, que o conjunto conexo A é uma variedade sem bordo de dimensão 1 em todos os pontos distintos de $(0, 0)$, mas o facto de se ter

$$(-1, 2) = f'(\pi) \in T_{(0,0)}(A), \quad (-1, -2) = g'(\pi) \in T_{(0,0)}(A)$$

implica que $T_{(0,0)}(A) = \mathbb{R}^2$, e portanto que A não pode ser uma variedade em $(0, 0)$.
e) Retomemos o exemplo em d) da subvariedade imersa normal de dimensão 1 e sem bordo, $(A)'$, de $\mathbb{R}^2$. Seja $B \subset A$ o subconjunto

$$B = g(]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[) = f(]0, \frac{\pi}{2}[\cup \{\pi\} \cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[)$$

sobre o qual consideramos duas estruturas diferenciáveis $(B)'$ e $(B)''$, induzidas pelas de $(A)'$ e $(A)''$, respectivamente, ou seja, definidas pela condição de as restrições de f e de g, respectivamente, serem difeomorfismos.

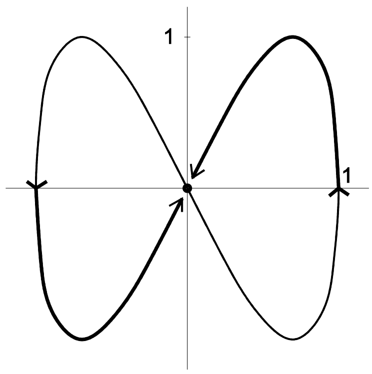

Figura 21

$(B)''$ é uma subvariedade imersa conexa sem bordo normal e com dimensão 1 de $\mathbb{R}^2$, mas não é uma subvariedade imersa de $(A)'$. De facto, a inclusão

$\iota_{A,B}\colon (B)'' \to (A)'$ não é suave, visto que, composta com os difeomorfismos

$$g_{/]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}\colon]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\to (B)'' \quad (f_{/]0,2\pi[})^{-1}\colon (A)' \to]0,2\pi[$$

é a restrição da aplicação φ, considerada em c), ao interalo $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$, a qual não é contínua em π.

Pelo contrário $(B)'$ é mesmo uma subvariedade sem bordo de $(A)'$, em particular uma subvariedade imersa normal de $(A)'$, a qual não é conexa e tem dimensão 0 em $(0,0) = f(\pi)$ e dimensão 1 nos restantes pontos (situação semelhante à do exemplo b)). Observe-se que, no entanto, $(B)'$ é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^2$, mas não uma subvariedade imersa normal de $\mathbb{R}^2$.

O exemplo d) em VI.5.13 mostra-nos que sobre um mesmo subconjunto A de uma variedade abstracta M pode existir mais que uma estrutura de subvariedade imersa normal e sem bordo; esse conjunto não era, no entanto, uma subvariedade. O exemplo b) em VI.5.13 mostra-nos uma situação em que, sobre uma subvariedade A de M, existe uma estrutura distinta de subvariedade imersa sem bordo, a qual, no entanto, não era normal. O exemplo c) em VI.5.13 mostra-nos o mesmo fenómeno para uma subvariedade imersa normal, mas que agora tem bordo. O resultado que apresentamos a seguir mostra-nos que este fenómeno só é possível para uma subvariedade imersa não normal ou com bordo.

VI.5.14 **(Warner [26])** Sejam M uma variedade abstracta e $A \subset M$ uma subvariedade. Se (A) é uma subvariedade imersa **normal e sem bordo** de M sobre o conjunto A, então $(A) = A$.

Dem: 1) Vamos começar por demonstrar o resultado no caso particular em que E é um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ é um variedade concreta.

Consideremos um espaço vectorial F de dimensão finita, um subconjunto $B \subset F$ e um difeomorfismo $f\colon B \to (A)$ (o inverso duma carta da variedade abstracta (A)). Em particular B, tal como (A) é uma variedade sem bordo.

Tendo em conta VI.1.26, o nosso caso particular ficará demonstrado se verificarmos que a bijecção $f\colon B \to A$ também é um difeomorfismo.

De facto $f\colon B \to M$ é uma imersão, sendo a composta do difeomorfismo $f\colon B \to (A)$ com a imersão inclusão $\iota\colon (A) \to M$, e portanto, por $A \subset M$ ser uma subvariedade, podemos mesmo garantir que $f\colon B \to A$ é uma imersão, em particular suave.

Para provar que $f\colon B \to A$ é um difeomorfismo basta assim mostrar que, para cada $x_0 \in B$, existe um aberto U de B, com $x_0 \in U$ tal que $f_{/U}$ seja um difeomorfismo de U sobre $f(U)$, com $f(U)$ aberto em A, visto que então $f^{-1}\colon A \to B$ é também suave, por ter restrições suaves a uma família de abertos de A de união A (os diferentes $f(U)$).

Seja $x_0 \in B$ arbitrário. Podemos escolher um aberto V' de A, com

$f(x_0) \in V'$, tal que A tenha a mesma dimensão n em todos os pontos de V' e o facto de (A) ser uma variedade imersa normal permite-nos escolher outro aberto V'' de A, com $f(x_0) \in V''$, tal que (A) tenha a mesma dimensão m em todos os pontos de V''. Tem-se então que $V''' = V' \cap V''$ é um aberto de A, com $f(x_0) \in V'''$ tal que em todos os pontos de V''' A tem a mesma dimensão n e (A) tem a mesma dimensão m e portanto, por $f: B \to A$ ser suave, em particular contínua, $U''' = f^{-1}(V''')$ é um aberto de B, com $x_0 \in U'''$. O facto de $f: B \to (A)$ ser um difeomorfismo implica também que B tem a mesma dimensão m em todos os pontos de U'''.
O facto de $f: B \to A$ ser uma imersão, e portanto $Df_{x_0}: T_{x_0}(B) \to T_{f(x_0)}(A)$ ser uma aplicação linear injectiva, onde $T_{x_0}(B)$ e $T_{f(x_0)}(A)$ têm dimensões m e n, respectivamente, implica que $m \le n$. Por outro lado, considerando o aberto não vazio $\partial_0(V''')$ de V''', e portanto de A,[122] podemos aplicar o teorema de Sard (II.7.14) à restrição de f ao aberto $f^{-1}(\partial_0(V'''))$ de B, contido em U''', para garantir a existência de $x_1 \in U'''$ tal que a aplicação linear $Df_{x_1}: T_{x_1}(B) \to T_{f(x_1)}(A)$ seja sobrejectiva, o que implica que $m \ge n$, e portanto $m = n$.
Podemos agora garantir que a aplicação linear injectiva $Df_{x_0}: T_{x_0}(B) \to T_{f(x_0)}(A)$ é mesmo um isomorfismo, e portanto, pela alínea c) de VI.2.22 a variedade A tem índice 0 no ponto $f(x_0)$. Podemos agora aplicar o teorema da função inversa II.4.16 para garantir a existência de um aberto U de B, com $x_0 \in U$ tal que a restrição de f seja um difeomorfismo de U sobre $f(U)$, com $f(U)$ aberto em A, que é o que nos faltava provar para concluir o caso particular que estamos a examinar.
2) Resta-nos mostrar o resultado no caso geral em que M é uma variedade abstracta, que se vai reduzir facilmente ao caso particular já estudado. Sejam, com efeito, G um espaço vectorial de dimensão finita e $\varphi: M \to M' \subset E$ uma carta de M, que é portanto um difeomorfismo de M sobre a variedade concreta M'. Tem-se então que $A' = \varphi(A)$ é uma subvariedade de M' e $\varphi_{/A}: A \to A' \subset E$ é uma carta de A e podemos considerar a estrutura (A') de variedade abstracta sem bordo em A' para a qual $\varphi_{/A}: (A) \to (A')$ é um difeomorfismo, estrutura essa para a qual a inclusão $(A') \to M'$ vai ser uma imersão, por ser a composta do difeomorfismo $(\varphi_{/A})^{-1}: (A') \to (A)$ com a imersão inclusão $(A) \to M$ e com o difeomorfismo $\varphi: M \to M'$. (A') é assim uma subvariedade imersa sem bordo de M', a qual é normal, uma vez que, se U é um aberto de A onde a dimensão de (A) é constante, $\varphi(U)$ é um aberto de A' onde a dimensão de (A') é constante. Pelo caso particular já estudado, tem-se assim $(A') = A'$ e daqui concluímos que $(A) = A$, tendo em conta VI.1.26. □

Vamos definir em seguida a noção de espaço vectorial tangente a uma subvariedade imersa e, mais geralmente, a uma aplicação de classe C^p,

[122] Exigimos que (A) fosse sem bordo, mas não que A fosse sem bordo.

$p \geq 1$, num ponto do seu domínio. Uma vez que ainda não examinámos o conceito de espaço vectorial tangente a um conjunto munido de uma estrutura diferenciável, limitamo-nos a estudar o caso em que o espaço de chegada é uma parte de um espaço vectorial de dimensão finita.

VI.5.15 Sejam $M \subset E$ um subconjunto de um espaço vectorial de dimensão finita, A um conjunto munido de uma estrutura diferenciável e $f: A \to M$ uma aplicação de classe C^p, $p \geq 1$. Sejam $\varphi: A \to B \subset F$ e $\psi: A \to C \subset G$ cartas da estrutura diferenciável de A. Para cada $x \in A$,

$$D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}: T_{\varphi(x)}(B) \to T_{f(x)}(M),$$
$$D(f \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}: T_{\psi(x)}(C) \to T_{f(x)}(M),$$

têm então a mesma imagem em $T_{f(x)}(M)$.

Dem: Basta atender a que se tem $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$, onde $\varphi \circ \psi^{-1}: C \to B$ é um difeomorfismo, pelo que

$$D(f \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} = D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)},$$

onde $D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}: T_{\psi(x)}(C) \to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo. □

VI.5.16 Sejam $M \subset E$, A um conjunto munido de uma estrutura diferenciável e $f: A \to M$ uma aplicação C^p, $p \geq 1$. Para cada $x \in A$, define-se o *espaço vectorial tangente a f em x* como sendo a imagem $T_x(f)$ da aplicação linear

$$D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}: T_{\varphi(x)}(B) \to T_{f(x)}(M),$$

onde $\varphi: A \to B \subset F$ é uma carta da estrutura diferenciável.

VI.5.17 Tem-se $f: A \to M$ submersão em x, se, e só se, $T_x(f) = T_{f(x)}(M)$.

Dem: Por definição, f é submersão em x se, e só se, é sobrejectiva

$$D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}: T_{\varphi(x)}(B) \to T_{f(x)}(M). \quad \square$$

VI.5.18 Se A é uma variedade de dimensão n no ponto x e $f: A \to M$ é uma imersão, então o espaço vectorial tangente $T_x(f)$ tem dimensão n.

Dem: Como $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}: T_{\varphi(x)}(B) \to T_{f(x)}(M)$ é injectiva, a sua imagem, $T_x(f)$, tem a dimensão de $T_{\varphi(x)}(B)$, igual à de A em x. □

VI.5.19 Se $M \subset E$ e $A \subset F$ e se $f: A \to M$ é uma aplicação C^p, $p \geq 1$, tem-se simplesmente $T_x(f) = Df_x(T_x(A))$ (considerar a carta Id_A). Em particular, no caso em que $A \subset M$ e $\iota: A \to M$ é a inclusão, tem-se $T_x(\iota) = T_x(A)$.

VI.5.20 Sejam $M \subset E$, A e $\widehat{A}$ conjuntos munidos de estruturas diferenciáveis e $\alpha: A \to \widehat{A}$ suave. Para cada aplicação C^p, $f: \widehat{A} \to M$ e cada $x \in A$ vem

$$T_x(f \circ \alpha) \subset T_{\alpha(x)}(f),$$

vindo mesmo $T_x(f \circ \alpha) = T_{g(x)}(f)$ se α é submersão no ponto x.

Dem: Basta reparar que, sendo $\varphi: A \to B \subset F$ e $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{F}$ cartas das estruturas diferenciáveis de A e $\widehat{A}$, tem-se

$$D(f \circ \alpha \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} = D(f \circ \psi^{-1})_{\psi(\alpha(x))} \circ D(\psi \circ \alpha \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)},$$

o que implica que a imagem de $D(f \circ \alpha \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ está contida na imagem de $D(f \circ \psi^{-1})_{\psi(\alpha(x))}$, sendo mesmo igual a esta última se a aplicação linear $D(\psi \circ \alpha \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ é sobrejectiva, isto é, se α é submersão no ponto x. □

VI.5.21 Em particular, se $M \subset E$, $\widehat{A}$ é um conjunto com uma estrutura diferenciável, $A \subset \widehat{A}$ e $f: \widehat{A} \to M$ é uma aplicação C^p, vem $T_x(f_{/A}) \subset T_x(f)$ e $T_x(f_{/A}) = T_x(f)$ no caso em que A é uma vizinhança de x em $\widehat{A}$.

VI.5.22 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $\beta: M \to \widehat{M}$ C^p. Se A tem uma estrutura diferenciável e $f: A \to M$ é uma aplicação C^p, então, para cada $x \in A$,

$$T_x(\beta \circ f) = D\beta_{f(x)}(T_x(f)).$$

Dem: Sendo $\varphi: A \to B \subset F$ uma carta da estrutura diferenciável de A, tem-se $D(\beta \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} = D\beta_{f(x)} \circ D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$, pelo que a imagem em $T_{f(x)}(\widehat{M})$ de $D(\beta \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ é igual à imagem por $D\beta_{f(x)}$ da imagem em $T_x(M)$ de $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$. □

VI.5.23 Em particular, no caso em que $M \subset \widehat{M} \subset \widehat{E}$, vemos que, se A é um conjunto munido de uma estrutura diferenciável e $f: A \to M$ é uma aplicação C^p, então, para cada $x \in A$, o espaço vectorial tangente $T_x(f)$ é o mesmo quer se considere M ou $\widehat{M}$ como espaço de chegada.

As considerações anteriores vão ser especialmente importantes no caso em que a aplicação suave é a inclusão de uma subvariedade imersa.

VI.5.24 Sejam $M \subset E$ uma variedade concreta e (A) uma subvariedade imersa (cf. VI.5.1). Para cada $x \in A$, define-se então o espaço vectorial tangente $T_x((A)) \subset T_x(M)$, à subvariedade imersa no ponto x, como sendo o espaço vectorial tangente à inclusão $\iota: (A) \to M$ no ponto x.

É claro que, como referimos em VI.5.19, quando A é mesmo uma subvariedade de M, o espaço tangente $T_x((A))$, de A como subvariedade imersa, coincide com o espaço tangente $T_x(A)$, de A como parte de E.

VI.5.25 **(Functorialidade)** Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ variedades, $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação C^1 e (A) uma subvariedade imersa de M.

a) Se $g: M \to \widehat{M}$ é uma aplicação C^1 tal que $f_{/A} = g_{/A}$, então, para cada $x \in A$ e $u \in T_x((A))$, $Df_x(u) = Dg_x(u)$.

b) Se $(\widehat{A})$ é subvariedade imersa de $\widehat{M}$ com $f(A) \subset \widehat{A}$ e $f_{/A}: (A) \to (\widehat{A})$

C^1, vem, para cada $x \in A$ e $u \in T_x((A))$, $Df_x(u) \in T_{f(x)}((\widehat{A}))$.
Dem: Seja $\varphi\colon (A) \to B \subset F$ uma carta de (A). Tem-se $u = D\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(u')$, com $u' \in T_{\varphi(x)}(B)$ e, nas hipóteses de a), como $f \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi^{-1}$,

$$Df_x(u) = D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(u') = D(g \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(u') = Dg_x(u).$$

Nas hipóteses de b), sendo $\psi\colon (\widehat{A}) \to \widehat{B} \subset \widehat{F}$ uma carta de $(\widehat{A})$, a aplicação de classe C^1 $f \circ \varphi^{-1}\colon B \to \widehat{M}$ é a composta das aplicações C^1

$$\psi \circ f_{/A} \circ \varphi^{-1}\colon B \to \widehat{B}, \quad \psi^{-1}\colon \widehat{B} \to \widehat{M},$$

donde

$$Df_x(u) = D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(u') = D\psi^{-1}_{\psi(f(x))}(D(\psi \circ f_{/A} \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(u')$$

pertence à imagem de $D\psi^{-1}_{\psi(f(x))}$, igual a $T_{f(x)}((\widehat{A}))$. □

VI.5.26 Sejam $M \subset E$ uma variedade concreta e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial, com $E_x \subset T_x(M)$. Generalizando a definição em IV.9.1, chamamos *subvariedade imersa integral* (respectivamente, *semi-integral*) de $\underline{E}$ a uma subvariedade imersa (A) de M tal que, para cada $x \in A$, $T_x((A)) = E_x$ (respectivamente, $T_x((A)) \subset E_x$).
Se (A) é uma subvariedade imersa integral de $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$, então (A) é uma subvariedade imersa normal de M.
Dem: Dado $x_0 \in A$, seja U um aberto de M, com $x_0 \in U$, tal que todos os E_x, com $x \in U$, tenham a mesma dimensão n e então $A \cap U$ é um aberto de A, com $x_0 \in U$ tal que, para cada $x \in A \cap U$, (A) tem dimensão n em x. □

VI.5.27 **(Lema)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade **sem bordo**, e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Seja $V \subset M$ um aberto fatiável, com as correspondentes fatias V_c, $c \in W$ (cf. IV.9.10) e seja (A) uma subvariedade imersa integral **sem bordo** de $\underline{E}$. Tem-se então:
a) $V \cap A$ está contido numa união finita ou numerável de fatias V_c.
b) Se B é um conexo de M contido em $V \cap A$, então existe um aberto C de (A), contendo B e contido numa das fatias V_c, tal que C também é aberto em V_c e $(C) = C$ (isto é coincidem em C as estruturas diferenciáveis induzidas pelas de (A) e de M).
Dem: (Warner) a) O conjunto $V \cap A$ é aberto em A, e portanto em (A), e portanto, com a estrutura diferenciável induzida pela de (A) é ainda uma subvariedade imersa integral $(V \cap A)$. Lembrando VI.2.10, as componentes conexas A_j, $j \in J$, de $(V \cap A)$ são abertos de $(V \cap A)$, e portanto de (A), em número finito ou numerável e podemos notar (A_j) estas componentes conexas com a estrutura diferenciável induzida pela de (A), os (A_j) sendo então ainda subvariedades imersas integrais, agora conexas. Pela alínea b) de IV.9.10, aplicada à inclusão de (A_j) em V, cada A_j está contido numa das

fatias V_c. Concluímos então que $V \cap A$ está contido na união finita ou numerável das fatias V_c correspondentes a cada um dos A_j.
b) Seja B um conexo de M contido em $V \cap A$. Seja C o aberto de (A) união das componentes conexas A_j que intersectam B, conjunto que está contido em $V \cap A$ e é conexo em M, por ser a união do conexo B com conexos A_j de (A), e portanto de M, que intersectam B. Tendo em conta a conclusão de a), C está contido numa união finita ou numerável de fatias V_c e portanto, pela alínea c) de IV.9.10 o conjunto C está contido numa das fatias V_c.
A inclusão $\iota\colon (C) \to V_c$ é uma imersão entre variedades sem bordo com a mesma dimensão em cada $x \in C$ (igual à dimensão de E_x), pelo que, pela alínea b) de VI.2.22, ela é também submersão nesses pontos. Aplicando o teorema da função inversa (cf. VI.2.23), para cada $x \in C$ existe um aberto U_x de (C) tal que $id_{U_x}\colon (U_x) \to U_x$ seja um difeomorfismo com U_x aberto em V_c e daqui concluímos que $C = \cup U_x$ é aberto em V_c e que $id_C\colon (C) \to C$ é um difeomorfismo (a inversa é suave por ter restrição suave a cada um dos abertos U_x de C), portanto que $(C) = C$. □

VI.5.28 **(Propriedade especial das subvariedades imersas sem bordo integrais)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade **sem bordo**, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Sejam (A) uma subvariedade imersa integral **sem bordo** de $\underline{E}$, $\widehat{M}$ uma variedade[123] e $f\colon \widehat{M} \to M$ uma aplicação de classe C^p, $p \geq 1$, tal que $f(\widehat{M}) \subset A$. Tem-se então que $f\colon \widehat{M} \to (A)$ também é de classe C^p.[124]
Dem: Seja $z_0 \in \widehat{M}$ arbitrário. Sendo $x_0 = f(z_0) \in M$, consideremos um aberto fatiável V de M, com $x_0 \in V$, com as correspondentes fatias V_c, $c \in W$ (cf. IV.9.10). Seja $\widehat{U}$ a componente conexa do aberto $f^{-1}(V)$ de $\widehat{M}$ que contém z_0. Uma vez que $\widehat{M}$, sendo uma variedade, é localmente conexo, $\widehat{U}$ é um aberto conexo de $\widehat{M}$ com $z_0 \in \widehat{U}$ e $f(\widehat{U}) \subset V$. Tem-se então que $f(\widehat{U})$ é um subconjunto conexo de M contido em $V \cap A$ e podemos, pela alínea b) do lema precedente, considerar um subconjunto aberto C de (A) contendo $f(\widehat{U})$, contido numa das fatias V_c, com C também aberto em V_c e $(C) = C$. O facto de $f\colon \widehat{U} \to C$ ser C^p garante agora que $f\colon \widehat{U} \to (C)$ é C^p, e portanto $f\colon \widehat{U} \to (A)$ é C^p. O facto de termos uma noção local garante finalmente que $f\colon \widehat{M} \to (A)$ é de classe C^p. □

O resultado anterior não é válido para um conjunto $\widehat{M}$ com estrutura diferenciável arbitrária, senão poderíamos aplicá-lo à inclusão de A em M para garantir que $id_A\colon A \to (A)$ era suave, e portanto vinha $(A) = A$ e A era uma subvariedade. Na alínea e) de VI.5.13 vimos um exemplo que

[123] Ou, mais geralmente, um conjunto com uma estrutura diferenciável com topologia associada localmente conexa.
[124] Comparar com VI.5.4. A novidade é que não precisámos de exigir a continuidade de f de $\widehat{M}$ para (A).

mostra que o resultado não é válido para qualquer subvariedade imersa normal sem bordo (A) de M. O exemplo na alínea c) de VI.5.13 mostra também que é essencial no resultado anterior, como no lema que o precedeu, a hipótese de (A) não ter bordo (considerar como fibrado vectorial o contante de fibra $\mathbb{R}$).

VI.5.29 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Sejam $(A)'$ e $(B)''$ duas subvariedades imersas integrais sem bordo de $\underline{E}$. Tem-se então que $A \cap B$ é aberto em $(A)'$ e em $(B)''$ e $(A \cap B)' = (A \cap B)''$ (isto é, as estruturas diferenciáveis induzidas em $A \cap B$ pelas de $(A)'$ e $(B)''$ coincidem).

Dem: Seja $x \in A \cap B$ arbitrário. Seja V um aberto fatiável com $x \in V$. Tendo em conta o lema VI.5.27 (relativamente ao conexo $\{x\}$ contido em $V \cap A$), podemos considerar um aberto A_x de $(A)'$, com $x \in A_x$, contido na fatia V_0 de V, que contém x, e também aberto em V_0 e com $(A_x)' = A_x$. Do mesmo modo, podemos considerar um aberto B_x de $(B)''$, com $x \in B_x$, contido em V_0 e também aberto em V_0 e com $(B_x)'' = B_x$. Tem-se então que $x \in C_x = A_x \cap B_x$, com C_x aberto em V_0, contido simultaneamente em A e em B. Tem-se então que C_x é aberto em $A_x = (A_x)'$ e em $B_x = (B_x)''$, pelo que C_x é simultaneamente aberto em $(A)'$ e em $(B)''$. Além disso, tem-se $(C_x)' = (C_x)''$, isto é, coincidem em C_x as estruturas diferenciáveis induzidas pelas de $(A)'$ e $(B)''$, uma vez que ambas vão coincidir com a induzida por M (por ser $(A_x)' = A_x$ e $(B_x)'' = B_x$).
Deduzimos agora que $A \cap B$, que é a união dos C_x, com $x \in A \cap B$, é simultaneamente aberto em $(A)'$ e em $(B)''$. Além disso, $Id_{A \cap B}$ é uma aplicação suave de $(A \cap B)'$ para $(A \cap B)''$, por ter restrição suave a cada um dos abertos C_x de $(A \cap B)'$, cuja união é $A \cap B$, e, pela mesma razão, $Id_{A \cap B}$ é uma aplicação suave de $(A \cap B)''$ para $(A \cap B)'$, o que nos permite concluir que $(A \cap B)' = (A \cap B)''$. □

VI.5.30 **(A topologia fina de M)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade.
A variedade M é a união de todas as subvariedades imersas integrais sem bordo de $\underline{E}$ e existe sobre M uma, e uma só, topologia (à qual daremos o nome de *topologia fina* de M associada ao fibrado vectorial $\underline{E}$) tal que, qualquer que seja a subvariedade imersa integral sem bordo (A) de $\underline{E}$, A seja aberto para essa topologia e a topologia de (A) seja a induzida por ela.

Dem: O facto de cada $x_0 \in M$ pertencer a pelo menos uma subvariedade imersa integral sem bordo de $\underline{E}$ é uma consequência da versão geométrica local do teorema de Frobenius IV.9.11, que nos garante que x_0 pertence mesmo a uma subvariedade integral sem bordo de $\underline{E}$ (uma fatia dum aberto fatiável que contenha x_0). Pelo resultado precedente, se $(A)'$ e $(B)''$ são duas subvariedades imersas integrais sem bordo de $\underline{E}$, $A \cap B$ é aberto em $(A)'$ e em $(B)''$ e as topologias induzidas em $A \cap B$ pelas de $(A)'$ e $(B)''$ coincidem, uma vez que as estruturas diferenciáveis induzidas também coincidem. A existência e unicidade de uma topologia em M nas condições do enunciado é então uma consequência do resultado sobre colagem de topologias VI.3.5. □

Pelo contrário, e salvo casos particulares triviais, não existe em M, munido da topologia fina, uma estrutura diferenciável que induza em cada subvariedade imersa integral sem bordo (A) a respectiva estrutura diferenciável. A razão porque não podemos aplicar o teorema de existência de colagens VI.3.14 está em que a topologia fina não vai ser em geral de base contável (cf. o exercício VI.18 no fim do capítulo). Vere-mos, no entanto, adiante que o que não podemos fazer com (M) podemos fazer com as suas componentes conexas.

VI.5.31 **(Propriedades da topologia fina)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integra-bilidade. Notemos (M) o conjunto M com a topologia fina. Tem-se então:
a) A topologia fina é mais fina que a topologia de M, isto é $Id_M\colon (M) \to M$ é contínua.
b) A topologia de (M) é separada, localmente compacta e localmente cone-xa, em particular as componentes conexas M_j de (M) são abertas em (M).
c) Cada componente conexa (M_j) de (M) é um espaço topológico de base contável. Dizemos que os (M_j) são as *folhas* de (M) (ou de $\underline{E}$).
Dem: O facto de $Id_M\colon (M) \to M$ ser contínua vem de que isso acontece à sua restrição a uma classe de abertos de (M) de união M, nomeadamente a constituída pelas subvariedades imersas integrais sem bordo (A) de $\underline{E}$. Uma vez que M é separado, podemos deduzir que (M) é também separado (todas as vizinhanças de um ponto relativas a M são também vizinhanças desse ponto relativas a (M)). O facto de a topologia de (M) ser localmente compacta e localmente conexa vem de que, para cada $x_0 \in M$, podemos considerar uma subvariedade imersa integral sem bordo (A) de $\underline{E}$ com $x_0 \in A$ e então (A) é uma variedade, e portanto localmente compacta e localmente conexa, e um sistema fundamentalde vizinhanças de x_0 em (A) é também sistema fundamental de vizinhanças de x_0 em (M), por (A) ser um subespaço topológico aberto de (M). O facto de as componentes conexas M_j de (M) serem conjuntos abertos de (M) é uma propriedade geral dos espaços topológicos localmente conexos.
Resta-nos mostrar que, para cada componente conexa M_j de (M), (M_j) tem base contável.
Consideremos uma família $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abertos fatiáveis de M (cf. IV.9.10 e IV.9.11) com união M; para isso basta partir de uma base contável de abertos para M e escolher, para cada aberto da base que esteja contido

nalgum aberto fatiável, um dos abertos fatiáveis que o contém. Sejam V_{n,c_n}, $c_n \in W_n$, as fatias do aberto V_n. Chamemos *fatias escolhidas*, aos conjuntos V_{n,c_n}, com $n \in \mathbb{N}$ e $c_n \in W_n$ que, por serem subvariedades integrais sem bordo, são abertos de (M), com $(V_{n,c_n}) = V_{n,c_n}$. Tendo em conta a alínea a) do lema VI.5.27, dado $m \in \mathbb{N}$, cada V_{m,c_m} intersecta, para cada n, apenas um número contável de fatias V_{n,c_n} e portanto cada V_{m,c_m} intersecta apenas um número contável de fatias escolhidas. Seja $x_0 \in M_j$ um ponto fixado. Construamos recursivamente, para cada $p \in \mathbb{N}$, um conjunto contável $\mathcal{U}_p$ de fatias escolhidas, do seguinte modo: $\mathcal{U}_1$ é o conjunto das fatias escolhidas que contêm x_0 (para cada m, no máximo um dos V_{m,c_m}). $\mathcal{U}_{p+1}$ é o conjunto das fatias escolhidas que intersectam pelo menos uma das fatias escolhidas em $\mathcal{U}_p$, conjunto que contém evidentemente $\mathcal{U}_p$. Uma vez que qualquer conexo de (M) que intersecte a sua componente conexa M_j está contido em M_j verificamos por indução que todas as fatias escolhidas pertencentes a $\mathcal{U}_p$ estão contidas em M_j. Seja $\mathcal{U}$ o conjunto contável união de todos os $\mathcal{U}_p$. Seja U a união de todas as fatias em $\mathcal{U}$, que é assim um aberto de (M) contendo x_0 e contido em M_j, portanto também um aberto de (M_j). Para $y \in M_j$ que não pertença a U, podemos considerar uma fatia escolhida V_{n,c_n} que contenha y, e portanto, como anteriormente, é um aberto de (M) contido em M_j, e portanto um aberto de (M_j); além disso V_{n,c_n} não pode intersectar nenhuma das fatias em $\mathcal{U}$ (senão pertenceria a $\mathcal{U}$) pelo que V_{n,c_n} não intersecta U, o que prova que U é também fechado em (M_j). Uma vez que (M_j) é conexo, concluímos que $U = M_j$. Concluímos finalmente que (M_j) é uma união contável dos abertos V_{m,c_m} em $\mathcal{U}$, os quais, por serem variedades, têm base contável de abertos, pelo que (M_j) tem base contável de abertos (escolhendo uma base contável para cada V_{m,c_m}, a união dessas bases é uma base contável para (M_j)). □

VI.5.32 **(A estrutura de variedade das folhas)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Notemos (M) o conjunto M com a topologia fina e sejam (M_j), com as topologias induzidas, as correspondentes folhas. Tem-se então:

a) Cada (M_j) admite uma única estrutura de subvariedade imersa sem bordo de M (a *estrutura canónica de variedade* das folhas).

b) Cada (M_j) é uma subvariedade imersa integral conexa de $\underline{E}$.

c) Qualquer que seja a subvariedade imersa integral sem bordo (A) de $\underline{E}$, com $A \subset M_j$, A é aberto em (M_j) e a estrutura diferenciável de (A) é a induzida pela de (M_j).

Dem: Consideremos a classe das subvariedades imersas integrais sem bordo (A) de $\underline{E}$, assim como a subclasse constituída pelas que verificam $A \subset M_j$, e lembremos que, tendo em conta VI.5.30, para cada uma daquelas a topologia de (A) é a induzida pela de (M) e A é aberto em (M), e portanto, para cada uma das da subclasse, (A) tem a topologia induzida pela de (M_j) e é aberto em (M_j). O mesmo resultado garante cada cada $x_0 \in M_j$ pertence a alguma subvariedade imersa integral sem bordo (A) de $\underline{E}$, podendo já supor-se que (A) é conexa, substituindo-a eventualmente pela respectiva componente conexa que contém x_0, o que implica, por M_j ser uma componente conexa de (M), que $A \subset M_j$. As subvariedades (A) da subclasse têm dimensão em cada x igual à de E_x, em particular menor ou igual à de E, e são mutuamente compatíveis, por VI.5.29, pelo que o facto de (M_j) ser separado e ter base contável permite-nos, por VI.3.14, considerar em (M_j) uma estrutura de variedade que induz em cada um dos abertos (A) da subclasse a sua estrutura de variedade. Cada (M_j) é então uma subvariedade imersa integral sem bordo de $\underline{E}$, por isso acontecer a cada uma das suas subvariedades abertas (A). A propriedade expressa em c) é automática, por construção, e quanto à unicidade em a) ela é uma consequência do resultado geral em VI.5.8. $\square$

VI.5.33 **(Variedades semi-integrais conexas)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade, e sejam (M_j), onde $j \in J$, as folhas de $\underline{E}$. Tem-se então:

a) Quaisquer que sejam a variedade abstracta conexa $\widehat{M}$ e a aplicação de classe C^p, $p \geq 1$, $f\colon \widehat{M} \to M$ tal que, para cada $z \in \widehat{M}$, $T_z(f) \subset E_{f(z)}$ (cf. VI.5.16), existe $j \in J$ tal que $f(\widehat{M}) \subset M_j$ e $f\colon \widehat{M} \to (M_j)$ é de classe C^p.

b) Em particular, se (A) é uma subvariedade imersa semi-integral conexa de $\underline{E}$ (cf. VI.5.26), existe $j \in J$ tal que $A \subset M_j$ e então (A) é uma subvariedade imersa de (M_j).

Dem: Comecemos por provar a) no caso particular em que a variedade $\widehat{M}$ é uma subvariedade de um espaço vectorial de dimensão finita, caso em que a condição $T_z(f) \subset E_{f(z)}$ se reduz a $Df_z(T_z(\widehat{M})) \subset E_{f(z)}$.

Seja $z_0 \in \widehat{M}$ arbitrário. Sejam V um aberto fatiável de M (cf. IV.9.10), com $f(z_0) \in V$, e seja $\widehat{U}$ a componente conexa do aberto $f^{-1}(V)$ de $\widehat{M}$ que contém z_0, que é assim um aberto conexo de $\widehat{M}$ com $z_0 \in \widehat{U}$ e $f(\widehat{U}) \subset V$. Tendo em conta a definição em IV.9.10, existe uma fatia V_c de V tal que $f(\widehat{U}) \subset V_c$. Uma vez que V_c é uma subvariedade integral sem bordo, sabemos que V_c é aberto em (M) e que, como espaço topológico, $(V_c) = V_c$. Resulta daqui que $f_{/\widehat{U}}\colon \widehat{U} \to (M)$ é contínua. Tendo em conta o facto de a continuidade ser local deduzimos que $f\colon \widehat{M} \to (M)$ também é contínua e portanto $f(\widehat{M})$ é conexo em (M), tendo assim que estar contido numa das suas componentes conexas M_j. Uma vez que (M_j) é uma subvariedade imersa integral sem bordo de $\underline{E}$, resulta de VI.5.28 que $f\colon \widehat{M} \to (M_j)$ é também de classe C^p.

A prova de a) no caso geral reduz-se facilmente ao caso particular que acabámos de examinar: Consideramos uma carta $\varphi\colon \widehat{M} \to B \subset F$ da estrutura diferenciável de $\widehat{M}$, reparamos que B é uma variedade conexa e consideramos a aplicação de classe C^p $f \circ \varphi^{-1}\colon B \to M$ que verifica, para cada $y \in B$,

$$T_y(f \circ \varphi^{-1}) = T_{\varphi^{-1}(y)}(f) \subset E_{f(\varphi^{-1}(y))}$$

pelo que deduzimos a existência de j tal que $f \circ \varphi^{-1}(B) \subset M_j$, portanto $f(\widehat{M}) \subset M_j$, e que $f \circ \varphi^{-1}: B \to (M_j)$ é de classe C^p, portanto

$$f = (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi: \widehat{M} \to (M_j)$$

é de classe C^p.
A conclusão de b) é claramente um caso particular da de a), se tivermos em conta VI.5.9. □

VI.5.34 **(Functorialidade)** Sejam E e $\widehat{E}$ espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ variedades sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ e $\underline{\widehat{E}} = (\widehat{E}_y)_{y \in \widehat{M}}$ fibrados vectoriais com $E_x \subset T_x(M)$ e $\widehat{E}_y \subset T_y(\widehat{M})$, verificando a condição de integrabilidade, e sejam (M_j), onde $j \in J$, e $(\widehat{M}_k)$, onde $k \in K$, as folhas de $\underline{E}$ e de $\underline{\widehat{E}}$. Seja $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação de classe C^p, $p \geq 1$, tal que, para cada $x \in M$, $Df_x(E_x) \subset \widehat{E}_{f(x)}$. Tem-se então:

a) A aplicação $f: (M) \to (\widehat{M})$ é contínua.

b) Para cada $j \in J$, existe $k \in K$ tal que $f(M_j) \subset \widehat{M}_k$ e então $f_{/M_j}: (M_j) \to (\widehat{M}_k)$ é uma aplicação de classe C^p.

Dem: Dado $j \in J$, tem-se, para cada $x \in M_j$, considerando a inclusão $\iota_j: (M_j) \to M$,

$$T_x(f_{/M_j}) = T_x(f \circ \iota_j) = Df_x(T_x(\iota_j)) = Df_x(E_x) \subset \widehat{E}_{f(x)}$$

pelo que, pela alínea a) do resultado precedente, existe $k \in K$ tal que $f(M_j) \subset \widehat{M}_k$ e então $f_{/M_j}: (M_j) \to (\widehat{M}_k)$ é de classe C^p. Em particular cada $f_{/M_j}: (M_j) \to (\widehat{M})$ é contínua, pelo que, uma vez que os (M_j) são abertos de (M) com união M, $f: (M) \to (\widehat{M})$ é contínua. □

VI.5.35 **(As folhas duma subvariedade)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Seja $M' \subset M$ uma subvariedade sem bordo tal que, para cada $x \in M'$, $E_x \subset T_x(M')$. Tem-se então:

a) O fibrado vectorial $\underline{E}_{/M'} = (E_x)_{x \in M'}$ também verifica a condição de integrabilidade.

b) Sendo (M) e (M') os conjuntos M e M', com as topologias finas, tem-se que M' é aberto em (M) e a topologia de (M') é a induzida pela de (M).

c) Para cada folha (M'_j) de (M'), existe uma folha (M_k) de (M) tal que $M'_j \subset M_k$ e então M'_j é aberto em (M_k) e a estrutura diferenciável de (M'_j) é a induzida pela de (M_k).

Dem: O facto de o fibrado vectorial $\underline{E}_{/M'} = (E_x)_{x \in M'}$ também verificar a condição de integrabilidade (cf. IV.9.3) resulta imediatamente de que, quando fixamos um produto interno em E, a segunda forma fundamental de $\underline{E}_{/M'}$ é a restrição da segunda forma fundamental de $\underline{E}$. Sendo (M'_j) uma folha de (M'), com a respectiva subestrutura de subvariedade imersa de M', e portanto de M, (M'_j) é uma subvariedade imersa integral sem bordo de $\underline{E}_{/M'}$, e portanto de $\underline{E}$, e portanto, pela alínea b) de VI.5.33, existe uma folha (M_k) de (M) tal que $M'_j \subset M_k$, resultando então da alínea c) de VI.5.32 que M'_j é aberto em (M_k) e a estrutura diferenciável de (M'_j) é a induzida pela de (M_k). Uma vez que (M_k) é aberto em (M), concluímos assim que cada M'_j é aberto em (M), e portanto também em M', com a topologia induzida pela de (M). Resulta daqui que M', igual à união dos (M'_j) é aberto em (M) e o facto de a topologia induzida em cada M'_j pela topologia de M' induzida pela de (M) coincidir com a induzida pela de (M_k), sendo assim igual à de (M'_j), implica que essa topologia induzida em M' é precisamente a de (M'). □

Antes de exibir a caracterização das folhas associadas a alguns exemplos concretos de fibrados vectoriais, verificando a condição de integrabilidade, recordamos um lema de Topologia Geral, que permite nalguns casos identificar facilmente as componentes conexas de um espaço topológico, e que já terá sido porventura utilizado na resolução de alguns exercícios em capítulos anteriores (cf., por exemplo, as alíneas e) e f) do exercício I.18 e a alínea c) do exercício III.6).

VI.5.36 **(Lema topológico)** Seja X um espaço topológico.

a) Se $A \subset X$ é um subconjunto conexo não vazio, simultaneamente aberto e fechado em X, então A é uma das componentes conexas de X.

b) Em particular, se $(X_j)_{j\in J}$ é uma família de abertos conexos não vazios disjuntos dois a dois e com união X, as componentes conexas de X são precisamente os conjuntos X_j.

Dem: a) Lembremos que as compoentes conexas de X são as classes de equivalência para a relação $x \sim y$ se, e só se existe um conexo C de X que contém x e y. É evidente que, se $x, y \in A$, tem-se $x \sim y$. Resta-nos mostrar que, se $x \in A$, $y \in X$ e $x \sim y$, então $y \in A$. Ora, existe então um conexo C de X contendo x e y e vemos que $C \cap A$ é simultaneamente aberto e fechado em C e contém x, pelo que $C \cap A = C$, em particular $y \in A$.

b) Nas condições de b), cada X_j é também fechado, por o seu complementar ser a união dos restantes X_k, pelo que o que vimos em a) implica que cada X_j é uma componente conexa. Não podem existir componentes conexas além dos X_j, uma vez que a união destes já é X. □

VI.5.37 **(Exemplos atípicos) a)** Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo e notemos, para cada $x \in M$, $E_x = \{0\} \subset T_x(M)$. Então $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ é trivialmente um fibrado vectorial verificando a condição de integrabilidade. Qualquer subconjunto unitário $\{x\}$ de M é então uma subvariedade integral sem bordo de $\underline{E}$ e portanto, para a topologia fina de (M), estes conjuntos unitários vão ser abertos, o que implica que a topologia de (M) é a topologia discreta. As folhas, que são as componentes conexas de (M), são assim os conjuntos unitários.

b) Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo e notemos, para cada $x \in M$, $E_x = T_x(M)$. Então $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ é trivialmente um fibrado vectorial verificando a condição de integrabilidade. A própria variedade M é uma variedade integral de $\underline{E}$ pelo que, por definição da topologia fina de (M), esta induz em M a topologia original, ou seja $(M) = M$. As folhas são assim, neste caso, as componentes conexas de M, e são abertos de M, com a topologia induzida pela de M, e as respectivas estruturas de variedade são as induzidas pela de M.

c) Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Seja V um aberto fatiável de M, com as correspondentes fatias V_c, $c \in W$ (cf. IV.9.10). Considerando então V como variedade, com o correspondente fibrado vectorial $\underline{E}_{/V}$, as folhas de (V), com a topologia fina, são precisamente as fatias V_c, com as topologias e estruturas de variedade induzidas pela de M (em particular, o que não é típico, são mesmo subvariedades integrais).

Dem: Por definição, as fatias V_c são subvariedades integrais conexas sem bordo e a topologia fina (V), de V é tal que cada V_c é aberto em (V) e induz em cada V_c a topologia induzida pela de M. O facto de os V_c serem as componentes conexas de V é assim consequência do lema topológico precedente. □

VI.5.38 **(Exemplos mais típicos — folhas sobre o toro)**

a) Nestes exemplos vamos considerar sobre o espaço vectorial complexo $\mathbb{C}$ o seu produto interno complexo usual, definido por $\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = z \times \overline{w}$, assim como o produto interno real associado $\langle z, w\rangle_{\mathbb{R}} = \Re(z \times \overline{w})$, que não é mais do que o produto interno canónico de $\mathbb{R}^2$ (se $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se $z \times \overline{w} = (ac + bd) + (-ad + bc)i$). Lembrando que o produto interno complexo e o produto interno real associado têm a mesma norma associada, notamos

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\},$$

que sabemos ser uma variedade compacta, sem bordo, de dimensão 1, tendo como espaço vectorial tangente $T_z(S)$ o conjunto dos $u \in \mathbb{C}$ tais que $\langle u, z\rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Uma vez que $\langle iz, z\rangle_{\mathbb{R}} = \Re(i\|z\|^2) = 0$, constatamos que, para cada $z \in S$, $T_z(S)$ admite iz como base ortonormada.

b) A variedade com que vamos trabalhar vai ser a variedade compacta sem bordo com dimensão 2,

$$M = S \times S \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

a que se costuma dar o nome de *toro*.

Embora esta variedade esteja contida em $\mathbb{C}\times\mathbb{C}=\mathbb{R}^4$, ela é difeomorfa a uma subvariedade bem conhecida de $\mathbb{R}^3$, que se obtém rodando em torno do eixo das cotas uma circunferência do plano de abcissa igual a 0, de centro em $(1,0)$ e raio $\frac{1}{2}$. Esse difeomorfismo, que será explicado com mais detalhe no exercício VI.21, no fim do capítulo, associa a cada par $(z,w)\in S\times S$ um ponto de $\mathbb{R}^3$ em que w identifica o ponto da circunferência que roda e z a rotação que esta sofreu. Este difeomorfismo não é necessário para o estudo que será feito em seguida e servirá apenas para podermos desenhar figuras que apoiem a nossa intuição.

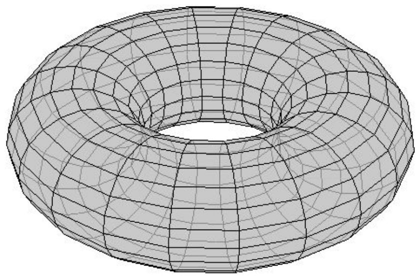

Figura 22

c) Para cada $(z,w)\in M$, tem-se $T_{(z,w)}(M)=T_z(S)\times T_w(S)$. Fixemos um número real $a>0$ e notemos, para cada $(z,w)\in S$,

$$W_{(z,w)}=(iz,aiw)\in T_{(z,w)}(M),$$

que é um vector não nulo, e portanto gera um subespaço vectorial de dimensão 1 $E_{(z,w)}\subset T_{(z,w)}(M)$.[125] Tem-se então que $\underline{E}=(E_{(z,w)})_{(z,w)\in S}$ é um fibrado vectorial trivial de dimensão 1, que verifica automaticamente a condição de integrabilidade (cf. IV.9.4). O nosso objectivo é determinar as folhas de $\underline{E}$. Verificaremos em particular, que vamos obter exemplos essencialmente distintos, conforme o número real fixado a seja racional ou irracional.

d) Para cada $(z_0,w_0)\in M$, seja $f_{(z_0,w_0)}\colon\mathbb{R}\to M$ a aplicação suave definida por

$$f_{(z_0,w_0)}(t)=(z_0e^{2\pi it},w_0e^{2\pi iat}),$$

para a qual se tem $f_{(z_0,w_0)}(0)=(z_0,w_0)$ e

$$f'_{(z_0,w_0)}(t)=(2\pi iz_0e^{2\pi it},2\pi iaw_0e^{2\pi iat})=2\pi W_{f_{(z_0,w_0)}(t)}\in E_{f_{(z_0,w_0)}(t)}.$$

[125] Supomos $a>0$ apenas para fixar ideias. Os casos $a=0$ e $a<0$ admitem um tratamento análogo.

Em particular, vemos que $f_{(z_0,w_0)}\colon \mathbb{R} \to M$ é uma imersão e, notando $M_{(z_0,w_0)}$ a folha que contém (z_0, w_0), resulta de VI.5.33 que $f_{(z_0,w_0)}(\mathbb{R}) \subset M_{(z_0,w_0)}$ e que $f_{(z_0,w_0)}\colon \mathbb{R} \to (M_{(z_0,w_0)})$ ainda é suave, e portanto uma imersão. Uma vez que $\mathbb{R}$ e $(M_{(z_0,w_0)})$ são variedades sem bordo com dimensão 1, segue-se que a imersão $f_{(z_0,w_0)}\colon \mathbb{R} \to (M_{(z_0,w_0)})$ é também uma submersão, e portanto uma aplicação aberta. Em particular, $f_{(z_0,w_0)}(\mathbb{R})$ é aberto e conexo em $(M_{(z_0,w_0)})$, e portanto também em (M).
e) Reparemos agora que, dados (z_0, w_0) e (z_1, w_1) em M e $t, s \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} f_{(z_0,w_0)}(t) = f_{(z_1,w_1)}(s) &\Leftrightarrow (z_0e^{2\pi it}, w_0e^{2\pi iat}) = (z_1e^{2\pi is}, w_1e^{2\pi ias}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z_1, w_1) = (z_0e^{2\pi i(t-s)}, w_0e^{2\pi ia(t-s)}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z_1, w_1) = f_{(z_0,w_0)}(t-s). \end{aligned}$$

f) O que vimos em e) implica que, se $f_{(z_0,w_0)}(\mathbb{R}) \cap f_{(z_1,w_1)}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, então $f_{(z_0,w_0)}(\mathbb{R}) = f_{(z_1,w_1)}(\mathbb{R})$ e daqui deduzimos que $f_{(z_0,w_0)}(\mathbb{R})$, que já sabíamos ser aberto em (M), é também fechado em (M), por o seu complementar ser união de conjuntos do mesmo tipo. Tendo em conta o lema topológico VI.5.36, vemos que $f_{(z_0,w_0)}(\mathbb{R})$ é uma das componentes conexas de (M), ou seja, $f_{(z_0,w_0)}(\mathbb{R})$ coincide com a folha $M_{(z_0,w_0)}$.
g) Tem-se

$$\begin{aligned} f_{(z_0,w_0)}(t) = (z_0, w_0) &\Leftrightarrow (z_0e^{2\pi it}, w_0e^{2\pi iat}) = (z_0, w_0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{2\pi it} = e^{2\pi iat} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t \in \mathbb{Z} \wedge at \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e portanto, pelo que vimos em e),

$$f_{(z_0,w_0)}(t) = f_{(z_0,w_0)}(s) \Leftrightarrow t - s \in \mathbb{Z} \wedge a(t-s) \in \mathbb{Z}.$$

h) Vamos agora verificar o que sucede no caso em que a é racional, caso em que podemos escrever $a = \frac{m}{n}$, com m e n números naturais primos entre si. A condição $t - s \in \mathbb{Z} \wedge \frac{m}{n}(t-s) \in \mathbb{Z}$ é então equivalente a $t - s \in n\mathbb{Z}$, pelo que

$$f_{(z_0,w_0)}(t) = f_{(z_0,w_0)}(s) \Leftrightarrow t - s \in n\mathbb{Z}$$

de onde deduzimos que $M_{(z_0,w_0)} = f_{(z_0,w_0)}(\mathbb{R}) = f_{(z_0,w_0)}([0, n])$ e a restrição de $f_{(z_0,w_0)}$ é uma bijecção de $[0, n[$ sobre a folha $M_{(z_0,w_0)}$. Em particular $(M_{(z_0,w_0)})$ é compacto, o que, tendo em conta VI.5.6, implica que $(M_{(z_0,w_0)}) = M_{(z_0,w_0)}$ e que $M_{(z_0,w_0)}$ é mesmo uma subvariedade. De facto (ver o exercício VI.22 no fim do capítulo), verifica-se facilmente que $M_{(z_0,w_0)}$ é uma variedade difeomorfa à circunferência S.
Nas figuras 23, 24 e 25 estão ilustrados os casos $a = 11$, $a = \frac{11}{2}$ e $a = \frac{11}{3}$.

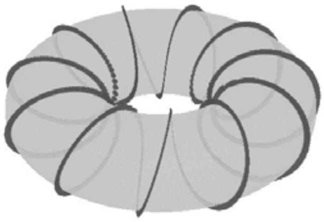

Figura 23

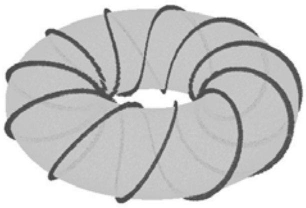

Figura 24

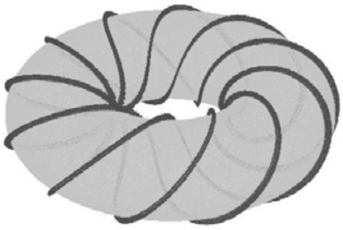

Figura 25

i) Verifiquemos, enfim, o que sucede no caso em que a é irracional. Como referimos em g), tem-se $f_{(z_0,w_0)}(t) = f_{(z_0,w_0)}(s)$ se, e só se $t-s \in \mathbb{Z} \wedge a(t-s) \in \mathbb{Z}$, condição que só é possível quando $s=t$. Podemos assim concluir que $f_{(z_0,w_0)}\colon \mathbb{R} \to (M_{(z_0,w_0)})$ é bijectiva e portanto, uma vez que se trata de uma submersão entre variedades sem bordo, é um difeomorfismo (a suavidade da inversa resulta de VI.2.29).

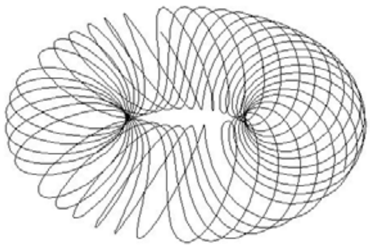

Figura 26

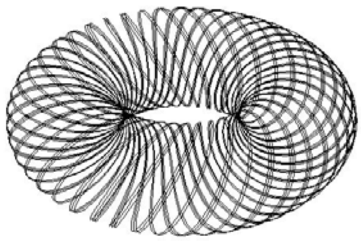

Figura 27

Ilustramos, na figura 26, parte duma das folhas, no caso em que $a = 2\pi$, e, nas figuras 27 e 28, partes sucessivamente maiores da mesma folha; em cada caso omitimos, para uma maior clareza, a imagem do próprio toro.

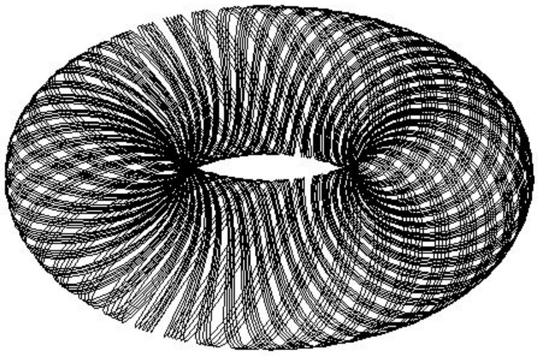

Figura 28

Pode mostrar-se que, como as figuras sugerem, as folhas $M_{(z_0,w_0)}$, no caso em que a é irracional, são densas em M (apesar de, como sempre acontece, elas serem fechadas em (M)). Ver, nesse sentido, o exercício VI.23 no fim do capítulo. Em particular, as folhas $M_{(z_0,w_0)}$, no caso em que a é irracional, não são subvariedades de M, são apenas subvariedades imersas (lembrar II.6.22 e VI.5.14).

§6. Espaço vectorial tangente.

Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x \in A$. Pretendemos definir uma noção de espaço vectorial tangente a A no ponto x, que generalize a noção conhecida de espaço vectorial tangente a um subconjunto de um espaço vectorial de dimensão finita num dos seus pontos. Há mais que um processo de atingir esse objectivo e diferentes autores apresentam diferentes definições, conforme os seus gostos ou as aplicações que têm em vista. As diferentes noções "legítimas" de espaço vectorial tangente são naturalmente "equivalentes" e, mais do que tomar partido por uma das definições possíveis, o que vamos fazer é explicar o que é uma "noção legítima" de espaço vectorial tangente e verificar que, em cada situação, existem sempre definições legítimas para esta noção; deixamos assim ao utilizador a capacidade para, em cada caso particular, utilizar a noção de espaço vectorial tangente que lhe pareça mais cómoda.

VI.6.1 Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x \in A$. Se T é um espaço vectorial de dimensão finita, vamos chamar *apresentação de T como espaço vectorial tangente a A no ponto x* a um par (φ, λ), em que $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta da estrutura diferenciável e $\lambda: T \to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo.

Dadas duas apresentações de T como espaço vectorial tangente a A no ponto x, (φ,λ) e (ψ,μ), onde $\varphi\colon A \to B \subset E$ e $\psi\colon A \to C \subset F$, vamos dizer que elas são *equivalentes*, e escrever $(\varphi,\lambda) \sim (\psi,\mu)$, se, considerando o difeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1}\colon B \to C$, o isomorfismo

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}\colon T_{\varphi(x)}(B) \to T_{\psi(x)}(C)$$

verificar a propriedade $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda = \mu$.
Esta propriedade costuma ser sugerida graficamente pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "Id_T"] \arrow[d, "\lambda"'] & T \arrow[d, "\mu"] \\
T_{\varphi(x)}(B) \arrow[r, "D(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}"'] & T_{\psi(x)}(C)
\end{tikzcd}$$

(costuma-se dizer que este é um *diagrama comutativo*, uma vez que as duas aplicações compostas sugeridas por ele são iguais).

VI.6.2 Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x \in A$. Tem-se então:

a) Existe sempre um espaço vectorial T, de dimensão finita, admitindo uma apresentação como espaço vectorial tangente a A no ponto x.

b) Se T é um espaço vectorial de dimensão finita nas condições de a), então a relação $\sim$, na classe das apresentações de T como espaço vectorial tangente a A no ponto x, é uma relação de equivalência.

c) Se (φ,λ) é uma apresentação de T como espaço vectorial tangente a A no ponto x, onde $\varphi\colon A \to B \subset E$ é uma carta de A e $\lambda\colon T \to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo, então, qualquer que seja a carta $\psi\colon A \to C \subset F$ de A, existe um, e um só, isomorfismo $\mu\colon T \to T_{\psi(x)}(C)$ tal que $(\varphi,\lambda) \sim (\psi,\mu)$.

Dem: A alínea a) resulta de que, se considerarmos uma carta $\varphi\colon A \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de A, então o espaço vectorial de dimensão finita $T = T_{\varphi(x)}(B)$ admite uma apresentação como espaço vectorial tangente a A no ponto x, nomeadamente o par (φ, Id_T). A alínea c) é uma consequência trivial da definição. Resta-nos então verificar que a relação $\sim$ é de equivalência. A reflexividade resulta trivialmente da definição. Suponhamos que se tem $(\varphi,\lambda) \sim (\psi,\mu)$ e $(\psi,\mu) \sim (\rho,\nu)$, onde $\varphi\colon A \to B \subset E$, $\psi\colon A \to C \subset F$, $\rho\colon A \to D \subset G$, $\lambda\colon T \to T_{\varphi(x)}(B)$, $\mu\colon T \to T_{\psi(x)}(C)$ e $\nu\colon T \to T_{\rho(x)}(D)$. Podemos então escrever

$$\begin{aligned}
D(\rho \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda &= D(\rho \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda = \\
&= D(\rho \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} \circ D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda = \\
&= D(\rho \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} \circ \mu = \nu,
\end{aligned}$$

o que mostra que $(\varphi,\lambda) \sim (\rho,\nu)$. Por fim, a simetria, embora pudesse ter uma demonstração directa simples, pode ser deduzida do que já foi provado: Se $(\varphi,\lambda) \sim (\psi,\mu)$, sabemos que existe λ' tal que $(\psi,\mu) \sim (\varphi,\lambda')$ e então, pela transitividade, $(\varphi,\lambda)\sim(\varphi,\lambda')$, donde, pela reflexividade e pela parte de unicidade de c), $\lambda=\lambda'$, isto é, $(\psi,\mu)\sim(\varphi,\lambda)$. □

VI.6.3 Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x\in A$. Se T é um espaço vectorial de dimensão finita admitindo uma apresentação como espaço vectorial tangente a A no ponto x, chamaremos *estrutura de espaço vectorial tangente a A no ponto x sobre T* a uma classe de equivalência de apresentações de T como espaço vectorial tangente, para a relação de equivalência $\sim$ definida anteriormente.
Usaremos com frequência a notação $T_x(A)$ para designar um espaço vectorial de dimensão finita, munido de uma estrutura de espaço vectorial tangente a A no ponto x, e dizemos então que $T_x(A)$ é um *espaço vectorial tangente* a A no ponto x.[126]

VI.6.4 Repare-se que o resultado precedente garante-nos que, para cada conjunto A, munido de uma estrutura diferenciável, e para cada ponto $x\in A$, pode sempre considerar-se pelo menos um espaço vectorial tangente $T_x(A)$. Em geral haverá muitas escolhas possíveis para um tal espaço vectorial tangente[127], e não haverá nenhuma razão para preferir uma às outras. O que por vezes será cómodo, como veremos, é condicionar certas escolhas de espaço vectorial tangente a outras escolhas feitas anteriormente no mesmo contexto.

VI.6.5 Um caso particular em que há uma escolha de espaço vectorial tangente que apresenta claramente vantagens é aquele em que temos um espaço vectorial de dimensão finita E e um subconjunto arbitrário $A\subset E$, sobre o qual se considera a estrutura diferenciável canónica. Nesse caso, e como era de esperar, consideraremos como espaço vectorial tangente a A num ponto x o próprio espaço vectorial tangente $T_x(A)$, no sentido já conhecido, estando implícito que a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$ é a determinada pela apresentação $(Id_A, Id_{T_x(A)})$, correspondente à carta $Id_A\colon A\to A\subset E$ e ao isomorfismo $Id_{T_x(A)}\colon T_x(A)\to T_x(A)$. Esta escolha é a que estará implícita, salvo aviso em contrário, sempre que escrevermos $T_x(A)$ quando A é um subconjunto de um espaço vectorial de dimensão finita.

VI.6.6 Sejam A e $\widehat{A}$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, $f\colon A\to\widehat{A}$ uma aplicação suave, $x\in A$ e $T_x(A)$ e $T_{f(x)}(\widehat{A})$ espaços vectoriais tangentes a A em x e a $\widehat{A}$ em $f(x)$. Podemos então considerar apresentações (φ,λ), definindo a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, e $(\widehat{\varphi},\widehat{\lambda})$, definindo a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_{f(x)}(\widehat{A})$, onde

[126]Sublinhamos, mais uma vez, que tanto a designação "espaço vectorial tangente a A em x" como a notação $T_x(A)$ referem-se não só ao espaço vectorial em questão mas também à estrutura de espaço vectorial tangente que se está a considerar.
[127]Verificaremos em breve que duas escolhas de espaço vectorial tangente a A em x são sempre isomorfas.

$\varphi: A \to B \subset E$ e $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{E}$, e, dadas apresentações nestas condições, existe uma, e uma só, aplicação linear

$$Df_x: T_x(A) \to T_{f(x)}(\widehat{A})$$

tal que

$$\widehat{\lambda} \circ Df_x = D(\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda: T_x(A) \to T_{\widehat{\varphi}(f(x))}(\widehat{B}),$$

igualdade que também costuma ser expressa graficamente pela afirmação de que deve ser comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x(A) & \xrightarrow{Df_x} & T_{f(x)}(\widehat{A}) \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \widehat{\lambda} \\ T_{\varphi(x)}(B) & \xrightarrow[D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}]{} & T_{\widehat{\varphi}(f(x))}(\widehat{B}). \end{array}$$

Para além disso a aplicação linear $Df_x: T_x(A) \to T_{f(x)}(\widehat{A})$ não depende da escolha das apresentações (φ, λ) e $(\widehat{\varphi}, \widehat{\lambda})$ nas condições acima.[128]

Dem: Em primeiro lugar, a definição de aplicação suave garante a existência de cartas $\varphi: A \to B \subset E$, de A, e $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{E}$, de $\widehat{A}$, tais que $\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}$ seja suave e sabemos então que existem isomorfismos $\lambda: T_x(A) \to T_{\varphi(x)}(B)$ e $\widehat{\lambda}: T_{f(x)}(\widehat{A}) \to T_{\widehat{\varphi}(f(x))}(\widehat{B})$ tais que as apresentações (φ, λ) e $(\widehat{\varphi}, \widehat{\lambda})$ definam as estruturas de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$ e de $T_{f(x)}(\widehat{A})$. A existência e unicidade de uma aplicação linear $Df_x: T_x(A) \to T_{f(x)}(\widehat{A})$, verificando a igualdade

$$\widehat{\lambda} \circ Df_x = D(\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda$$

vem de que, tendo em conta o facto de $\widehat{\lambda}$ ser um isomorfismo, esta última é trivialmente equivalente a

$$Df_x = \widehat{\lambda}^{-1} \circ D(\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda.$$

Tudo o que temos agora que mostrar é que, dadas outras apresentações (ψ, μ) e $(\widehat{\psi}, \widehat{\mu})$ que também definam as estruturas de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$ e de $T_{f(x)}(\widehat{A})$, com as cartas $\psi: A \to C \subset F$ e $\widehat{\psi}: \widehat{A} \to \widehat{C} \subset \widehat{F}$, tem-se também

$$\widehat{\mu} \circ Df_x = D(\widehat{\psi} \circ f \circ \psi^{-1})_{\widehat{\varphi}(x)} \circ \mu.$$

Ora, podemos escrever

[128]Se isso não acontecesse, não faria muito sentido utilizar a notação Df_x.

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}\circ Df_x &= D(\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x))}\circ\widehat{\lambda}\circ Df_x =\\ &= D(\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x))}\circ D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}\circ\lambda =\\ &= D(\widehat{\psi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}\circ D(\varphi\circ\psi^{-1})_{\psi(x)}\circ\mu =\\ &= D(\widehat{\psi}\circ f\circ\psi^{-1})_{\psi(x)}\circ\mu,\end{aligned}$$

como queríamos. Note-se que a dedução anterior pode ser seguida no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} T_x(A) & \xrightarrow{Id} & T_x(A) & \xrightarrow{Df_x} & T_{f(x)}(\widehat{A}) & \xrightarrow{Id} & T_{f(x)}(\widehat{A})\\ \downarrow\mu & & \downarrow\lambda & & \downarrow\widehat{\lambda} & & \downarrow\widehat{\mu}\\ T_{\psi(x)}(C) & \xrightarrow[D(\varphi\circ\psi^{-1})_{\psi(x)}]{} & T_{\varphi(x)}(B) & \xrightarrow[D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}]{} & T_{\widehat{\varphi}(f(x))}(\widehat{B}) & \xrightarrow[D(\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x))}]{} & T_{\widehat{\psi}(f(x))}(\widehat{C})\,.\end{array}$$

□

VI.6.7 Nas condições anteriores, a aplicação linear $Df_x\colon T_x(A)\to T_{f(x)}(\widehat{A})$ toma o nome de *derivada* da aplicação suave f no ponto x (relativamente à escolha dos espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$ e $T_{f(x)}(\widehat{A})$). Por exemplo, se $f\colon A\to\widehat{A}$ é uma aplicação constante, é trivial que $Df_x=0$.

A definição anterior poderia *a priori* levar a confusão no caso em que A e $\widehat{A}$ fossem subconjuntos de espaços vectoriais de dimensão finita E e $\widehat{E}$, com as correspondentes estruturas diferenciáveis, visto que, para uma aplicação suave $f\colon A\to\widehat{A}$, a derivada $Df_x\colon T_x(A)\to T_{f(x)}(\widehat{A})$ poderia ser tomada em duas acepções diferentes, a derivada no sentido definido no capítulo II e a derivada no sentido da definição anterior (a mesma questão ao nível dos espaços vectoriais tangentes já foi examinada atrás). De facto, não há lugar para confusão, tendo em conta o resultado seguinte:

VI.6.8 Sejam $A\subset E$ e $\widehat{A}\subset\widehat{E}$ dois subconjuntos, nos quais se consideram as estruturas diferenciáveis canónicas, e sejam $f\colon A\to\widehat{A}$ uma aplicação suave e $x\in A$. Considerando então como espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$ e $T_{f(x)}(\widehat{A})$ os usuais (lembrar o que se disse em VI.6.5), a aplicação linear derivada $Df_x\colon T_x(A)\to T_{f(x)}(\widehat{A})$, no sentido já conhecido anteriormente, coincide com a aplicação linear derivada, no sentido que estamos a definir.

Dem: Basta atender a que, considerando as cartas $Id_A\colon A\to A\subset E$ e $Id_{\widehat{A}}\colon\widehat{A}\to\widehat{A}\subset\widehat{E}$, de A e $\widehat{A}$, respectivamente, assim como as correspondentes apresentações $(Id_A, Id_{T_x(A)})$ e $(Id_{\widehat{A}}, Id_{T_{f(x)}(\widehat{A})})$, que definem as estruturas de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$ e de $T_{f(x)}(\widehat{A})$, tem-se

$$Id_{T_{f(x)}(\widehat{A})}\circ Df_x = Df_x\circ Id_{T_x(A)}.$$ □

VI.6.9 Sejam A, $\widehat{A}$ e $\tilde{A}$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $f: A \to \widehat{A}$ e $g: \widehat{A} \to \tilde{A}$ duas aplicações suaves. Seja $x \in A$ e escolhamos espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$, $T_{f(x)}(\widehat{A})$ e $T_{g(f(x))}(\tilde{A})$. Tem-se então, para as correspondentes aplicações lineares derivadas,

$$D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x: T_x(A) \to T_{g(f(x))}(\tilde{A}).$$

Dem: Consideremos as apresentações (φ, λ), $(\widehat{\varphi}, \widehat{\lambda})$ e $(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$, definindo as estruturas de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, de $T_{f(x)}(\widehat{A})$ e de $T_{g(f(x))}(\tilde{A})$, onde $\varphi: A \to B \subset E$, $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B} \subset \widehat{E}$ e $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \to \tilde{B} \subset \tilde{E}$. Podemos então escrever

$$\begin{array}{ccccc}
T_x(A) & \xrightarrow{Df_x} & T_{f(x)}(\widehat{A}) & \xrightarrow{Dg_{f(x)}} & T_{g(f(x))}(\tilde{A}) \\
\downarrow \lambda & & \downarrow \widehat{\lambda} & & \downarrow \tilde{\lambda} \\
T_{\varphi(x)}(B) & \xrightarrow[D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}]{} & T_{\widehat{\varphi}(f(x))}(\widehat{B}) & \xrightarrow[D(\tilde{\varphi}\circ g\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x))}]{} & T_{\tilde{\varphi}(g(f(x)))}(\tilde{B})
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\lambda} \circ (Dg_{f(x)} \circ Df_x) = D(\tilde{\varphi} \circ g \circ \widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x))} \circ \widehat{\lambda} \circ Df_x = \\
&= D(\tilde{\varphi} \circ g \circ \widehat{\varphi}^{-1})_{\widehat{\varphi}(f(x))} \circ D(\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda = \\
&= D(\tilde{\varphi} \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda,
\end{aligned}$$

o que implica que se tem realmente $Dg_{f(x)} \circ Df_x = D(g \circ f)_x$. □

VI.6.10 Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x \in A$ e consideremos um espaço vectorial tangente $T_x(A)$ a A no ponto x. Considerando então a aplicação suave $Id_A: A \to A$, tem-se

$$D(Id_A)_x = Id_{T_x(A)}.$$

Dem: Basta atender a que, se (φ, λ) define a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, onde $\varphi: A \to B \subset E$, tem-se

$$\lambda \circ Id_{T_x(A)} = Id_{T_{\varphi(x)}(B)} \circ \lambda = D(\varphi \circ Id_A \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda.$$ □

VI.6.11 **(Corolário)** Sejam A e $\widehat{A}$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $f: A \to \widehat{A}$ um difeomorfismo. Seja $x \in A$ e escolhamos espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$ e $T_{f(x)}(\widehat{A})$. Tem-se então que a aplicação linear

$$Df_x: T_x(A) \to T_{f(x)}(\widehat{A})$$

é um isomorfismo tendo por isomorfismo inverso

$$D(f^{-1})_{f(x)}: T_{f(x)}(\widehat{A}) \to T_x(A).$$

Dem: Trata-se de uma consequência dos dois resultados precedentes, visto que, por ser

$$f^{-1}\circ f = Id_A, \quad f\circ f^{-1} = Id_{\widehat{A}},$$

vem

$$\begin{aligned} Id_{T_x(A)} &= D(Id_A)_x = D(f^{-1})_{f(x)}\circ Df_x\\ Id_{T_{f(x)}(\widehat{A})} &= D(Id_{\widehat{A}})_{f(x)} = Df_x\circ D(f^{-1})_{f(x)}. \end{aligned}$$ □

VI.6.12 **(Corolário)** Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, $x\in A$ e $T_x(A)$ e $\widehat{T}_x(A)$ duas escolhas de espaços vectoriais tangentes a A em x. Existe então um *isomorfismo canónico* entre aquelas duas escolhas $\theta\colon T_x(A)\to \widehat{T}_x(A)$, nomeadamente a derivada do difeomorfismo $Id_A\colon A\to A$, quando no domínio se considera a primeira escolha de espaço vectorial tangente e no espaço de chegada a segunda escolha.[129]

VI.6.13 Sejam A e $\widehat{A}$ espaços topológicos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $f\colon A\to \widehat{A}$ um difeomorfismo. Seja $x\in A$, escolhamos um espaço vectorial tangente $T_x(A)$ e sejam $T_{f(x)}(\widehat{A})$ um espaço vectorial e $\xi\colon T_x(A)\to T_{f(x)}(\widehat{A})$ um isomorfismo. Existe então sobre $T_{f(x)}(\widehat{A})$ uma, e uma só, estrutura de espaço vectorial tangente a $\widehat{A}$ no ponto $f(x)$, relativamente à qual $\xi = Df_x$ (comparar com VI.6.11).

Dem: Seja (φ,λ) definindo a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, em que $\varphi\colon A\to B\subset E$ é uma carta da estrutura diferenciável de A e $\lambda\colon T_x(A)\to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo. Tem-se então que $\widehat{\varphi} = \varphi\circ f^{-1}\colon \widehat{A}\to B\subset E$ é um difeomorfismo, e portanto uma carta da estrutura diferenciável de $\widehat{A}$. Podemos também considerar o isomorfismo $\widehat{\lambda}\colon T_{f(x)}(\widehat{A})\to T_{\varphi(x)}(B)$ definido por $\widehat{\lambda} = \lambda\circ\xi^{-1}$ e então o par $(\widehat{\varphi},\widehat{\lambda})$ vai ser uma apresentação de $T_{f(x)}(\widehat{A})$ como espaço vectorial tangente a $\widehat{A}$ em $f(x)$, cuja classe de equivalência vai ser uma estrutura de espaço vectorial tangente de $T_{f(x)}(\widehat{A})$. Vemos agora que, por ser $\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1} = Id_B$, e portanto $D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)} = Id_{T_{\varphi(x)}(B)}$, vem comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x(A) & \xrightarrow{\quad\xi\quad} & T_{f(x)}(\widehat{A}) \\ \lambda\downarrow & & \downarrow\widehat{\lambda} \\ T_{\varphi(x)}(B) & \xrightarrow[D(\widehat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}]{} & T_{\widehat{\varphi}(f(x))}(\widehat{B}) = T_{\varphi(x)}(B) \end{array},$$

o que mostra que $\xi = Df_x$.

Quanto à unicidade, a existir uma estrutura de espaço vectorial tangente de

---

[129]Quando em VI.6.10 se disse que a derivada em x de $Id_A\colon A\to A$ é a aplicação identidade de $T_x(A)$, estava implícito que se considerava o mesmo espaço vectorial tangente no domínio e no espaço de chegada.

$T_{f(x)}(\widehat{A})$, relativamente à qual $\xi = Df_x$, sabemos que existe um isomorfismo $\tilde{\lambda}: T_{f(x)}(\widehat{A}) \to T_{\varphi(x)}(B)$ tal que a apresentação $(\varphi, \tilde{\lambda})$ defina a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_{f(x)}(\widehat{A})$ e então tem-se

$$\tilde{\lambda} \circ \xi = D(\widehat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \lambda = Id_{T_{\varphi(x)}(B)} \circ \lambda = \lambda,$$

donde $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \xi^{-1} = \widehat{\lambda}$. □

VI.6.14 **(Corolário)** Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, $x \in A$ e $T_x(A)$ uma escolha de um espaço vectorial tangente a A em x. Sejam $\widehat{T}_x(A)$ um espaço vectorial de dimensão finita e $\theta: T_x(A) \to \widehat{T}_x(A)$ um isomorfismo. Existe então uma, e uma só, estrutura de espaço vectorial tangente de $\widehat{T}_x(A)$, tal que θ seja o correspondente isomorfismo canónico.[130]
Dem: Basta aplicar o resultado anterior ao difeomorfismo $Id_A: A \to A$. □

Enquanto o corolário VI.6.12 garante que duas escolhas de um espaço vectorial tangente a A em x são sempre isomorfas, o que acabamos de enunciar garante que todo o espaço vectorial isomorfo a um espaço vectorial tangente pode também ser considerado como espaço vectorial tangente. Estes dois resultados costumam ser lembrados dizendo que os espaços tangentes estão definidos “a menos de isomorfismo”.

VI.6.15 Sejam A e $\widehat{A}$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $f: A \to \widehat{A}$ uma aplicação suave. Suponhamos que se fizeram duas escolhas $T_x(A)$ e $\widehat{T}_x(A)$ de espaços vectoriais tangentes a A em x e duas escolhas $T_{f(x)}(\widehat{A})$ e $\widehat{T}_{f(x)}(\widehat{A})$ de espaços vectoriais tangentes a $\widehat{A}$ em $f(x)$. Tem-se então, notando $Df_x: T_x(A) \to T_{f(x)}(\widehat{A})$ e $\widehat{D}f_x: \widehat{T}_x(A) \to \widehat{T}_{f(x)}(\widehat{A})$ as derivadas de f em x, correspondentes às primeiras e às segundas escolhas, e $\theta: T_x(A) \to \widehat{T}_x(A)$ e $\widehat{\theta}: T_{f(x)}(\widehat{A}) \to \widehat{T}_{f(x)}(\widehat{A})$ os correspondentes isomorfismos canónicos,

$$\widehat{\theta} \circ Df_x = \widehat{D}f_x \circ \theta,$$

por outras palavras, é comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x(A) & \xrightarrow{Df_x} & T_{f(x)}(\widehat{A}) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \widehat{\theta} \\ \widehat{T}_x(A) & \xrightarrow[\widehat{D}f_x]{} & \widehat{T}_{f(x)}(\widehat{A}) \end{array} .$$

[130] Enquanto um corolário precedente garante que duas escolhas de um espaço vectorial tangente a A em x são sempre isomorfas, este garante que todo o espaço vectorial isomorfo a um espaço vectorial tangente pode também ser considerado como espaço vectorial tangente.

Dem: Trata-se de uma consequência VI.6.9, visto que se tem

$$Id_{\widehat{A}} \circ f = f = f \circ Id_A$$

e portanto tanto $\widehat{\theta} \circ Df_x$ como $\widehat{D}f_x \circ \theta$ são iguais à derivada de f em x, quando no domínio se considera a escolha $T_x(A)$ e no espaço de chegada a escolha $\widehat{T}_{f(x)}(\widehat{A})$. □

VI.6.16 Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, $x \in A$ e $T_x(A)$ uma escolha de um espaço vectorial tangente a A em x. Seja $\widehat{A} \subset A$ um subconjunto, com $x \in \widehat{A}$, sobre o qual consideramos a estrutura diferenciável induzida. Podemos então escolher, de maneira única, um subespaço vectorial $T_x(\widehat{A}) \subset T_x(A)$ e uma estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(\widehat{A})$, de modo que a derivada em x da inclusão $\iota: \widehat{A} \to A$ seja a inclusão $\iota': T_x(\widehat{A}) \to T_x(A)$.

Mais precisamente, se (φ, λ) define a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, onde $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta da estrutura diferenciável de A e $\lambda: T_x(A) \to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo, então, notando $\widehat{B} = \varphi(\widehat{A})$ e $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B}$ a carta da estrutura diferenciável induzida em $\widehat{A}$, obtida por restrição de φ, tem-se

$$T_x(\widehat{A}) = \lambda^{-1}(T_{\varphi(x)}(\widehat{B}))$$

e, notando $\widehat{\lambda}: T_x(\widehat{A}) \to T_{\varphi(x)}(\widehat{B})$ o isomorfismo restrição de λ, o par $(\widehat{\varphi}, \widehat{\lambda})$ define a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(\widehat{A})$.

Dem: Comecemos por supor que se escolheu uma apresentação (φ, λ), definindo a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, e que, a partir daí, se escolheu o subespaço vectorial $T_x(\widehat{A}) \subset T_x(A)$ e a respectiva estrutura de espaço vectorial tangente a $\widehat{A}$ em x da maneira indicada na segunda parte do enunciado. Sendo $\iota': T_x(\widehat{A}) \to T_x(A)$ a inclusão, o facto de $\varphi \circ \iota \circ \widehat{\varphi}^{-1}: \widehat{B} \to B$ ser a inclusão e de, por conseguinte,

$$D(\varphi \circ \iota \circ \widehat{\varphi}^{-1})_{\varphi(x)}: T_{\varphi(x)}(\widehat{B}) \to T_{\varphi(x)}(B)$$

ser também a inclusão, implica que vem comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x(\widehat{A}) & \xrightarrow{\iota'} & T_x(A) \\ \widehat{\lambda} \downarrow & & \downarrow \lambda \\ T_{\varphi(x)}(\widehat{B}) & \xrightarrow[D(\varphi\circ\iota\circ\widehat{\varphi}^{-1})_{\varphi(x)}]{} & T_{\varphi(x)}(B), \end{array}$$

o que mostra que se tem realmente $\iota' = D\iota_x: T_x(\widehat{A}) \to T_x(A)$. Resta-nos provar a unicidade. Suponhamos então que existem dois subespaços vectoriais $T_x(\widehat{A})$ e $\widehat{T}_x(\widehat{A})$ de $T_x(A)$, munidos de estruturas de espaço vectorial tangente a $\widehat{A}$ em x, tais que a inclusão $\iota': T_x(\widehat{A}) \to T_x(A)$ e a inclusão $\widehat{\iota}'\colon \widehat{T}_x(\widehat{A}) \to T_x(A)$ sejam as correspondentes derivadas em x da inclusão $\iota\colon \widehat{A} \to A$. Sendo então $\theta\colon T_x(\widehat{A}) \to \widehat{T}_x(\widehat{A})$ o isomorfismo canónico, portanto a derivada em x da identidade de $\widehat{A}$, o facto de se ter $\iota = \iota \circ Id_{\widehat{A}}$ vai implicar, por VI.6.9, que $\iota' = \widehat{\iota}' \circ \theta\colon T_x(\widehat{A}) \to T_x(A)$, e portanto que, para cada $u \in T_x(\widehat{A})$,

$$u = \iota'(u) = \widehat{\iota}'(\theta(u)) = \theta(u),$$

em particular $u \in \widehat{T}_x(\widehat{A})$. O facto de θ ser um isomorfismo garante agora que $T_x(\widehat{A}) = \widehat{T}_x(\widehat{A})$ e que θ é a aplicação identidade e a parte de unicidade de VI.6.14 garante, por fim, que as duas estruturas de espaço vectorial tangente de $T_x(\widehat{A})$ coincidem. □

VI.6.17 Sempre que temos um conjunto A, munido de uma estrutura diferenciável, um ponto $x \in A$, para o qual se escolheu um espaço vectorial tangente $T_x(A)$, e um subconjunto $\widehat{A} \subset A$ com $x \in \widehat{A}$, fica subentendido, salvo aviso em contrário, que ao escrevermos $T_x(\widehat{A})$ nos referimos ao subespaço vectorial de $T_x(A)$ cuja existência e unicidade se encontram asseguradas pelo resultado precedente e que a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(\widehat{A})$ é aquela que foi aí referida.

A convenção anterior poderia conduzir a situações conflituosas se não fossem verdade os três resultados triviais seguintes (comparar com VI.1.12):

a) Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $x \in \widehat{A} \subset A \subset E$ e considere-se o espaço vectorial tangente $T_x(A)$ com o sentido usual. Tem-se então que o espaço vectorial tangente $T_x(\widehat{A})$, no sentido usual, coincide com o obtido quando se olha para $\widehat{A}$ como subconjunto de A.

b) Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x \in A$ e suponhamos escolhido um espaço vectorial tangente $T_x(A)$. Tem-se então que, quando se olha para A como parte de A, o correspondente espaço vectorial tangente $T_x(A)$ é o mesmo.

c) Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, um ponto $x \in A$, para o qual se escolheu um espaço vectorial tangente $T_x(A)$, e $\widehat{A} \subset A$ um subconjunto, com $x \in \widehat{A}$, e consideremos o correspondente subespaço vectorial $T_x(\widehat{A})$ com a correspondente estrutura de espaço vectorial tangente a $\widehat{A}$ em x. Seja $\tilde{A} \subset \widehat{A}$ um subconjunto, com $x \in \tilde{A}$. Tem-se então que o correspondente espaço vectorial tangente $T_x(\tilde{A})$, a $\tilde{A}$ no ponto x, é o mesmo quer se considere $\tilde{A}$ como parte de $\widehat{A}$ ou como parte de A.

Dem: Para a alínea a) basta atender a que, dando a $T_x(\widehat{A})$ o sentido usual, a derivada da inclusão $\widehat{A} \to A$ fica a ser a inclusão $T_x(\widehat{A}) \to T_x(A)$. A alínea b) é trivial. Para a alínea c) basta repararmos que, se considerarmos $T_x(\tilde{A})$ e a respectiva respectiva estrutura de espaço tangente a $\tilde{A}$ em x a partir de $\tilde{A}$ ser encarado como parte de $\widehat{A}$, resulta de VI.6.9, aplicado às inclusões

$\tilde{A} \to \widehat{A}$ e $\widehat{A} \to A$, que a derivada em x da inclusão $\tilde{A} \to A$ fica a ser a inclusão $T_x(\tilde{A}) \to T_x(A)$. □

VI.6.18 Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x \in A$, para o qual se escolheu um espaço vectorial tangente $T_x(A)$. Seja $\widehat{A} \subset A$ uma vizinhança de x em A. Tem-se então $T_x(\widehat{A}) = T_x(A)$.

Dem: Seja (φ, λ) definindo a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, onde $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta da estrutura diferenciável de A e $\lambda: T_x(A) \to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo. Tendo em conta VI.6.16, sabemos que, notando $\widehat{B} = \varphi(\widehat{A})$ e $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B}$ a carta da estrutura diferenciável induzida em $\widehat{A}$, obtida por restrição de φ, tem-se

$$T_x(\widehat{A}) = \lambda^{-1}(T_{\varphi(x)}(\widehat{B})).$$

Basta agora repararmos que o facto de $\widehat{A}$ ser uma vizinhança de x em A implica que $\widehat{B}$ é uma vizinhança de $\varphi(x)$ em B, o que implica que $T_{\varphi(x)}(\widehat{B}) = T_{\varphi(x)}(B)$, e portanto que $T_x(\widehat{A}) = T_x(A)$. □

VI.6.19 Sejam A e $\widehat{A}$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, $f: A \to \widehat{A}$ uma aplicação suave, $x \in A$ e $T_x(A)$ e $T_{f(x)}(\widehat{A})$ espaços vectoriais tangentes a A em x e a $\widehat{A}$ e $f(x)$. Tem-se então:

a) Se $A' \subset A$ é um subconjunto, com $x \in A'$, então a derivada em x da restrição $f_{/A'}: A' \to \widehat{A}$ é a restrição a $T_x(A') \subset T_x(A)$ da derivada $Df_x: T_x(A) \to T_{f(x)}(\widehat{A})$.

b) Se $\widehat{A}' \subset \widehat{A}$ é um subconjunto tal que $f(A) \subset \widehat{A}'$, então a aplicação linear $Df_x: T_x(A) \to T_{f(x)}(\widehat{A})$ tem imagem contida em $T_{f(x)}(\widehat{A}')$ e coincide com a derivada de f quando considerada como aplicação suave de A para $\widehat{A}'$.

Dem: A alínea a) resulta de que a restrição $f_{/A'}: A' \to \widehat{A}$ é a composta de $f: A \to \widehat{A}$ com a inclusão $A' \to A$. A alínea b) resulta de que a aplicação f, considerada como aplicação de A para $\widehat{A}$, é a composta da aplicação f, considerada como aplicação de A para $\widehat{A}'$ com a inclusão $\widehat{A}' \to \widehat{A}$. □

VI.6.20 **(Corolário)** Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x \in A$ e consideremos duas escolhas de espaço vectorial tangente a A em x, $T_x(A)$ e $\widehat{T}_x(A)$, com o correspondente isomorfismo canónico $\theta: T_x(A) \to \widehat{T}_x(A)$. Seja $A' \subset A$ um subconjunto, com $x \in A'$ e consideremos as correspondentes escolhas dos subespaços vectoriais $T_x(A') \subset T_x(A)$ e $\widehat{T}_x(A') \subset \widehat{T}_x(A)$. Tem-se então que $\widehat{T}_x(A') = \theta(T_x(A'))$ e o isomorfismo canónico $\theta': T_x(A') \to \widehat{T}_x(A')$ é a restrição de θ.

Dem: Basta aplicar as duas alíneas do resultado precedente à identidade $Id_A: A \to A$, quando se considera a primeira escolha de espaço vectorial tangente no domínio e a segunda no contradomínio. □

VI.6.21 Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, e $x \in A$, para o qual se escolheu um espaço vectorial tangente $T_x(A)$. Seja (φ, λ) definindo a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, em que $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta da estrutura diferenciável de A e $\lambda: T_x(A) \to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo. Tem-se então

$$D\varphi_x = \lambda: T_x(A) \to T_{\varphi(x)}(B).$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x(A) & \xrightarrow{\lambda} & T_{\varphi(x)}(B) \\ \lambda \downarrow & & \downarrow Id \\ T_{\varphi(x)}(B) & \xrightarrow[Id_{T_{\varphi(x)}(B)}]{} & T_{\varphi(x)}(B) \end{array},$$

em que $Id_{T_{\varphi(x)}(B)}$ é a derivada em $\varphi(x)$ da aplicação suave

$$Id_B \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = Id_B: B \to B. \qquad \square$$

VI.6.22 Sejam A e A' conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $x \in A$ e $y \in A'$ fixados e suponhamos escolhidos espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$ e $T_y(A')$. Existe então uma, e uma só, estrutura de espaço vectorial tangente a $A \times A'$ em (x, y) no espaço vectorial $T_x(A) \times T_y(A')$, relativamente à qual as derivadas das projecções canónicas $\pi_1: A \times A' \to A$ e $\pi_2: A \times A' \to A'$,

$$\begin{aligned} D(\pi_1)_{(x,y)}&: T_x(A) \times T_y(A') \to T_x(A) \\ D(\pi_2)_{(x,y)}&: T_x(A) \times T_y(A') \to T_y(A') \end{aligned}$$

sejam as projecções canónicas.
Mais precisamente, se (φ, λ) define a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, onde $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta de A e $\lambda: T_x(A) \to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo, e se (ψ, μ) define a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_y(A')$, onde $\psi: A' \to C \subset F$ é uma carta de A' e $\mu: T_y(A') \to T_{\psi(y)}(C)$ é um isomorfismo, então o par $(\varphi \times \psi, \lambda \times \mu)$ define a estrutura de espaço vectorial tangente que consideramos em $T_x(A) \times T_y(A')$.
Dem: Para provar a unicidade, atendemos à afirmação de unicidade em VI.6.14, reparando que, a haver duas estruturas de espaço vectorial tangente de $T_x(A) \times T_y(A')$, o facto de se ter $\pi_1 \circ Id_{A\times A'} = \pi_1$ e $\pi_2 \circ Id_{A\times A'} = \pi_2$ implicava que o isomorfismo canónico $T_x(A) \times T_y(A') \to T_x(A) \times T_y(A')$, da primeira estrutura de espaço vectorial tangente para a segunda, composto com cada uma das projecções

$$T_x(A) \times T_y(A') \to T_x(A), \quad T_x(A) \times T_y(A') \to T_x(A'),$$

era igual a essa mesma projecção, e portanto que esse isomorfismo era a identidade. Consideremos então (φ, λ) definindo a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_x(A)$, onde $\varphi: A \to B \subset E$ é uma carta de A e $\lambda: T_x(A) \to T_{\varphi(x)}(B)$ é um isomorfismo, e (ψ, μ) definindo a estrutura de espaço vectorial tangente de $T_y(A')$, onde $\psi: A' \to C \subset F$ é uma carta de A' e $\mu: T_y(A') \to T_{\psi(y)}(C)$ é um isomorfismo. Podemos então considerar a carta $\varphi \times \psi: A \times A' \to B \times C \subset E \times F$ da estrutura diferenciável de $A \times A'$ e o isomorfismo

$$\lambda \times \mu: T_x(A) \times T_y(A') \to T_{\varphi(x)}(B) \times T_{\psi(y)}(C) = T_{\varphi\times\psi(x,y)}(B \times C)$$

e o par $(\varphi \times \psi, \lambda \times \mu)$ vai definir uma estrutura de espaço vectorial tangente em $T_x(A) \times T_y(A')$, estrutura que, como vamos ver, vai verificar as condições do enunciado. O facto de a aplicação

$$\varphi \circ \pi_1 \circ (\varphi \times \psi)^{-1}: B \times C \to B$$

ser precisamente a primeira projecção implica que a sua derivada no ponto $(\varphi(x), \psi(y))$ é a primeira projecção

$$T_{\varphi\times\psi(x,y)}(B \times C) = T_{\varphi(x)}(B) \times T_{\psi(y)}(C) \to T_{\varphi(x)}(B),$$

aplicação linear que composta com

$$\lambda \times \mu: T_x(A) \times T_y(A') \to T_{\varphi(x)}(B) \times T_{\psi(y)}(C)$$

é igual à composta da primeira projecção $T_x(A) \times T_y(A') \to T_x(A)$ com o isomorfismo $\lambda: T_x(A) \to T_{\varphi(x)}(B)$:

$$\begin{array}{ccc} T_x(A) \times T_y(A') & \longrightarrow & T_x(A) \\ \lambda \times \mu \downarrow & & \downarrow \lambda \\ T_{\varphi(x)}(B) \times T_{\psi(y)}(C) & \longrightarrow & T_{\varphi(x)}(B) \end{array} .$$

Ficou assim provado que a derivada da primeira projecção $A \times A' \to A$ no ponto (x, y) é igual à primeira projecção $T_x(A) \times T_y(A') \to T_x(A)$ e do mesmo modo se verifica que a derivada da segunda projecção $A \times A' \to A'$ no ponto (x, y) é a segunda projecção $T_x(A) \times T_y(A') \to T_y(A')$, o que termina a demonstração. □

VI.6.23 Sejam A e A' conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $x \in A$ e $y \in A'$, relativamente aos quais se escolheram espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$ e $T_y(A')$, e consideremos a correspondente estrutura de espaço vectorial tangente em $T_{(x,y)}(A \times A') = T_x(A) \times T_y(A')$, referida no resultado precedente.

a) Sejam $\tilde{A}$ um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável e $z \in \tilde{A}$, com uma escolha de espaço vectorial tangente $T_z(\tilde{A})$. Sejam $f: \tilde{A} \to A$ e $g: \tilde{A} \to A'$ aplicações suaves, com $f(z) = x$ e $g(z) = y$, e consideremos a correspondente aplicação suave $h: \tilde{A} \to A \times A'$, com componentes f e g. Tem-se então que a derivada

$$Dh_z: T_z(\tilde{A}) \to T_{(x,y)}(A \times A') = T_x(A) \times T_y(A')$$

está definida por $Dh_z(w) = (Df_z(w), Dg_z(w))$.

b) Sejam $\widehat{A}$ e $\widehat{A}'$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, $\widehat{x} \in \widehat{A}$ e $\widehat{y} \in \widehat{A}'$, relativamente aos quais se escolheram espaços vectoriais tangentes $T_{\widehat{x}}(\widehat{A})$ e $T_{\widehat{y}}(\widehat{A}')$ e consideremos a correspondente escolha de espaço vectorial tangente $T_{(\widehat{x},\widehat{y})}(\widehat{A} \times \widehat{A}') = T_{\widehat{x}}(\widehat{A}) \times T_{\widehat{y}}(\widehat{A}')$, referida no resultado precedente. Sejam $f: \widehat{A} \to A$ e $g: \widehat{A}' \to A'$ aplicações suaves tais que $f(\widehat{x}) = x$ e $f(\widehat{y}) = y$. Tem-se então, para a correspondente aplicação suave $f \times g: \widehat{A} \times \widehat{A}' \to A \times A'$,

$$D(f \times g)_{(\widehat{x},\widehat{y})} = Df_{\widehat{x}} \times Dg_{\widehat{y}}: T_{\widehat{x}}(\widehat{A}) \times T_{\widehat{y}}(\widehat{A}') \to T_x(A) \times T_y(A').$$

Dem: Para a alínea a), atendemos a que, sendo $\pi_1: A \times A' \to A$ e $\pi_2: A \times A' \to A'$ as projecções canónicas, tem-se $f = \pi_1 \circ h$ e $g = \pi_2 \circ h$, donde $Df_z = D(\pi_1)_{(x,y)} \circ Dh_z$ e $Dg_z = D(\pi_2)_{(x,y)} \circ Dh_z$ e a que $D(\pi_1)_{(x,y)}$ e $D(\pi_2)_{(x,y)}$ são as projecções canónicas $T_x(A) \times T_y(A') \to T_x(A)$ e $T_x(A) \times T_y(A') \to T_y(A')$. A alínea b) vai ser uma consequência da alínea a), se repararmos que, sendo $\widehat{\pi}_1: \widehat{A} \times \widehat{A}' \to \widehat{A}$ e $\widehat{\pi}_2: \widehat{A} \times \widehat{A}' \to \widehat{A}'$ as projecções canónicas, $f \times g$ é a aplicação cujas componentes são $f \circ \widehat{\pi}_1$ e $g \circ \widehat{\pi}_2$. □

VI.6.24 Quando temos dois conjuntos A e A', munidos de estruturas diferenciáveis e pontos $x \in A$ e $y \in A'$, relativamente aos quais se fixaram espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$ e $T_y(A')$, fica subentendido, salvo aviso em contrário, que no conjunto $A \times A'$, com a estrutura diferenciável produto, se considera como espaço vectorial tangente $T_{(x,y)}(A \times A')$ o produto cartesiano $T_x(A) \times T_y(A')$, com a estrutura referida em VI.6.22.

Como é usual, para nos assegurarmos que a convenção anterior não conduz a ambiguidades, necessitamos dos dois factos seguintes:

a) Sejam E e E' espaços vectoriais de dimensão finita e $A \subset E$ e $A' \subset E'$ dois subconjuntos, sobre os quais se considera a estrutura diferenciável canónica. Dados $x \in A$ e $y \in A'$ com as correspondentes escolhas canónicas de espaços vectoriais tangentes $T_x(A) \subset E$ e $T_y(A') \subset E'$, tem-se então que, para o subconjunto $A \times A'$ de $E \times E'$, a escolha canónica do espaço vectorial tangente $T_{(x,y)}(A \times A') = T_x(A) \times T_y(A')$ coincide com a escolha produto referida atrás.

b) Sejam A e A' conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $\widehat{A} \subset A$ e $\widehat{A}' \subset A'$ subconjuntos, sobre os quais se consideram as estruturas diferenciáveis induzidas. Sejam $x \in \widehat{A}$ e $y \in \widehat{A}'$, relativamente aos quais se escolheram espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$ e $T_y(A')$ e consideremos a correspondente estrutura de espaço vectorial tangente a $A \times A'$ em (x,y) de $T_x(A) \times T_y(A')$. Considerando as escolhas induzidas de espaços vectoriais tangentes $T_x(\widehat{A}) \subset T_x(A)$ e $T_y(\widehat{A}') \subset T_y(A')$, e a correspondente escolha produto do espaço vectorial tangente $T_{(x,y)}(\widehat{A} \times \widehat{A}') = T_x(\widehat{A}) \times T_y(\widehat{A}')$, tem-se então que esta última coincide com a escolha induzida pela escolha de $T_{(x,y)}(A \times A')$ considerada.

Dem: Para a alínea a) basta atendermos a que, para a escolha canónica do espaço vectorial tangente $T_{(x,y)}(A \times A') = T_x(A) \times T_y(A')$, as derivadas das projecções canónicas $A \times A' \to A$ e $A \times A' \to A'$ são as projecções canónicas $T_x(A) \times T_y(A') \to T_x(A)$ e $T_x(A) \times T_y(A') \to T_y(A')$. Para a alínea b) reparamos que, considerando a escolha produto do espaço vectorial tangente $T_{(x,y)}(\widehat{A} \times \widehat{A}') = T_x(\widehat{A}) \times T_y(\widehat{A}')$, a derivada da inclusão $\widehat{A} \times \widehat{A}' \to A \times A'$ no ponto (x, y) fica a ser, pela alínea b) de VI.6.23, o produto cartesiano das inclusões $T_x(\widehat{A}) \to T_x(A)$ e $T_y(\widehat{A}') \to T_y(A')$, isto é, a inclusão

$$T_x(\widehat{A}) \times T_y(\widehat{A}') \to T_x(A) \times T_y(A'),$$

atendendo-se então à caracterização da escolha induzida de espaço vectorial tangente, referida em VI.6.16. □

VI.6.25 Sejam A um conjunto, munido de uma estrutura diferenciável, $x_0 \in A$ e $u \in T_{x_0}(A)$. Tem-se então:

a) Se F é um espaço vectorial de dimensão finita e se $f, g \colon A \to F$ são duas aplicações suaves, então, para a aplicação suave $f + g \colon A \to F$, tem-se

$$D(f+g)_{x_0}(u) = Df_{x_0}(u) + Dg_{x_0}(u).$$

b) Sejam F, G, H espaços vectoriais de dimensão finita e $\pi \colon F \times G \to H$ uma aplicação bilinear. Se $f \colon A \to F$ e $g \colon A \to G$ são aplicações suaves e $f \cdot g \colon A \to H$ é a aplicação suave definida por $f \cdot g(x) = \pi(f(x), g(x))$, então

$$D(f \cdot g)_{x_0}(u) = \pi(Df_{x_0}(u), g(x_0)) + \pi(f(x_0), Dg_{x_0}(u)).$$

Dem: Trata-se de duas consequências da alínea a) de VI.6.23 e do teorema da derivação da função composta, se repararmos que $f + g$ é a composta da aplicação suave $A \to F \times F$, com componentes f e g, com a aplicação suave $+ \colon F \times F \to F$ e que $f \cdot g$ é a composta da aplicação suave $A \to F \times G$, com componentes f e g, com a aplicação suave $\pi \colon F \times G \to H$ e se nos lembramos que $D{+}_{(y,z)}(v, w) = v + w$ e

$$D\pi_{(y,z)}(v, w) = \pi(v, z) + \pi(y, w).$$ □

VI.6.26 **(Derivada total e derivadas parciais)** Sejam A, A' e $\widehat{A}$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, e $f \colon A \times A' \to \widehat{A}$ uma aplicação suave. Sejam $x_0 \in A$, $y_0 \in A'$ e $z_0 \in \widehat{A}$, com $z_0 = f(x_0, y_0)$, suponhamos escolhidos espaços vectoriais tangentes $T_{x_0}(A)$, $T_{y_0}(A')$ e $T_{z_0}(\widehat{A})$ e consideremos a correspondente escolha do espaço vectorial tangente

$$T_{(x_0,y_0)}(A \times A') = T_{x_0}(A) \times T_{y_0}(A').$$

Sejam $f_{\cdot,y_0}\colon A \to \widehat{A}$ e $f_{x_0,\cdot}\colon A' \to \widehat{A}$ as aplicações suaves definidas por

$$f_{\cdot,y_0}(x) = f(x,y_0), \quad f_{x_0,\cdot}(y) = f(x_0,y).$$

Tem-se então, para cada $(u,v) \in T_{x_0}(A) \times T_{y_0}(A')$,

$$Df_{(x_0,y_0)}(u,v) = D(f_{\cdot,y_0})_{x_0}(u) + D(f_{x_0,\cdot})_{y_0}(v).$$

Dem: Uma vez que a aplicação $f_{\cdot,y_0}\colon A \to \widehat{A}$ é a composta de $f\colon A \times A' \to \widehat{A}$ com a aplicação $A \to A \times A'$ definida por $x \mapsto (x,y_0)$, esta última tendo a segunda componente constante, e portanto com derivada identicamente nula, concluímos pelo teorema de derivação da função composta que se tem

$$D(f_{\cdot,y_0})_{x_0}(u) = Df_{(x_0,y_0)}(u,0).$$

Do mesmo modo se vê que

$$D(f_{x_0,\cdot})_{y_0}(v) = Df_{(x_0,y_0)}(0,v)$$

pelo que basta agora atendermos à linearidade de $Df_{(x_0,y_0)}$ e ao facto de se ter $(u,v) = (u,0) + (0,v)$. □

O leitor que teve a paciência de acompanhar o que foi feito até agora nesta secção poderá porventura perguntar-se se valeu a pena perder tanto tempo para obter tão poucos resultados palpáveis. Possivelmente essa pergunta até terá alguma razão de ser e por alguma razão colocámos esta secção como a última deste livro… Deve, de qualquer modo, dizer-se que a noção de espaço vectorial tangente a uma variedade está omnipresente em qualquer texto de Geometria pelo que é importante conhecer o seu significado, mesmo quando soubermos como a podemos dispensar. Uma das situações em que a noção de espaço vectorial tangente se torna interessante é quando é possível exibir um espaço vectorial tangente que veícule alguma informação geométrica interessante. É o que fazemos em seguida com o exemplo da variedade de Grassmann abstracta $\mathbb{G}(E)$ dos subespaços vectoriais dum espaço vectorial E (cf. VI.1.9 e VI.2.9).

VI.6.27 Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, munido de produto interno e consideremos o conjunto $G(E) \subset L(E;E)$ das projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E. Lembremos que, como se viu em II.5.13, $G(E)$ é uma variedade sem bordo tendo em cada $\lambda_0 = \pi_F$ como espaço vectorial tangente o conjunto das aplicações lineares $\alpha \in L(E;E)$ cuja matriz relativa à soma directa ortogonal $E = F \oplus F^\perp$ é do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{2,1}^* \\ \alpha_{2,1} & 0 \end{bmatrix}.$$

com $\alpha_{2,1} \in L(F; F^\perp)$ aplicação linear arbitrária.
Uma consequência imediata desta caracterização é a existência de um isomorfismo de $T_{\pi_F}(G(E))$ sobre $L(F; F^\perp)$ que aplica α em $\alpha_{/F}$.
Reparemos agora que, se $F \subset E$ tem dimensão k, tem lugar um isomorfismo χ_F de $F^\perp$ sobre o espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$, que a cada $v \in F^\perp$ associa a classe de equivalência $[v]_F$, como se reconhece se repararmos que temos uma aplicação linear injectiva entre espaços vectoriais com a mesma dimensão $n-k$.[131] Ao isomorfismo $\chi_F : F^\perp \to \frac{E}{F}$ fica associado um isomorfismo $L(F; F^\perp) \to L(F; \frac{E}{F})$, definido por $\beta \mapsto \chi_F \circ \beta$.

VI.6.28 Nas condições anteriores vamos notar, para cada subespaço vectorial $F \subset E$,

$$\rho_F : T_{\pi_F}(G(E)) \to L(F; \frac{E}{F})$$

o isomorfismo obtido por composição dos isomorfismos

$$T_{\pi_F}(G(E)) \to L(F; F^\perp) \to L(F; \frac{E}{F})$$

atrás referidos, ou seja, o definido por $\rho_F(\alpha) = \chi_F \circ \alpha_{/F}$, ou, mais precisamente, por

$$\rho_F(\alpha)(u) = [\alpha(u)]_F,$$

para cada $u \in F$.

VI.6.29 **(Lema Fundamental)** Sejam E e $\widehat{E}$ espaços vectoriais de dimensão finita, munidos de produto interno, e $\xi : E \to \widehat{E}$ uma aplicação linear injectiva, não necessariamente ortogonal, e consideremos os correspondentes conjuntos de projecções ortogonais $G(E)$ e $G(\widehat{E})$ e a aplicação suave

$$\xi_* : G(E) \to G(\widehat{E}), \quad \xi_*(\pi_F) = \xi(\pi_{\xi(F)})$$

(cf. III.1.21). Para cada $\pi_F \in G(E)$, a derivada

$$D(\xi_*)_{\pi_F} : T_{\pi_F}(G(E)) \to T_{\pi_{\xi(F)}}(G(\widehat{E}))$$

torna comutativo o diagrama

[131] Repare-se, a propósito, que o resultado enunciado em III.3.18 não é mais do que a sobrejectividade desta aplicação linear, uma vez que os subespaços afins de subespaço vectorial associado F são precisamente os elementos de $\frac{E}{F}$.

$$\begin{array}{ccc} T_{\pi_F}(G(E)) & \xrightarrow{D(\xi_*)_{\pi_F}} & T_{\pi_{\xi(F)}}(G(\widehat{E})) \\ \rho_F \downarrow & & \downarrow \rho_{\xi(F)} \\ L(F;\frac{E}{F}) & \xrightarrow[\xi_\bigstar]{} & L(\xi(F);\frac{\widehat{E}}{\xi(F)}) \end{array},$$

onde, notando $[\xi]\colon \frac{E}{F} \to \frac{\widehat{E}}{\xi(F)}$ a aplicação resultante de ξ por passagem ao quociente, $\xi_\bigstar\colon L(F;\frac{E}{F}) \to L(\xi(F);\frac{\widehat{E}}{\xi(F)})$ é a aplicação linear definida por $\xi_\bigstar(\beta) = [\xi] \circ \beta \circ (\xi_{/F})^{-1}$.

Dem: Trata-se de uma consequência de III.1.23, uma vez que, se $\alpha \in T_{\pi_F}(G(E))$, tem-se, para cada $u \in F$,

$$\begin{aligned} \rho_{\xi(F)}(D(\xi_*)_{\pi_F}(\alpha))(\xi(u)) &= [D(\xi_*)_{\pi_F}(\alpha)(\xi(u))]_{\xi(F)} = \\ &= [\pi_{\xi(F)^\perp}(\xi(\alpha(u))]_{\xi(F)} = [\xi(\alpha(u))]_{\xi(F)} = \\ &= [\xi]([\alpha(u)]_F) = [\xi](\rho_F(\alpha)(u)) = \xi_\bigstar(\rho_F(\alpha))(\xi(u)). \end{aligned}$$ □

VI.6.30 **(Corolário)** Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, munido de dois produtos internos e notemos π_F e $\widehat{\pi}_F$ as projecções ortogonais de E sobre F relativas ao primeiro e ao segundo produto internos, $G(E)$ e $G(\widehat{E})$ as variedades de Grassmann correspondentes e

$$\rho_F\colon T_{\pi_F}(G(E)) \to L(F;\frac{E}{F}), \quad \widehat{\rho}_F\colon T_{\widehat{\pi}_F}(\widehat{G}(E)) \to L(F;\frac{E}{F})$$

os isomorfismos referidos em VI.6.28. Tem-se então que a derivada do difeomorfismo $\Lambda\colon G(E) \to \widehat{G}(E)$, que a cada π_F associa $\widehat{\pi}_F$ (cf. III.1.22) verifica

$$\widehat{\rho}_F \circ D\Lambda_{\pi_F} = \rho_F\colon T_{\pi_F}(G(E)) \to L(F;\frac{E}{F}).$$

$$\begin{array}{ccc} T_{\pi_F}(G(E)) & \xrightarrow{D\Lambda_{\pi_F}} & T_{\pi_F}(\widehat{G}(E)) \\ \rho_F \downarrow & & \downarrow \widehat{\rho}_F \\ L(F;\frac{E}{F}) & \xrightarrow[Id]{} & L(F;\frac{E}{F}) \end{array}$$

Dem: Trata-se do caso particular do resultado precedente em que se toma para ξ a identidade de E, com o primeiro produto interno no domínio e o segundo produto interno no espaço de chegada. □

VI.6.31 **(O espaço vectorial tangente à variedade de Grassmann abstracta)** Seja E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n e consideremos na variedade de Grassmann $\mathbb{G}(E)$ dos subespaços vectoriais de E a sua estrutura diferenciável canónica. Se $F \in \mathbb{G}(E)$, o espaço vectorial

$$T_F(\mathbb{G}(E)) = L(F;\frac{E}{F})$$

possui uma estrutura canónica de espaço vectorial tangente a $\mathbb{G}(E)$ em F definida, para cada produto interno em E, pela apresentação (φ, ρ_F^{-1}), onde, notando $G(E)$ o conjunto das projecções ortogonais sobre subespaços vectoriais de E, $\varphi: \mathbb{G}(E) \to G(E)$ é a carta definida por $\varphi(F) = \pi_F$ e $\rho_F: T_{\pi_F}(G(E)) \to L(F; \frac{E}{F})$ é o isomorfismo definido em VI.6.28.

Dem: Tudo o que é preciso mostrar é que, dados dois produtos internos em E, com os correspondentes cartas $\varphi: \mathbb{G}(E) \to G(E)$ e $\widehat{\varphi}: \mathbb{G}(E) \to \widehat{G}(E)$ e isomorfismos $\rho_F: T_{\pi_F}(G(E)) \to L(F; \frac{E}{F})$ e $\widehat{\rho}_F: T_{\widehat{\pi}_F}(\widehat{G}(E)) \to L(F; \frac{E}{F})$, tem-se, para o difeomorfismo $\widehat{\varphi} \circ \varphi^{-1}: G(E) \to \widehat{G}(E)$,

$$D(\widehat{\varphi} \circ \varphi^{-1})_{\pi_F} \circ \rho_F^{-1} = \widehat{\rho}_F^{-1}: L(F; \frac{E}{F}) \to T_{\widehat{\pi}_F}(\widehat{G}(E)).$$

Ora isso é uma consequência imediata do corolário precedente, uma vez que $\widehat{\varphi} \circ \varphi^{-1}: G(E) \to \widehat{G}(E)$ é precisamente o difeomorfismo Λ que aí foi referido. □

VI.6.32 Sejam E e $\widehat{E}$ espaços vectoriais de dimensão finita e $\xi: E \to \widehat{E}$ uma aplicação linear injectiva e consideremos a correspondente aplicação suave $\xi_*: \mathbb{G}(E) \to \mathbb{G}(\widehat{E})$ definida por $\xi_*(F) = \xi(F)$ (cf. VI.1.20). Para cada $F \in \mathbb{G}(E)$, considerando as estruturas canónicas de espaço vectorial tangente em $T_F(\mathbb{G}(E)) = L(F; \frac{E}{F})$ e em $T_{\xi(F)}(\mathbb{G}(\widehat{E})) = L(\xi(F); \frac{\widehat{E}}{\xi(F)})$, tem-se então que a aplicação linear derivada

$$D(\xi_*)_F: L(F; \frac{E}{F}) \to L(\xi(F); \frac{\widehat{E}}{\xi(F)})$$

é a aplicação $\xi_\bigstar: L(F; \frac{E}{F}) \to L(\xi(F); \frac{\widehat{E}}{\xi(F)})$ definida por $\xi_\bigstar(\beta) = [\xi] \circ \beta \circ (\xi_{/F})^{-1}$, onde $[\xi]: \frac{E}{F} \to \frac{\widehat{E}}{\xi(F)}$ é a aplicação resultante de ξ por passagem ao quociente.

Dem: Fixemos produtos internos em E e $\widehat{E}$ e consideremos as correspondentes cartas $\varphi: \mathbb{G}(E) \to G(E)$ e $\widehat{\varphi}: \mathbb{G}(\widehat{E}) \to G(\widehat{E})$. Por definição, a aplicação linear $D(\xi_*)_F: L(F; \frac{E}{F}) \to L(\xi(F); \frac{\widehat{E}}{\xi(F)})$ é aquela que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} L(F; \frac{E}{F}) \arrow[r, "D(\xi_*)_F"] \arrow[d, "\rho_F^{-1}"'] & L(\xi(F); \frac{\widehat{E}}{\xi(F)}) \arrow[d, "\rho_{\xi(F)}^{-1}"] \\ T_{\pi_F}(G(E)) \arrow[r, "D(\widehat{\varphi} \circ \xi_* \circ \varphi^{-1})_{\pi_F}"'] & T_{\pi_{\xi(F)}}(G(\widehat{E})), \end{tikzcd}$$

ou, o que é o mesmo, aquela que torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_{\pi_F}(G(E)) & \xrightarrow{D(\widehat{\varphi}\circ\xi_*\circ\varphi^{-1})_{\pi_F}} & T_{\pi_{\xi(F)}}(G(\widehat{E})) \\ \rho_F\downarrow & & \downarrow\rho_{\xi(F)} \\ L(F;\frac{E}{F}) & \xrightarrow[D(\xi_*)_F]{} & L(\xi(F);\frac{\widehat{E}}{\xi(F)}) \end{array}.$$

O facto de se ter efectivamente $D(\xi_*)_F = \xi_\bigstar$ é agora uma consequência de VI.6.29, uma vez que a aplicação $\widehat{\varphi}\circ\xi_*\circ\varphi^{-1}\colon G(E)\to G(\widehat{E})$ está definida por $\pi_F \mapsto \pi_{\xi(F)}$, sendo assim aquela que notámos ξ_* naquele resultado. □

VI.6.33 **(Corolário)** Sejam E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n e $E' \subset E$ um subespaço vectorial e lembremos que, como se viu em VI.1.13, $\mathbb{G}(E') \subset \mathbb{G}(E)$ e a estrutura diferenciável induzida em $\mathbb{G}(E')$ pela estrutura diferenciável canónica de $\mathbb{G}(E)$ é a sua estrutura diferenciável canónica. Para cada $F \in \mathbb{G}(E')$, considerando as correspondentes estruturas de espaço vectorial tangente de $T_F(\mathbb{G}(E')) = L(F;\frac{E'}{F})$ e de $T_F(\mathbb{G}(E)) = L(F;\frac{E}{F})$, tem-se que a primeira coincide com a estrutura de espaço vectorial tangente que resulta de olhar para $\mathbb{G}(E')$ como parte de $\mathbb{G}(E)$ (cf. VI.6.16).
Dem: Tendo em conta a definição da estrutura induzida de espaço vectorial tangente em VI.6.16, basta mostrarmos que a derivada da inclusão $\iota\colon\mathbb{G}(E')\to\mathbb{G}(E)$ no ponto F é a inclusão de $L(F;\frac{E'}{F})$ em $L(F;\frac{E}{F})$ e isso é o caso particular do resultado precedente, em que se toma para ξ a inclusão de E' em E. □

VI.6.34 **(Variedades de Grassmann abstractas e fibrados vectoriais)** Sejam E um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão n, G um espaço vectorial real de dimensãi finita, $A \subset G$ e $\underline{E} = (E_x)_{x\in A}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset E$. Consideremos a correspondente aplicação suave $\Phi\colon A\to\mathbb{G}(E)$, definida por $\Phi(x) = E_x$ (cf. VI.1.21). Para cada $x \in A$, considerando a estrutura canónica de espaço vectorial tangente em $T_{E_x}(\mathbb{G}(E)) = L(E_x;\frac{E}{E_x})$, a derivada

$$D\Phi_x\colon T_x(A)\to T_{E_x}(\mathbb{G}(E)) = L(E_x;\frac{E}{E_x})$$

admite as duas seguintes caracterizações alternativas:
1) Fixado um produto interno auxiliar em E, com a correspondente segunda forma fundamental $h_x\colon T_x(A)\times E_x\to E_x^\perp$,

$$D\Phi_x(u)(w) = [h_x(u,w)]_{E_x}.$$

2) Se $z \in E$, tem-se $D\Phi_x(u)(w) = [z]_{E_x}$ se, e só se, (u,z) é tangente ao espaço total $\underline{E}$ em (x,w).
Dem: Fixemos um produto interno auxiliar em E e consideremos a correspondente variedade $G(E) \subset L(E;E)$ e a carta $\varphi\colon\mathbb{G}(E)\to G(E)$, definida por $\varphi(F) = \pi_F$. Lembremos que, sendo $\rho_F\colon T_{\pi_F}(G(E))\to L(F;\frac{E}{F})$ o iso-

morfismo definido em VI.6.28, (φ, ρ_F^{-1}) é uma apresentação de $L(F; \frac{E}{F})$ como espaço vectorial tangente a $\mathbb{G}(E)$ em F. Utilizando naturalmente $Id_A: A \to A$ como carta do domínio A, podemos assim concluir que

$$D\Phi_x = \rho_{E_x} \circ D(\varphi \circ \Phi)_x : T_x(A) \to L(E_x; \frac{E}{E_x})$$

ou seja, atendendo a que $\varphi(\Phi(x))$ é a projecção ortogonal π_x de E sobre E_x,

$$D\Phi_x(u)(w) = \rho_{E_x}(D\pi_x(u))(w) = [D\pi_x(u)(w)]_{E_x} = [h_x(u,w)]_{E_x}.$$

A segunda caracterização é uma consequência da primeira, tendo em conta a caracterização do espaço tangente ao espaço total $\underline{E}$ nas alíneas b) e c) de III.3.19. □

Vamos agora referir uma das concretizações mais utilizadas de espaço tangente a uma variedade abstracta num dos seus pontos, aquela que caracteriza os vectores tangentes como operadores diferenciais.

VI.6.35 Seja M uma variedade abstracta. Vamos notar $\mathcal{F}_M$ o espaço vectorial, em geral de dimensão infinita, das aplicações suaves $\alpha: M \to \mathbb{R}$ (cf. VI.1.28), espaço vectorial em que está definida uma multiplicação por $\alpha \cdot \beta(x) = \alpha(x)\beta(x)$.[132]
Dado $x_0 \in M$, vamos chamar *derivação* de M em x_0 a uma aplicação linear $\Lambda: \mathcal{F}_M \to \mathbb{R}$, que verifique a condição

$$\Lambda(\alpha \cdot \beta) = \Lambda(\alpha)\beta(x_0) + \alpha(x_0)\Lambda(\beta).$$

Notaremos $\mathcal{D}er(M, x_0)$ o conjunto de todas as derivações $\Lambda: \mathcal{F}_M \to \mathbb{R}$, de M em x_0, conjunto que é trivialmente um espaço vectorial.

A priori poderia parecer que o espaço vectorial $\mathcal{D}er(M, x_0)$, tal como $\mathcal{F}_M$, fosse, em geral, de dimensão infinita. De facto, como veremos nesta secção, trata-se de um espaço vectorial de dimensão finita, igual à dimensão de M em x_0. Mais precisamente, escolhido um espaço vectorial tangente $T_{x_0}(M)$, vamos definir um isomorfismo $T_{x_0}(M) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$.

VI.6.36 Sejam M uma variedade, $x_0 \in M$ e $T_{x_0}(M)$ um espaço vectorial tangente a M em x_0. Para cada $u \in T_{x_0}(M)$, tem então lugar uma derivação

$$D_u: \mathcal{F}_M \to \mathbb{R}, \quad D_u(\alpha) = D\alpha_{x_0}(u),$$

a *derivação associada* ao vector tangente u, e ficamos assim com uma aplicação linear $T_{x_0}(M) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$, que a u associa D_u.

[132] $\mathcal{F}_M$ é assim uma álgebra.

Dem: O facto de cada aplicação $D_u: \mathcal{F}_M \to \mathbb{R}$ ser uma derivação é uma consequência de VI.6.25 e a linearidade da aplicação $u \mapsto D_u$ é trivial. □

VI.6.37 Sejam M e $\widehat{M}$ variedades e $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave. Se $x_0 \in M$, tem lugar uma aplicação linear $f^*: \mathcal{F}_{\widehat{M}} \to \mathcal{F}_M$, definida por $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$, que verifica $f^*(\alpha \cdot \beta) = f^*(\alpha) \cdot f^*(\beta)$,[133] assim como uma aplicação linear

$$f_*: \mathcal{D}er(M, x_0) \to \mathcal{D}er(\widehat{M}, f(x_0)), \quad f_*(\Lambda) = \Lambda \circ f^*,$$

ou seja, mais explicitamente, $f_*(\Lambda)(\alpha) = \Lambda(\alpha \circ f)$.
Dem: O facto de $f^*: \mathcal{F}_{\widehat{M}} \to \mathcal{F}_M$ estar bem definida, ser linear e verificar a condição do enunciado é trivial. O facto de, para cada $\Lambda \in \mathcal{D}er(M, x_0)$, ser $\Lambda \circ f^* \in \mathcal{D}er(\widehat{M}, f(x_0))$ resulta de que $\Lambda \circ f^*: \mathcal{F}_{\widehat{M}} \to \mathbb{R}$ é linear e de que

$$\begin{aligned}\Lambda \circ f^*(\alpha \cdot \beta) &= \Lambda(f^*(\alpha) \cdot f^*(\beta)) = \\ &= \Lambda \circ f^*(\alpha)\, \beta_{f(x_0)} + \alpha_{f(x_0)}\, \Lambda \circ f^*(\beta).\end{aligned}$$

A linearidade da aplicação $f_*: \mathcal{D}er(M, x_0) \to \mathcal{D}er(\widehat{M}, f(x_0))$ é trivial. □

VI.6.38 **(Functorialidade)** Dadas as variedades M, $\widehat{M}$ e $\tilde{M}$ e as aplicações suaves $f: M \to \widehat{M}$ e $g: \widehat{M} \to \tilde{M}$, tem-se, para cada $x_0 \in M$ e $\Lambda \in \mathcal{D}er(M, x_0)$,

$$(g \circ f)_*(\Lambda) = g_*(f_*(\Lambda)) \in \mathcal{D}er(\tilde{M}, g(f(x_0))).$$

Em consequência, e uma vez que, para a aplicação suave $Id_M: M \to M$, se tem trivialmente que $(Id_M)_*: \mathcal{D}er(M, x_0) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$ é a identidade, concluímos que, se $f: M \to \widehat{M}$ é um difeomorfismo, então

$$f_*: \mathcal{D}er(M, x_0) \to \mathcal{D}er(\widehat{M}, f(x_0))$$

é um isomorfismo e $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*: \mathcal{D}er(\widehat{M}, f(x_0)) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$.
Dem: Trata-se de uma consequência imediata das definições. □

VI.6.39 Sejam M e $\widehat{M}$ variedades, $f: M \to \widehat{M}$ uma aplicação suave e $x_0 \in M$ e suponhamos escolhidos espaços vectoriais tangentes $T_{x_0}(M)$ e $T_{f(x_0)}(\widehat{M})$. Para cada $u \in T_{x_0}(M)$, tem-se então $f_*(D_u) = D_{Df_{x_0}(u)}$, por outras palavras, é comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}(M) & \xrightarrow{Df_{x_0}} & T_{f(x_0)}(\widehat{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}er(M, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{D}er(\widehat{M}, f(x_0)) \end{array},$$

em que as flechas verticais são as aplicações lineares referidas em VI.6.36.

[133]Por outras palavras, f^* é um morfismo de álgebras.

Dem: Basta atender a que

$$\begin{aligned}f_*(D_u)(\alpha) &= D_u(\alpha\circ f) = D(\alpha\circ f)_{x_0}(u) =\\ &= D\alpha_{f(x_0)}(Df_{x_0}(u)) = D_{Df_{x_0}(u)}(\alpha).\end{aligned}$$ □

VI.6.40 **(Corolário)** Sejam M uma variedade e $x_0\in M$ e suponhamos que se fizeram duas escolhas de espaço vectorial tangente em x_0, $T_{x_0}(M)$ e $\widehat{T}_{x_0}(M)$, com o correspondente isomorfismo canónico $\theta\colon T_{x_0}(M)\to\widehat{T}_{x_0}(M)$. Para cada $u\in T_{x_0}(M)$, tem-se então que as derivações de M em x_0 associadas a u e a $\theta(u)$ coincidem.

Dem: Trata-se do caso particular do resultado anterior em que se toma para f a aplicação identidade de M, com a primeira escolha de espaço vectorial tangente no domínio e a segunda no espaço de chegada. □

VI.6.41 Sejam M uma variedade, $x_0\in M$ e $\Lambda\colon\mathcal{F}_M\to\mathbb{R}$ uma derivação de M no ponto x_0. Se $\alpha\in\mathcal{F}_M$ é uma aplicação constante, então $\Lambda(\alpha)=0$.

Dem: Para cada $a\in\mathbb{R}$, notemos também a a aplicação de M para $\mathbb{R}$ de valor constante a. O facto de se ter

$$\Lambda(1)=\Lambda(1\cdot 1)=\Lambda(1)\times 1+1\times\Lambda(1)=2\Lambda(1)$$

implica que se tem $\Lambda(1)=0$ e resulta daqui, por linearidade, que se tem também $\Lambda(a)=a\Lambda(1)=0$. □

VI.6.42 **(Lema)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n e $x_0\in M\subset E$ tais que (M,x_0) seja uma variedade de dimensão m e índice p. Existem então aplicações suaves $g_j\colon E\to\mathbb{R}$, onde $1\le j\le n-m$, tais que $g_{j/M}=0$ e que, para cada $u\in E$, seja $u\in T_{x_0}(M)$ se, e só se, para cada j, $Dg_{j_{x_0}}(u)=0$.

Dem: Tendo em conta II.6.33, existe um aberto $\widehat{U}$ de E, com $x_0\in\widehat{U}$, e uma aplicação suave $\widehat{g}\colon\widehat{U}\to\mathbb{R}^{n-m}\times\mathbb{R}^p$ tal que $\widehat{g}(x_0)=(0,0)$, que $D\widehat{g}_{x_0}$ seja sobrejectiva e que

$$\widehat{U}\cap M=\{x\in\widehat{U}\mid\widehat{g}(x)\in\{0\}^{n-m}\times\mathbb{R}^p_+\},$$

resultando então de II.6.31 que, para cada $u\in E$, tem-se $u\in T_{x_0}(M)$ se, e só se, $D\widehat{g}_{x_0}(u)\in\{0\}^{n-m}\times\mathbb{R}^p$. Sejam $\widehat{g}_j\colon\widehat{U}\to\mathbb{R}$, com $1\le j\le n-m$, as $n-m$ primeiras componentes de $\widehat{g}$. Trata-se portanto de aplicações suaves nulas em $\widehat{U}\cap M$ e tais que, para cada $u\in E$, $u\in T_{x_0}(M)$ se, e só se, para cada j, $D\widehat{g}_{j_{x_0}}(u)=0$. Pelo teorema da partição da unidade, aplicado à cobertura de E pelos abertos $\widehat{U}$ e $E\setminus\{x_0\}$, podemos considerar uma aplicação suave $\varphi\colon E\to[0,1]$, nula fora de uma parte C de $\widehat{U}$, fechada em E, e tomando o valor 1 fora de uma parte C' de $E\setminus\{x_0\}$, fechada em E. Podemos finalmente considerar as aplicações suaves $g_j\colon E\to\mathbb{R}$, definidas por

$$g_j(x) = \begin{cases} \varphi(x)\widehat{g}_j(x), & \text{se } x \in \widehat{U} \\ 0, & \text{se } x \notin \widehat{U} \end{cases}$$

(as restrições aos abertos $\widehat{U}$ e $E \setminus C$, de união E são suaves, a segunda por ser identicamente nula), aplicações que vão ser identicamente nulas em M, e o facto de g_j coincidir com $\widehat{g}_j$ no aberto $E \setminus C'$, contendo x_0, implica que se tem, para cada $u \in E$, $Dg_{j_{x_0}}(u) = 0$ se, e só se, $D\widehat{g}_{j_{x_0}}(u) = 0$. □

VI.6.43 **(Lema)** Seja $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Existem então aplicações suaves $f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $1 \leq j \leq n$, tais que $f_j(0) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(0)$ e que, para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = g(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j\, f_j(x).$$

Dem: Seja, para cada $1 \leq j \leq n$, $f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$f_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx)\, dt,$$

aplicação cuja suavidade se encontra garantida pelo teorema de derivação do integral paramétrico (cf. I.10.4). É evidente que $f_j(0) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(0)$ e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, podemos agora escrever, considerando a aplicação suave $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(t) = g(tx)$,

$$\begin{aligned} g(x) - g(0) = \varphi(1) - \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi'(t)\, dt = \int_0^1 Dg_{tx}(x)\, dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx)\, dt = \sum_{j=1}^{n} x_j\, f_j(x). \end{aligned}$$ □

VI.6.44 **(Lema)** Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade fechada, com $0 \in M$. Tem-se então que a aplicação linear de $T_0(M)$ para $\mathcal{D}er(M,0)$, que a cada u associa a derivação D_u, é um isomorfismo.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

a) Para cada $1 \leq j \leq n$, seja $\alpha_j: M \to \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por $\alpha_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$. Para cada $u = (u_1, \ldots, u_n) \in T_0(M)$, tem-se então

$$u_j = D\alpha_j(u) = D_u(\alpha_j),$$

o que implica, em particular, que é injectiva a aplicação linear $u \mapsto D_u$. Resta-nos provar que ela é também sobrejectiva, para o que consideramos $\Lambda \in \mathcal{D}er(M,0)$ arbitrário.

b) Seja, para cada j, $u_j = \Lambda(\alpha_j) \in \mathbb{R}$ e consideremos o correspondente elemento $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. O resultado ficará provado se virmos que

se tem $u \in T_0(M)$ e $D_u = \Lambda$.
c) Vamos mostrar nesta alínea que, para cada aplicação suave $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tem-se $\Lambda(g_{/M}) = Dg_0(u)$.
Para isso, aplicamos o lema anterior para garantir a existência de aplicações suaves $f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que $f_j(0) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(0)$ e que $g(x) = g(0) + \sum x_j\, f_j(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, donde $g_{/M} = g(0) + \sum \alpha_j\, f_{j/M}$. Tendo em conta VI.6.41, vemos agora que

$$\Lambda(g_{/M}) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda(\alpha_j) f_j(0) + \alpha_j(0)\Lambda(f_{j/M}) = \sum_{j=1}^{n} u_j\, \frac{\partial g}{\partial x_j}(0) = Dg_0(u),$$

como queríamos.
d) Tendo em conta o lema VI.6.42, podemos considerar aplicações suaves $g_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $g_{j/M} = 0$ e que, para cada $v \in \mathbb{R}^n$, se tenha $v \in T_0(M)$ se, e só se, para cada j, $Dg_{j0}(u) = 0$. O que vimos em c) implica então que, para cada j,

$$Dg_{j0}(u) = \Lambda(g_{/M}) = \Lambda(0) = 0,$$

pelo que se tem realmente $u \in T_0(M)$.
e) Por fim, para cada $\alpha \in \mathcal{F}_M$, o facto de a variedade M ser fechada em $\mathbb{R}^n$ implica, por II.3.12, a existência de uma aplicação suave $\overline{\alpha}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prolongando α e então, mais uma vez pelo que vimos em c),

$$\Lambda(\alpha) = D\overline{\alpha}_0(u) = D\alpha_0(u) = D_u(\alpha),$$

o que mostra que $\Lambda = D_u$. □

VI.6.45 **(Teorema fundamental)** Sejam M uma variedade abstracta e $x_0 \in M$ e suponhamos escolhido um espaço vectorial tangente $T_{x_0}(M)$. Tem-se então que a aplicação linear de $T_{x_0}(M)$ para $\mathcal{D}er(M, x_0)$, que a u associa a derivação associada D_u, é um isomorfismo.
Dem: Tendo em conta VI.2.32, podemos considerar um espaço vectorial E de dimensão n, uma subvariedade fechada $\widehat{M} \subset E$ e um difeomorfismo $f: M \to \widehat{M}$. Por composição com um isomorfismo de E sobre $\mathbb{R}^n$ e com uma translação, pode-se já supor que se tem $E = \mathbb{R}^n$ e $f(x_0) = 0$. Podemos então considerar o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}(M) & \xrightarrow{Df_{x_0}} & T_0(\widehat{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}er(M, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{D}er(\widehat{M}, 0) \end{array},$$

em que as flechas horizontais são isomorfismos e a flecha vertical direita é um isomorfismo, pelo lema anterior, de onde se deduz trivialmente que a flecha vertical esquerda é também um isomorfismo. □

VI.6.46 **(Corolário)** Sejam M uma variedade abstracta, $x_0 \in M$ e $\widehat{M} \subset M$ outra variedade abstracta tal que $x_0 \in \widehat{M}$ e que (M, x_0) e $(\widehat{M}, x_0)$ tenham a mesma dimensão[134]. Tem-se então:

a) Sendo $\iota: \widehat{M} \to M$ a inclusão, a correspondente aplicação linear

$$\iota_*: \mathcal{D}er(\widehat{M}, x_0) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$$

é um isomorfismo.

b) Se $\Lambda \in \mathcal{D}\mathrm{er}(M, x_0)$ e se $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_M$ são tais que $\alpha_{/\widehat{M}} = \beta_{/\widehat{M}}$, então $\Lambda(\alpha) = \Lambda(\beta)$.

Dem: Tem-se $T_{x_0}(\widehat{M}) \subset T_{x_0}(M)$ donde, uma vez que se trata de espaços vectoriais com a mesma dimensão, $T_{x_0}(\widehat{M}) = T_{x_0}(M)$, e portanto a aplicação linear $D\iota_{x_0}: T_{x_0}(\widehat{M}) \to T_{x_0}(M)$ é a identidade. Ficamos então com um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}(\widehat{M}) & \xrightarrow{Id} & T_{x_0}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}er(\widehat{M}, x_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathcal{D}er(M, x_0) \end{array},$$

em que as flechas verticais são isomorfismos, o que implica que a aplicação linear $\iota_*: \mathcal{D}er(\widehat{M}, x_0) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$ é realmente um isomorfismo. A conclusão de b) é uma consequência da de a), visto que, sendo $\widehat{\Lambda} \in \mathcal{D}er(\widehat{M}, x_0)$ tal que $\iota_*(\widehat{\Lambda}) = \Lambda$, vem $\Lambda(a) = \widehat{\Lambda}(\alpha_{/\widehat{M}}) = \widehat{\Lambda}(\beta_{/\widehat{M}}) = \Lambda(\beta)$. □

VI.6.47 Nas condições do corolário precedente, notamos, para cada $\Lambda \in \mathcal{D}er(M, x_0)$, $\Lambda_{/\widehat{M}}$ o elemento de $\mathcal{D}er(\widehat{M}, x_0)$ tal que $\iota_*(\Lambda_{/\widehat{M}}) = \Lambda$ e dizemos que $\Lambda_{/\widehat{M}}$ é a *restrição* da derivação Λ a $\widehat{M}$.

Vimos em VI.6.45 que, se M é uma variedade abstracta e $x_0 \in M$, tem lugar um isomorfismo $T_{x_0}(M) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$, $u \mapsto D_u$, e isso mostra, em particular, que existe uma estrutura de espaço vectorial tangente a M em x_0, sobre $\mathcal{D}er(M, x_0)$. O próximo resultado mostra, mais precisamente, como uma tal estrutura pode ser definida e identifica, no quadro desta escolha de espaço vectorial tangente, o que é a derivada duma aplicação suave. Ele permite enquadrar, em particular, na teoria que temos vindo a desenvolver a opção, seguida por alguns autores, de definir desde o início o espaço vectorial tangente como sendo $\mathcal{D}er(M, x_0)$.

VI.6.48 Sejam M uma variedade abstracta e $x_0 \in M$. Tem-se então:

a) Existe em $\mathcal{D}er(M, x_0)$ uma, e uma só, estrutura de espaço vectorial tangente a M em x_0 tal que, qualquer que seja a escolha de um espaço vectorial tangente $T_{x_0}(M)$, o isomorfismo canónico $\theta: T_{x_0}(M) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$ esteja

[134] Por exemplo, $\widehat{M}$ pode ser um aberto de M, contendo x_0.

definido por $u \mapsto D_u$.
b) Seja $\varphi\colon M \to B \subset E$ uma carta da estrutura diferenciável de M e seja $\lambda\colon \mathcal{D}er(M, x_0) \to T_{\varphi(x_0)}(B)$ o isomorfismo tal que a estrutura de espaço vectorial tangente de $\mathcal{D}er(M, x_0)$ seja definida pela apresentação (φ, λ). Tem-se então que o isomorfismo λ^{-1} aplica cada $v \in T_{\varphi(x_0)}(B)$ na derivação $\Lambda \in \mathcal{D}er(M, x_0)$ definida por

$$\Lambda(\alpha) = D(\alpha \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v).$$

c) Se $\widehat{M}$ é outra variedade abstracta e se $f\colon M \to \widehat{M}$ é uma aplicação suave, então a aplicação linear

$$Df_{x_0}\colon \mathcal{D}er(M, x_0) \to \mathcal{D}er(\widehat{M}, f(x_0))$$

coincide com a aplicação linear $f_*\colon \mathcal{D}er(M, x_0) \to \mathcal{D}er(\widehat{M}, f(x_0))$ referida em VI.6.37, estando assim definida por

$$Df_{x_0}(\Lambda)(\alpha) = \Lambda(\alpha \circ f).$$

Dem: Fixemos uma escolha de espaço vectorial tangente $T_{x_0}(M)$. O facto de ter lugar um isomorfismo $\theta\colon T_{x_0}(M) \to \mathcal{D}er(M, x_0)$, $u \mapsto D_u$, implica, por VI.6.14, a existência de uma, e uma só, estrutura de espaço vectorial tangente em $\mathcal{D}er(M, x_0)$ tal que θ seja o isomorfismo canónico. Para provar a), tudo o que falta verificar é que esta estrutura não depende da escolha feita para o espaço vectorial tangente $T_{x_0}(M)$ e isso ficará assegurado se provarmos b), visto que ficamos então com uma definição alternativa da estrutura de espaço vectorial tangente, independente da escolha feita. Fixemos então uma carta $\varphi\colon M \to B \subset E$ da estrutura diferenciável de M e sejam $\lambda\colon \mathcal{D}er(M, x_0) \to T_{\varphi(x_0)}(B)$ e $\mu\colon T_{x_0}(M) \to T_{\varphi(x_0)}(B)$ os isomorfismos tais que as estruturas de espaço vectorial tangente de $\mathcal{D}er(M, x_0)$ e $T_{x_0}(M)$ sejam definidas pelas apresentações (φ, λ) e (φ, μ), respectivamente. Tendo em conta a definição do isomorfismo canónico como derivada em x_0 da aplicação identidade, vemos que se tem $\lambda \circ \theta = \mu$ e portanto, tendo em conta VI.6.21,

$$\lambda^{-1} = \theta \circ \mu^{-1} = \theta \circ (D\varphi_{x_0})^{-1} = \theta \circ D\varphi^{-1}_{\varphi(x_0)}.$$

Podemos assim escrever, para cada $v \in T_{\varphi(x_0)}(B)$ e $\alpha \in \mathcal{F}_M$,

$$\lambda^{-1}(v)(\alpha) = \theta(D\varphi^{-1}_{\varphi(x_0)}(v))(\alpha) = D\alpha_{x_0}(D\varphi^{-1}_{\varphi(x_0)}(v)) = D(\alpha \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v),$$

o que prova b). A alínea c) é agora uma consequência imediata de VI.6.15 e VI.6.39. □

EXERCÍCIOS

Ex VI.1 Seja $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $\varphi(t) = t^3$. Mostrar que φ constitui uma carta de $\mathbb{R}$ e que o atlas de $\mathbb{R}$ constituído pela única carta φ define uma estrutura diferenciável em $\mathbb{R}$ diferente da sua estrutura diferenciável canónica, enquanto espaço vectorial de dimensão finita, embora com a mesma topologia associada (escusado será sublinhar que não é esta a estrutura diferenciável que se considera usualmente em $\mathbb{R}$). Determinar mais uma estrutura diferenciável de $\mathbb{R}$ distinta das duas consideradas anteriormente.

Ex VI.2 **(Para quem conheça a noção de espaço afim abstracto)** Seja E um espaço afim, de dimensão n, com espaço vectorial associado $\vec{E}$.
Mostrar que se pode definir uma estrutura diferenciável natural em E, relativamente à qual E é uma variedade sem bordo com dimensão n.

Ex VI.3 **(O dual dum fibrado vectorial concreto)** Sejam E e G espaços vectoriais de dimensão finita, $M \subset G$ um conjunto e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset E$. Para cada $x \in M$, seja $E_x^* = L(E_x; \mathbb{R})$ o espaço vectorial dual da fibra E_x (reparar que, em geral, os E_x^* não são subespaços vectoriais dum mesmo espaço vectorial pelo que $(E_x^*)_{x \in M}$ não é uma família de subespaços vectoriais, no sentido estudado no capítulo III).
Seja

$$\underline{E}^* = \{(x, \lambda) \mid x \in M \wedge \lambda \in E_x^*\}$$

o "espaço total" da família $(E_x^*)_{x \in M}$.
a) Fixemos um produto interno em E e notemos, para cada $x \in M$, π_x a projecção ortogonal de E sobre E_x. Verificar que, para cada $x \in M$, tem lugar um isomorfismo de E_x^* sobre um subespaço vectorial $E_x^\circ \subset E^* = L(E; \mathbb{R})$ definido por $\lambda \mapsto \lambda \circ \pi_x$ e que, consequentemente, é possível definir uma bijecção

$$\varphi: \underline{E}^* \to \underline{E}^\circ \subset M \times E \subset G \times E$$
$$\varphi(x, \lambda) = (x, \lambda \circ \pi_x),$$

onde $\underline{E}^\circ$ é o conjunto dos pares (x, μ), com $x \in M$ e $\mu \in E_x^\circ$.
b) Fixado um produto interno em E, a bijecção $\varphi: \underline{E}^* \to \underline{E}^\circ \subset G \times E$, referida na alínea a), define uma estrutura diferenciável sobre o conjunto $\underline{E}^*$. Mostrar que a estrutura diferenciável não depende do produto interno fixado em E, podendo assim ser definida sem referência explícita a nenhum produto interno.
c) Verificar que é suave a aplicação de $\underline{E}^*$ para M, que a (x, λ) associa x (a *projecção canónica*). Verificar que um morfismo linear $(\lambda_x)_{x \in M}: \underline{E} \to \mathbb{R}_M$ é

suave (cf. III.8.1) se, e só se, é suave a aplicação de M em $\underline{E}^*$, que a x associa (x, λ_x).

d) Fixemos, de novo, um produto interno em E. Verificar que tem lugar um difeomorfismo $\psi: \underline{E} \to \underline{E}^*$, do espaço total de $(E_x)_{x\in M}$ para o espaço total de $(E_x^*)_{x\in M}$, definido por $\psi(x, w) = (x, \lambda_{x,w})$, onde $\lambda_{x,w}: E_x \to \mathbb{R}$ é a aplicação linear $\lambda_{x,w}(u) = \langle u, w\rangle$. **Sugestão:** Para provar a suavidade de ψ^{-1}, considerar abertos U de M tais que $(E_x)_{x\in U}$ admite um campo de referenciais ortonormado.

e) Deduzir de d) que, se M é uma variedade de dimensão m e índice p no ponto x_0 e se E_{x_0} é um espaço vectorial de dimensão n, então $\underline{E}^*$ é, em cada (x_0, λ_0) uma variedade de dimensão $m + n$ e índice p.

Ex VI.4 Sejam M um espaço topológico, munido de uma estrutura diferenciável, e $(U_i)_{i\in I}$ uma família de abertos de M, com união M, sobre os quais consideramos as estruturas diferenciáveis induzidas. Seja $(M_j)_{j\in J}$ uma família de abertos de M, com união M, munidos de estruturas diferenciáveis arbitrárias.

Mostrar que a estrutura diferenciável de M é uma colagem das dos M_j se, e só se, quaisquer que sejam $i \in I$ e $j \in J$, as estruturas diferenciáveis de $U_i \cap M_j$ induzidas pelas de U_i e de M_j coincidem.

Ex VI.5 Se E é um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão maior ou igual a 1, ao conjunto $\mathbb{P}(E) = \mathbb{G}_1(E)$ das rectas (subespaços vectoriais de dimensão 1) de E dá-se o nome de *espaço projectivo* associado a E.

No caso particular em que $E = \mathbb{K}^{n+1}$ ($\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{C}^{n+1}$) o espaço $\mathbb{P}(E)$ é notado também $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. O objectivo deste exercício é a construção por colagem de uma estrutura diferenciável de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e a sua posterior identificação com uma estrutura já conhecida.

Para cada vector não nulo $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ notemos $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ o subespaço vectorial gerado por aquele vector e reparemos que se tem $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) = (y_1 : y_2 : \dots : y_{n+1})$ se, e só se, existe $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = t\,(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$.

a) Para cada $1 \le j \le n+1$, consideremos o subconjunto $\mathcal{U}_j$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ constituído pelas rectas que se podem escrever na forma $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ com $x_j \neq 0$. Verificar que tem lugar uma bijecção $\varphi_j: \mathcal{U}_j \to \mathbb{K}^n$ definida por

$$\varphi_j((x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})) = (\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_j}),$$

com inversa definida por

$$\varphi_j^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1 : \dots : z_{j-1} : 1 : z_j : \dots : z_n).$$

Vamos considerar em cada $\mathcal{U}_j$ a estrutura de variedade abstracta sem bordo (de dimensão n, no caso real, e $2n$, no caso complexo) definida pela carta φ_j.

b) Verificar que as topologias associadas dos diferentes $\mathcal{U}_j$ são mutuamente compatíveis e considerar em $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ a topologia colagem. Verificar que a

topologia de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ é separada.
Sugestão: Temos que mostrar que, dadas duas rectas distintas, existem abertos disjuntos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ que as contêm. Reparar que isso é trivial no caso em que ambas pertençam a um mesmo aberto $\mathcal{U}_j$ e, quando isso não acontecer, mostrar que existem $j < k$ tais que elas se possam escrever na forma

$$(a_1\colon\ldots\colon a_{j-1}\colon 1\colon a_{j+1}\colon\ldots\colon a_{k-1}\colon 0\colon a_{k+1}\colon\ldots\colon a_{n+1})$$
$$(b_1\colon\ldots\colon b_{j-1}\colon 0\colon b_{j+1}\colon\ldots\colon b_{k-1}\colon 1\colon b_{k+1}\colon\ldots\colon b_{n+1})$$

e considerar então os abertos disjuntos constituídos respectivamente pelas rectas da forma

$$(x_1\colon\ldots\colon x_{j-1}\colon 1\colon x_{j+1}\colon\ldots\colon x_{k-1}\colon x_k\colon x_{k+1}\colon\ldots\colon x_{n+1}),$$

com $|x_k| < 1$, e por aquelas da forma

$$(x_1\colon\ldots\colon x_{j-1}\colon x_j\colon x_{j+1}\colon\ldots\colon x_{k-1}\colon 1\colon x_{k+1}\colon\ldots\colon x_{n+1}),$$

com $|x_j| < 1$.
c) Verificar que as estruturas diferenciáveis consideradas nos diferentes $\mathcal{U}_j$ são mutuamente compatíveis e concluir a existência em $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ da uma estrutura de variedade sem bordo colagem das estruturas consideradas nos $\mathcal{U}_j$. É essa a estrutura de variedade que consideramos daqui em diante.
d) Mostrar que tem lugar uma aplicação suave $\Phi\colon \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ definida por

$$\Phi(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (x_1\colon\ldots\colon x_{n+1})$$

e que esta aplicação é mesmo uma submersão sobrejectiva.
e) Utilizar VI.4.2 e o exercício II.62 para concluir que a estrutura diferenciável que estamos a considerar em $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ coincide com a sua estrutura diferenciável canónica, quando encarada como variedade de Grassmann $\mathbb{G}_1(\mathbb{K}^{n+1})$ (cf. VI.1.9).
f) Reobter a conclusão de e) verificando que os $\mathcal{U}_j$ são abertos na variedade de Grassmann $\mathbb{G}_1(\mathbb{K}^{n+1})$ e que, para as estruturas diferenciáveis induzidas em $\mathcal{U}_j$ pela de $\mathbb{G}_1(\mathbb{K}^{n+1})$, os φ_j são difeomorfismos.
Sugestão: Lembrar que uma aplicação com valores em $\mathbb{G}_1(\mathbb{K}^{n+1})$ é suave se, e só se, uma certa família de subespaços vectoriais de $\mathbb{K}_{n+1}$ for um fibrado vectorial.

Ex VI.6 **(O ponto do infinito)** Seja E um espaço vectorial real de dimensão n, munido de produto interno, e notemos $\dot{E} = E \cup \{\infty\}$ a união de E com um elemento que não lhe pertence, notado ∞, a que se dá também o nome de *ponto do infinito*.
a) Mostrar que tem lugar uma bijecção $\psi\colon \dot{E}\setminus\{0\} \to E$ definida por

$$\begin{cases} \psi(\infty) = 0 \\ \psi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad \text{se } x \neq \infty \end{cases}$$

e que a bijecção inversa $\psi^{-1}: E \to \overset{\bullet}{E} \setminus \{0\}$ está definida por $\psi^{-1}(0) = \infty$ e $\psi^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, se $x \neq 0$.

b) Considerar em E a sua estrutura de variedade sem bordo de dimensão n, enquanto espaço vectorial de dimensão n, e em $\overset{\bullet}{E} \setminus \{0\}$ a estrutura de variedade de dimensão n definida pela carta ψ.

Mostrar que as topologias de E e de $\overset{\bullet}{E} \setminus \{0\}$ são mutuamente compatíveis e, considerando em $\overset{\bullet}{E}$ a topologia obtida por colagem, verificar que $\overset{\bullet}{E}$ admite como sistema fundamental de vizinhanças de ∞ a classe dos complementares em $\overset{\bullet}{E}$ das bolas fechadas de centro 0 e raio $r > 0$ de E e como outro sistema fundamental de vizinhanças de ∞ a classe dos complementares dos subconjuntos compactos de E.

Deduzir, em particular, que a topologia de $\overset{\bullet}{E}$ não depende do produto interno de partida[135] e é separada.

c) Mostrar que as estruturas de variedade abstracta de E e de $\overset{\bullet}{E} \setminus \{0\}$ são mutuamente compatíveis e concluir que se pode considerar em $\overset{\bullet}{E}$ a estrutura de variedade abstracta de dimensão n colagem daquelas duas. Diremos que $\overset{\bullet}{E}$ é o *compactificado* de E e que esta estrutura de variedade abstracta é a associada ao produto interno considerado.

d) Mostrar que, se $F \subset E$ é um subespaço vectorial, então a estrutura diferenciável de $\overset{\bullet}{F} = F \cup \{\infty\}$, associada ao produto interno induzido em F, é a induzida pela estrutura diferenciável de $\overset{\bullet}{E}$.

e) Consideremos em $E \times \mathbb{R}$ o produto interno associado, definido por

$$\langle (x,t), (y,s) \rangle = \langle x, y \rangle + ts,$$

e seja $S \subset E \times \mathbb{R}$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1 correspondente:

$$S = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid \|x\|^2 + t^2 = 1\}.$$

Mostrar que tem lugar um difeomorfismo $g: S \to \overset{\bullet}{E}$ definido por

$$g(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{1+t}, & \text{se } (x,t) \neq (0,-1) \\ \infty, & \text{se } (x,t) = (0,-1), \end{cases}$$

[135] Pelo contrário, e como veremos no exercício VI.7 adiante, a estrutura diferenciável que poremos em $\overset{\bullet}{E}$ já depende, em geral, do produto interno.

cujo inverso $g^{-1}: \overset{\bullet}{E} \to S$ está definido por $g^{-1}(\infty) = (0, -1)$ e

$$g^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1 + \|y\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2}\right)$$

(A existência de um tal difeomorfismo costuma ser lembrada dizendo que $\overset{\bullet}{E}$ é uma esfera de dimensão n). **Sugestão:** Reparar que g é a composta da projecção estereográfica

$$f^{-1}: S \setminus \{(0, -1)\} \to T_{(0,1)}(S)$$

(cf. III.9.17) com um isomorfismo natural $T_{(0,1)}(S) \to E$.

f) Seja $\overset{\bullet}{\psi}: \overset{\bullet}{E} \to \overset{\bullet}{E}$ o prolongamento de $\psi: \overset{\bullet}{E} \setminus \{0\} \to E$ tal que $\overset{\bullet}{\psi}(0) = \infty$. Mostrar que $\overset{\bullet}{\psi}$ é um difeomorfismo, com $\overset{\bullet}{\psi}{}^{-1} = \overset{\bullet}{\psi}$, e que tem lugar um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & \overset{\bullet}{E} \\ \downarrow & & \downarrow \overset{\bullet}{\psi} \\ S & \xrightarrow[g]{} & \overset{\bullet}{E} \end{array}$$

onde g é o difeomorfismo referido na alínea e) e a flecha da esquerda é o difeomorfismo definido por $(x, t) \mapsto (x, -t)$.

Ex VI.7 **(Dependência do produto interno)**

a) Sejam E e $\widehat{E}$ espaços vectoriais reais de dimensão n, munidos de produtos internos, e $\xi: E \to \widehat{E}$ um isomorfismo. Considerando os correspondentes $\overset{\bullet}{E} = E \cup \{\infty\}$ e $\overset{\bullet}{\widehat{E}} = \widehat{E} \cup \{\infty\}$, com as estruturas de variedade abstracta associadas aos produtos internos, mostrar que a correspondente bijecção $\overset{\bullet}{\xi}: \overset{\bullet}{E} \to \overset{\bullet}{\widehat{E}}$, que estende ξ e aplica ∞ em ∞, é suave se, e só se, o isomorfismo ξ é conforme (cf. I.2.33). Mostrar ainda que, nesse caso, $\overset{\bullet}{\xi}: \overset{\bullet}{E} \to \overset{\bullet}{\widehat{E}}$ é mesmo um difeomorfismo. **Sugestão:** Considerando as correspondentes cartas $\psi: \overset{\bullet}{E} \setminus \{0\} \to E$ e $\widehat{\psi}: \overset{\bullet}{\widehat{E}} \setminus \{0\} \to \widehat{E}$, verificar que a composta das aplicações

$$E \xrightarrow{\psi^{-1}} \overset{\bullet}{E} \setminus \{0\} \xrightarrow{\overset{\bullet}{\xi}_{/}} \overset{\bullet}{\widehat{E}} \setminus \{0\} \xrightarrow{\widehat{\psi}} \widehat{E}$$

é a aplicação $h: E \to \widehat{E}$ definida por $h(0) = 0$ e, para cada $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{\|x\|^2}{\|\xi(x)\|^2}\, \xi(x).$$

Reparando que h é positivamente 1-homogénea, utilizar a conclusão do exercício I.23 para concluir que, se h é suave, então h é linear.
b) Deduzir de a) que, se E é um espaço vectorial real de dimensão n, munido de dois produtos internos, então as estruturas diferenciáveis de $\dot{E}$ associadas a estes produtos internos coincidem se, e só se, um dos produtos internos for múltiplo do outro.

Ex VI.8 **(Suavidade do prolongamento das translações)** Seja E um espaço vectorial real de dimensão n, munido de produto interno, e consideremos em $\dot{E} = E \cup \{\infty\}$ a estrutura associada de variedade abstracta. Para cada $a \in E$, mostrar que é suave a aplicação $\tau_a\colon \dot{E} \to \dot{E}$ definida por $\tau_a(x) = a + x$, para cada $x \in E$ e $\tau_a(\infty) = \infty$ e concluir que esta aplicação é mesmo um difeomorfismo.

Ex VI.9 Consideremos o caso particular da situação estudada no exercício VI.6 em que E é o espaço vectorial $\mathbb{C}$, considerado como espaço vectorial real de dimensão 2, com o produto interno real $\langle a, b\rangle = \Re(a\overline{b})$, cuja norma associada é o valor absoluto usual dos complexos.[136]

Mostrar que, considerando em $\dot{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ a estrutura de variedade abstracta induzida pela de $\dot{\mathbb{C}}$, a bijecção $\widehat{\psi}\colon \dot{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $\widehat{\psi}(\infty) = 0$ e $\widehat{\psi}(z) = \frac{1}{z}$, para cada $z \neq \infty$, é um difeomorfismo (costuma dizer-se que $\dot{\mathbb{C}}$ é a *esfera de Riemann*[137]).

Ex VI.10 Verificar que a esfera de Riemann $\dot{\mathbb{C}}$ e o espaço projectivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (cf. o exercício VI.5) são difeomorfos.

Ex VI.11 Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial de grau $n \geq 1$,

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

onde $a_0 \neq 0$. Seja $\dot{f}\colon \dot{\mathbb{C}} \to \dot{\mathbb{C}}$ o prolongamento da aplicação f definido por $\dot{f}(\infty) = \infty$. Mostrar que este prolongamento é uma aplicação suave.

Ex VI.12 Sendo $S \subset \mathbb{R}^2$ a circunferência de centro 0 e raio 1, mostrar que existe um difeomorfismo $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S$ tal que, para cada $(x, y) \in S$, f aplica o subespaço vectorial gerado pelo vector (x, y) em $(x^2 - y^2, 2xy) \in S$. Interpretar geometricamente este difeomorfismo.

Ex VI.13 Sejam M e $\widehat{M}$ variedades abstractas sem bordo e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação sobrejectiva tal que a estrutura de variedade de $\widehat{M}$ seja a estrutura

[136]Este produto interno coincide com o produto interno canónico de $\mathbb{C}$, quando identificado a $\mathbb{R}^2$.

[137]Tendo em conta o que vimos na alínea f) do exercício VI.6, $\dot{\mathbb{C}}$ é difeomorfa à esfera de Riemann referida em III.9.18.

quociente definida por f.
Verificar que a topologia de $\widehat{M}$ é uma *topologia final* determinada por f e pela topologia de M, no sentido seguinte (comparar com VI.2.29): Quaisquer que sejam o espaço topológico Z e a aplicação $g\colon \widehat{M} \to Z$, g é contínua se, e só se, $g \circ f\colon M \to Z$ é contínua.
Sugestão: Atender a que f é contínua, aberta e sobrejectiva.

Ex VI.14 Sejam M uma variedade abstracta sem bordo, $\widehat{M}$ um conjunto e $f\colon M \to \widehat{M}$ uma aplicação sobrejectiva e notemos

$$C = \{(x, y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}.$$

Na condição necessária e suficiente para a existência em $\widehat{M}$ de uma estrutura de variedade quociente, referida em VI.4.4 e VI.4.6, é citada a condição de a restrição da primeira projecção $\pi_1\colon M \times M \to M$ a C ser uma submersão de C para M, o que é uma aparente falta de simetria entre a primeira e segunda variáveis. Mostrar, directamente, que a condição de a restrição da primeira projecção $\pi_1\colon M \times M \to M$ a C ser uma submersão é equivalente à de a restrição da segunda projecção $\pi_2\colon M \times M \to M$ a C ser uma submersão.

Ex VI.15 Seja E um espaço vectorial de dimensão $n \geq 1$ e notemos $\Phi\colon E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ a aplicação sobrejectiva que a cada x associa o subespaço vectorial gerado por x. Utilizar o teorema de existência de estrutura de variedade quociente (cf. VI.4.6) para deduzir directamente a existência de uma estrutura de variedade sem bordo sobre $\mathbb{P}(E)$, relativamente à qual Φ seja uma submersão.
Sugestão: O conjunto

$$C = \{(x, y) \in (E \setminus \{0\}) \times (E \setminus \{0\}) \mid \Phi(x) = \Phi(y)\}$$

é um aberto no espaço total de um certo fibrado vectorial trivial com base $E \setminus \{0\}$. Ter em conta III.1.27 e utilizar III.3.19 para garantir que C é uma variedade fechada em $(E \setminus \{0\}) \times (E \setminus \{0\})$ e para caracterizar os vectores tangentes a C.

Ex VI.16 **(Generalização do exercício anterior)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão $n \geq 1$, $1 \leq m \leq n$, $\mathbb{G}_m(E)$ o conjunto dos subespaços vectoriais de dimensão m de E e $\Omega^m(E)$ o subconjunto aberto de E^m constituído pelos sistemas linearmente independentes. Notemos $\Phi\colon \Omega^m(E) \to \mathbb{G}_m(E)$ a aplicação sobrejectiva que associa a cada $(x_1, \ldots, x_m)$ o subespaço vectorial gerado por aqueles vectores.
a) Utilizar VI.4.6 para deduzir que existe sobre $\mathbb{G}_m(E)$ uma, e uma só, estrutura de variedade sem bordo, relativamente à qual Φ seja uma submersão, e que a dimensão desta variedade é igual a $m(n-m)$ ou $2m(n-m)$, conforme o corpo dos escalares considerado seja $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Sugestão: Análoga à do exercício anterior.
b) Utilizar o exercício III.9 para mostrar que a estrutura de variedade sem

bordo referida na alínea a) coincide com a estrutura diferenciável canónica de $\mathbb{G}_m(E)$ definida em VI.1.9.

Ex VI.17 Lembrar a noção de grupo de Lie, estudada em II.5.3, no quadro das variedades concretas. Pode-se definir, mais geralmente, um *grupo de Lie* como sendo uma variedade abstracta G sem bordo, munida duma estrutura de grupo, tal que a aplicação $\mu: G \times G \to G$, definida por $\mu(x, y) = x \cdot y$, e a aplicação $\mathrm{inv}: G \to G$, definida por $\mathrm{inv}(x) = x^{-1}$, sejam suaves.
a) Tendo em conta o exercício II.33, mostrar que, se G é uma variedade abstracta, munida de uma estrutura de grupo tal que a aplicação $\mu: G \times G \to G$, definida por $\mu(x, y) = x \cdot y$, seja suave, então G é um grupo de Lie e uma variedade sem bordo com a mesma dimensão em todos os pontos
b) Se G é um grupo de Lie, diz-se que um subgrupo $H \subset G$ é um *subgrupo de Lie* se H, com a estrutura diferenciável induzida, for ainda uma variedade (é então trivial que H é também um grupo de Lie).
Mostrar que, se $H \subset G$ é um subgrupo de Lie, então H é fechado em G.
Sugestão: Considerar uma sucessão[138] (x_n) de elementos de H convergente para $x \in G$. Sendo V uma vizinhança compacta de e em H, raciocinar por continuidade para garantir a existencia de n_0 tal que, sempre que $n \geq n_0$ e $k \geq n_0$, $x_n \cdot x_k^{-1} \in V$ e deduzir então, por passagem ao limite, que, para cada $k \geq n_0$, $x \cdot x_k^{-1} \in V \subset H$.
c) Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de Lie. Lembrar que se define então o conjunto G/H como sendo o conjunto quociente de G pela relação de equivalência $\sim$ definida por $x \sim y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H$. Seja $\rho: G \to G/H$ a aplicação sobrejectiva que associa a cada $x \in G$ a classe de equivalência $[x] \in G/H$. Utilizar VI.4.6 para garantir a existência em G/H de uma, e uma só, estrutura quociente de variedade e mostrar que, relativamente a esta estrutura, fica bem definida uma aplicação

$$G \times (G/H) \to G/H, \quad (y, [x]) \mapsto [y \cdot x],$$

e que esta aplicação é suave.
Sugestão: Usando uma carta, reduzir ao caso em que G, é uma parte dum espaço vectorial de dimensão finita, com a estrutura diferenciável induzida.
d) Nas condições de c), é bem conhecido que, se o subgrupo de Lie H é *normal* (isto é, se $x \cdot H \cdot x^{-1} \subset H$, para cada $x \in G$), então existe em G/H uma estrutura de grupo definida por $[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$ (a única para a qual ρ é um morfismo de grupos). Mostrar que G/H, com esta estrutura de grupo, é também um grupo de Lie.

Ex VI.18 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Mostrar que, se a

[138]Podem-se utilizar sucessões, uma vez que G é metrizável, por ser homeomorfo a uma parte dum espaço vectorial de dimensão finita.

topologia fina de M é de base contável, então $E_x = T_x(M)$, para todo o $x \in M$. **Sugestão:** Considerar uma estrutura (M) de variedade abstracta sem bordo sobre M, com a topologia fina, colagem de todas as subvariedades imersas integrais sem bordo de $\underline{E}$. Utilizar VI.5.14 para mostrar que se tem então $(M) = M$.

Ex VI.19 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade. Notando (M) o conjunto M com a topologia fina, verificar que a classe das subvariedades imersas integrais sem bordo (A) de $\underline{E}$ está em correspondência biunívoca com a classe dos subconjuntos abertos de (M) contidos numa união contável de folhas (M_j), essa correspondência associando naturalmente a cada (A) o conjunto A.

Ex VI.20 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, e $\underline{E} = (E_x)_{x\in M}$ um fibrado vectorial com $E_x \subset T_x(M)$, verificando a condição de integrabilidade, e sejam (M_j), onde $j \in J$, as folhas de (M), com a topologia fina associada a $\underline{E}$.
a) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, com mais que um elemento, e $f\colon J \to M$ uma aplicação suave tal que, para cada $t \in J$, $f'(t) \in E_{f(t)}$. Mostrar que existe j tal que $f(J) \subset M_j$ e que então $f\colon J \to (M_j)$ é suave. **Sugestão:** Lembrar a alínea a) de VI.5.33.
b) Deduzir que, para cada $x_0 \in M$, a folha M_j, que contém x_0, é o conjunto dos pontos $x \in M$ para os quais existe uma aplicação suave $f\colon [0,1] \to M$, com $f(0) = x_0$, $f(1) = x$ e $f'(t) \in E_{f(t)}$, para cada $t \in [0,1]$.

Ex VI.21 **(O modelo do toro em $\mathbb{R}^3$)** Verificar que existe um difeomorfismo do toro $M = S \times S \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sobre um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, que a cada par $(z,w) \in S \times S$, com $z = a + bi$ e $w = c + di$, associa

$$\big(a(1+\frac{c}{2})\,,\, b(1+\frac{c}{2})\,,\, \frac{d}{2}\big),$$

e interpretar geometricamente a imagem deste difeomorfismo.

Ex VI.22 No contexto do exemplo em VI.5.38, verificar que, no caso em que $a = \frac{m}{n}$, com m e n números naturais primos entre si, as folhas $M_{(z_0,w_0)}$ são difeomorfas à circunferência $S \subset \mathbb{C}$. **Sugestão:** Relembrando as conclusões enunciadas na respectiva alínea h), considerar a aplicação que a cada $f_{(z_0,w_0)}(t)$ associa $e^{2\pi it/n}$, reparando que $f_{(z_0,w_0)}\colon \mathbb{R} \to M_{(z_0,w_0)}$ e a aplicação $\mathbb{R} \to S$, $t \mapsto e^{2\pi it/n}$, são submersões sobrejectivas.

Ex VI.23 **(Folhas densas no toro)**
a) (Subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$) Consideremos $\mathbb{R}$ como grupo, com a operação $+$, e seja $G \subset \mathbb{R}$ um subgrupo distinto de $\{0\}$. Mostrar que, ou existe $b > 0$ tal que $G = \mathbb{Z}b = \{pb\}_{p\in\mathbb{Z}}$, ou G é denso em $\mathbb{R}$. **Sugestão:** O grupo G tem elementos em $]0,+\infty[$. Se o ínfimo dos elementos de G em $]0,+\infty[$ for 0, G

é denso; se esse ínfimo for $b > 0$, tem-se $b \in G$ e $G = \mathbb{Z}b$.
b) Seja a um número irracional. Mostrar que o conjunto $\{ap + q\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ é denso em $\mathbb{R}$. **Sugestão:** Este conjunto é um subgrupo que contém a e $\mathbb{Z}$.
c) Nas notações de VI.5.38, seja $a > 0$ irracional e consideremos a aplicação suave $f = f_{(1,1)}: \mathbb{R} \to S \times S = M$ definida por

$$f(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi iat}).$$

Verificar que, qualquer que seja $(z, w) \in S \times S$, existem sucessões de números reais t_n e s_n tais que $f(s_n) \to (1, w)$ e $f(t_n) \to (z, 1)$ e deduzir que então $f(t_n + s_n) \to (z, w)$.[139] **Sugestão:** Sendo $z = e^{2\pi ic}$ e $w = e^{2\pi id}$, escolher sucessões de inteiros p_n, q_n, p'_n, q'_n tais que $ap_n + q_n \to d$ e $\frac{1}{a}p'_n + q'_n \to c$ e reparar que

$$f(p_n) = (1, e^{2\pi iap_n}) = (1, e^{2\pi i(ap_n+q_n)}),$$
$$f(\frac{1}{a}p'_n) = (e^{2\pi ip'_n/a}, 1) = (e^{2\pi i(p'_n/a+q'_n)}, 1).$$

d) Continuando no contexto de VI.5.38, deduzir de c) que, quando $a > 0$ é irracional, para cada $(z_0, w_0) \in S \times S$, a folha $M_{(z_0,w_0)}$ é efectivamente densa em $M = S \times S$, e portanto não é uma subvariedade (cf. II.6.22 e VI.5.14).

Ex VI.24 **(Folhas num cilindro)** Sejam $S \subset \mathbb{R}^2$,

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

e $M \subset \mathbb{R}^3$ o cilindro,

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\} = S \times \mathbb{R}.$$

Sejam, para cada $(x, y, z) \in M$, $W_{(x,y,z)} = (-y, x, -z^2)$ e $E_{(x,y,z)}$ o subespaço vectorial gerado por $W_{(x,y,z)}$.
a) Verificar que cada $E_{(x,y,z)}$ é um subespaço vectorial de dimensão 1 de $T_{(x,y,z)}(M)$ e que $\underline{E} = (E_{(x,y,z)})_{(x,y,z)\in M}$ é um fibrado vectorial que verifica a condição de integrabilidade.
b) Verificar que $S \times \{0\}$ é uma subvariedade integral sem bordo de $\underline{E}$, compacta e conexa, e concluir que se trata de uma das folhas de $\underline{E}$.
c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, seja $f_a: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to M \setminus (S \times \{0\})$ a aplicação suave definida por

$$f_a(t) = (\cos(a + t), \sin(a + t), \frac{1}{t}).$$

[139]De facto, é mesmo verdade um resultado mais forte, que não propomos neste exercício: Se, quando se considera $\mathbb{R}$ como espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$ do números racionais, $1, a, b$ são linearmente independentes, o conjunto dos elementos da forma $f(nb)$, com $n \in \mathbb{N}$, já é denso em $S \times S$.

Verificar que f_a é um difeomorfismo de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sobre $f_a(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ e que $f_a(]-\infty,0[)$ e $f_a(]0,+\infty[)$ são subvariedades integrais sem bordo conexas de $\underline{E}$.

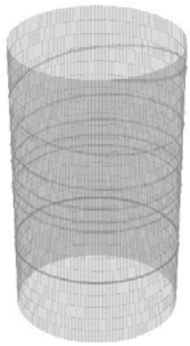

Figura 29

d) Verificar que, dados $a,b\in\mathbb{R}$, ou $f_a(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap f_b(\mathbb{R}\setminus\{0\})=\emptyset$, ou tem-se simultaneamente $f_a(]-\infty,0[)=f_b(]-\infty,0[)$ e $f_a(]0,+\infty[)=f_b(]0,+\infty[)$. Concluir que M é a união disjunta de $S\times\{0\}$ com conjuntos dos tipos $f_a(]-\infty,0[)$ e $f_b(]0,+\infty[)$ e deduzir que estes conjuntos são as folhas de $\underline{E}$.
e) Reparar que a folha $S\times\{0\}$ está contida na aderência de cada uma das restantes folhas.

Ex VI.25 **(Para quem conheça a noção de espaço afim)** Seja E um espaço afim, de dimensão n, com espaço vectorial associado $\vec{E}$ e considerar em E a estrutura natural de variedade sem bordo com dimensão n (cf. o exercício VI.2).
a) Mostrar que, para cada $x_0\in E$, existe em $\vec{E}$ uma estrutura natural de espaço vectorial tangente a E em x_0, o que nos permite escrever $T_{x_0}(E)=\vec{E}$, e constatar que, se $F\subset E$ é um subespaço afim, com subespaço vectorial associado $\vec{F}$, então, para cada $x_0\in F$, $T_{x_0}(F)=\vec{F}$, coincidindo as estruturas de espaço tangente a F em x_0 que vêm de F, como parte de E e de F, como espaço afim.
b) Constatar que, se E é um espaço vectorial, então, para cada $x_0\in E$, coincidem, em $T_{x_0}(E)=E$, as estruturas de espaço vectorial tangente que resultam de E ser espaço vectorial e de E ser espaço afim, com E como espaço vectorial associado.
c) Mostrar que, se F é outro espaço afim, com espaço vectorial associado $\vec{F}$, e se $\lambda\colon E\to F$ é uma aplicação afim, com $\vec{\lambda}\colon\vec{E}\to\vec{F}$ como aplicação linear associada, então, para cada $x_0\in E$, $D\lambda_{x_0}=\vec{\lambda}$.

Ex VI.26 Sejam A e $\widehat{A}$ conjuntos, munidos de estruturas diferenciáveis, para os quais se escolheu, para cada $x \in A$ e cada $y \in \widehat{A}$, espaços vectoriais tangentes $T_x(A)$ e $T_y(\widehat{A})$. Se $f\colon A \to \widehat{A}$ é uma aplicação suave, verificar que f é uma imersão (respectivamente, uma submersão) no ponto $x \in A$ se, e só se, a aplicação linear $Df_x\colon T_x(A) \to T_{f(x)}(\widehat{A})$ é injectiva (respectivamente, é sobrejectiva).

Ex VI.27 Sejam $M \subset E$ um subconjunto de um espaço vectorial de dimensão finita, A um conjunto munido de uma estrutura diferenciável e $f\colon A \to M$ uma imersão e consideremos, para cada $x \in A$, o espaço vectorial tangente $T_x(f) \subset T_{f(x)}(M)$ (cf. VI.5.16). Mostrar que existe sobre $T_x(f)$ uma única estrutura de espaço vectorial tangente a A no ponto x tal que

$$Df_x\colon T_x(f) \to T_{f(x)}(M)$$

seja a inclusão e que esta é mesmo a única estrutura de espaço vectorial tangente sobre algum subespaço vectorial de $T_{f(x)}(M)$ para a qual Df_x é a inclusão (comparar com VI.6.16).
Interpretar, à luz do que acaba de ser concluído, a noção de espaço vectorial tangente a uma subvariedade imersa referida em VI.5.24.

Ex VI.28 Sejam M uma variedade abstracta, $x_0 \in M$ e $\widehat{M} \subset M$ outra variedade abstracta tal que $x_0 \in \widehat{M}$ e que (M, x_0) e $(\widehat{M}, x_0)$ tenham a mesma dimensão. Para cada $\Lambda \in \mathcal{D}er(M, x_0)$, verificar que a derivação restrição $\Lambda_{/\widehat{M}} \in \mathcal{D}er(\widehat{M}, x_0)$, definida em VI.6.47, pode ser caracterizada do seguinte modo: Qualquer que seja $\alpha \in \mathcal{F}_{\widehat{M}}$, existe $\overline{\alpha} \in \mathcal{F}_M$ e um aberto U de M, contendo x_0, tal que α e $\overline{\alpha}$ tenham a mesma restrição a $U \cap \widehat{M}$ (podemos então dizer que $\overline{\alpha}$ é um *quase-prolongamento* de α) e, qualquer que seja $\overline{\alpha}$ nessas condições, tem-se $\Lambda_{/\widehat{M}}(\alpha) = \Lambda(\overline{\alpha})$. **Sugestão:** Para garantir a existência de um quase-prolongamento, utilizar uma carta local e um argumento de partição da unidade. Para verificar a igualdade, utilizar a restrição $\Lambda_{/U \cap \widehat{M}}$.

Ex VI.29 Sejam M uma variedade abstracta e $x_0 \in M$ e consideremos no espaço vectorial $\mathcal{D}er(M, x_0)$ a sua estrutura de espaço vectorial tangente a M em x_0 (cf. VI.6.48). Se $\alpha\colon M \to \mathbb{R}$ é uma aplicação suave, com a correspondente derivada em x_0, $D\alpha_{x_0}\colon \mathcal{D}er(M, x_0) \to \mathbb{R}$, explicitar o que é $D\alpha_{x_0}(\Lambda)$, para cada $\Lambda \in \mathcal{D}er(M, x_0)$.

Ex VI.30 Sejam M uma variedade abstracta, U um aberto de M, V um aberto de $\mathbb{R}^n$ (ou, mais geralmente, de um sector de $\mathbb{R}^n$) e $\varphi\colon U \to V$ um difeomorfismo. Mostrar que, para cada $1 \leq i \leq n$ e $y \in U$, se pode definir uma derivação $(\frac{\partial}{\partial x_i})_y \in \mathcal{D}er(M, y)$, pondo-se, para cada $\alpha \in \mathcal{F}_M$,

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_y(\alpha) = \frac{\partial(\alpha \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(y))$$

(derivada parcial em relação à variável i) e que os $(\frac{\partial}{\partial x_i})_y$ constituem uma base de $\mathcal{D}er(M,y)$. **Sugestão:** Ter em conta a alínea b) de VI.6.48.

Ex VI.31 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $M \subset E$ uma variedade e $X = (X_x)_{x\in M}$ um campo vectorial sobre M (por outras palavras, para cada $x \in M$, $X_x \in T_x(M)$). Lembrar que, como foi referido em III.3.25, para cada espaço vectorial F de dimensão finita e cada aplicação suave $f\colon M \to F$, fica definida uma aplicação $D_X f\colon M \to F$ por

$$(D_X f)_x = D_{X_x}(f) = Df_x(X_x),$$

aplicação essa que é suave se o campo vectorial $(X_x)_{x\in M}$ for suave.
a) Mostrar que o campo vectorial $(X_x)_{x\in M}$ é suave se, e só se, para cada $\alpha \in \mathcal{F}_M$ (ou seja, para cada aplicação suave $\alpha\colon M \to \mathbb{R}$), $D_X\alpha \in \mathcal{F}_M$.
Sugestão: Fixar uma base $w_1, \ldots, w_n$ de E e considerar as aplicações lineares (em particular suaves) $\xi_1, \ldots, \xi_n\colon E \to \mathbb{R}$, definidas por

$$w = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(w)\, w_j,$$

assim como as suas restrições a M.
b) Em geral, se M é uma variedade abstracta, chama-se *derivação* em M a toda a aplicação linear $\Lambda\colon \mathcal{F}_M \to \mathcal{F}_M$ que verifique a condição

$$\Lambda(\alpha \cdot \beta) = \Lambda(\alpha) \cdot \beta + \alpha \cdot \Lambda(\beta)$$

(comparar com VI.6.35) e nota-se $\mathcal{D}er(M)$ o conjunto de todas as derivações $\Lambda\colon \mathcal{F}_M \to \mathcal{F}_M$, conjunto que é trivialmente um espaço vectorial.[140]
Verificar que, se $M \subset E$ é uma variedade concreta e $X = (X_x)_{x\in M}$ é um campo vectorial suave, então tem lugar uma derivação associada D_X, que a $\alpha \in \mathcal{F}_M$ associa $D_X\alpha \in \mathcal{F}_M$, e que a correspondência $X \mapsto D_X$ é uma bijecção do conjunto dos campos vectoriais suaves sobre $\mathcal{D}er(M)$ (aliás, mesmo um isomorfismo, para a estrutura natural de espaço vectorial do conjunto dos campos vectoriais suaves).

Ex VI.32 Consideremos a situação mais geral em que M é uma variedade abstracta, para a qual se escolheu, para cada $x \in M$, um espaço vectorial tangente $T_x(M)$. Continuaremos a chamar *campo vectorial* sobre M a uma família $X = (X_x)_{x\in M}$, com $X_x \in T_x(M)$, para cada $x \in M$ e a notar, dados um tal campo vectorial, um espaço vectorial F de dimensão finita e uma aplicação suave $f\colon M \to F$, $D_X f\colon M \to F$ a aplicação definida por

$$(D_X f)_x = D_{X_x}(f) = Df_x(X_x).$$

[140]Trata-se também um módulo sobre o anel $\mathcal{F}_M$, com a multiplicação $\beta\Lambda$ de $\beta \in \mathcal{F}_M$ por $\Lambda \in \mathcal{D}er(M)$ definida por $(\beta\Lambda)(\alpha) = \beta \cdot \Lambda(\alpha)$. Repare-se que, ao contrário do que acontecia com $\mathcal{D}er(M, x_0)$, $\mathcal{D}er(M)$ é, em geral, um espaço vectorial de dimensão infinita.

Vamos dizer que o *campo vectorial* é *suave* se, qualquer que seja $\alpha \in \mathcal{F}_M$, tem-se $D_X\alpha \in \mathcal{F}_M$.
a) Verificar que, se o campo vectorial $X = (X_x)_{x\in M}$ é suave, então, mais geralmente, para cada espaço vectorial F de dimensão finita e cada aplicação suave $f\colon M \to F$, a aplicação $D_X f\colon M \to F$ é suave. **Sugestão:** Fixar uma base em F e considerar as funções componentes de f nessa base.
b) Generalizando o espaço total do fibrado vectorial tangente a uma variedade concreta, notamos $T(M)$ o conjunto dos pares (x,w) com $x \in M$ e $w \in T_x(M)$, a que podemos dar ainda o nome de *espaço total do fibrado vectorial tangente* a M.[141] . Dada uma carta $\varphi\colon M \to B \subset E$ da variedade M, verificar que tem lugar uma bijecção $T(\varphi)\colon T(M) \to T(B)$, definida por $T(\varphi)(x,w) = (\varphi(x), D\varphi_x(w))$, e que esta bijecção pode ser utilizada para munir $T(M)$ de uma estrutura de variedade abstracta, a qual não depende da carta escolhida.
c) Considerando a estrutura de variedade em $T(M)$ atrás referida, mostrar que um campo vectorial $X = (X_x)_{x\in M}$ é suave se, e só se, for suave a aplicação de M para $T(M)$, $x \mapsto (x, X_x)$.
d) Se $\widehat{M}$ é outra variedade abstracta, para a qual também se escolheu, para cada $y \in \widehat{M}$, um espaço vectorial tangente $T_y(\widehat{M})$, e se $f\colon M \to \widehat{M}$ é uma aplicação suave, mostrar que tem lugar uma aplicação suave

$$T(f)\colon T(M) \to T(\widehat{M}), \quad T(f)(x,w) = (f(x), Df_x(w)).$$

e) Enunciar e justificar as propriedades de functorialidade associadas à definição dada em d) e deduzir, em particular, que, se $f\colon M \to \widehat{M}$ é um difeomorfismo, então $T(f)\colon T(M) \to T(\widehat{M})$ é um difeomorfismo.
f) Deduzir, em particular, que, se, para a variedade abstracta M se considerarem outras escolhas de espaços vectoriais tangentes $\widehat{T}(M)$ e se $\theta_x\colon T_x(M) \to \widehat{T}_x(M)$ forem os isomorfismos canónicos, então tem lugar um difeomorfismo $\theta\colon T(M) \to \widehat{T}(M)$, definido por $\theta(x,w) = (x, \theta_x(w))$.
g) Seja $X = (X_x)_{x\in M}$ um campo vectorial sobre a variedade abstracta M e seja $M' \subset M$ uma subvariedade tal que, para cada $x \in M'$, $X_x \in T_x(M') \subset T_x(M)$ (é o que acontece, automaticamente, no caso em que, M' tem a mesma dimensão que M, em cada um dos seus pontos, em particular no caso em que M' é um aberto de M). Mostrar que tem então lugar um *campo vectorial restrição* $X_{/M'} = (X_x)_{x\in M'}$, sobre M', o qual é suave se X o for.

---

[141] Apesar de existir uma noção de fibrado vectorial abstracto, que generaliza os fibrados vectoriais “concretos”, que estudámos no capítulo III, essa noção não será abordada neste trabalho. A definição que apresentámos deve portanto ser olhada como um todo, independentemente do que queira dizer, no quadro abstracto, “fibrado vectorial tangente”.

Índice de Símbolos

Índice Remissivo

Bibliografia

[1] ARONSZAJN N., Subcartesian and subriemannian spaces, *Notices Amer. Math. Soc.* 1, 1967, p. 111.

[2] BERGER M., GOSTIAUX B., *Géométrie Différentielle*, Armand Colin, Paris, 1982.

[3] BOULIGAND Georges, *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe*, Vuibert, Paris, 1932.

[4] CARMO Manfredo do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, 1972.

[5] CARMO Manfredo do, *Geometria Riemaniana*, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

[6] DIEUDONNÉ Jean, *Eléments d'Analyse*, Vol III, Gauthier-Villars, Paris, 1970.

[7] DIEUDONNÉ Jean, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

[8] GRAY Alfred, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1993.

[9] GREUB W., HALPERIN S., VANSTONE R., *Connections Curvature and Cohomology*, Vol I, Academic Press, 1972.

[10] GUILLEMIN V., POLLAK A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[11] HELGASON S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[12] KOBAYASHI, NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Vol I e II, Interscience, 1963, 1969.

[13] LANG Serge, *Analysis II* (*Real Analysis* numa edição posterior), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[14] MACHADO Armando, *Geometria Diferencial: Uma Introdução Fundamental*, Cosmos, Lisboa, 1991.

[15] MACHADO Armando, *Introdução à Análise Funcional*, Escolar Editora, Lisboa, 1991.

[16] MARCO, G., Fibrations of real valued functions, *Nonlinear Analysis, Theory Methods & Applications* Vol. 28, No. 10, 1997.

[17] MARSHALL C. D., Calculus on subcartesian spaces, *J. Differential Geometry*, 10, 1975, pp. 551-574.

[18] MATSUSHIMA Y., *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, 1972.

[19] MILNOR John, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[20] NEWLANDER A., NIRENBERG L., Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.*, (2) 65 (1957), 391–404.

[21] OKUBO Tanjiro, *Differential Geometry*, Marcel Dekker, Pure and Applied Mathematics, v. 112, 1987.

[22] O'NEILL Barrett, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, 1966.

[23] PONTRIAGUINE L. *Equations Différentielles Ordinaires*, Ed. MIR, Moscovo, 1975.

[24] SPIVAK, M., *Calculus on Manifolds*, Benjamin, Menlo Park, 1965.

[25] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I a V, Publish or Perish, Berkeley, 1979.

[26] WARNER F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott and Foresman, 1971.

[27] WHITNEY, A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. Jour.* 1, 1935, pp. 514–517.

[28] YANO Kentaro & ISHIHARA Shigeru, *Tangent and Cotangent Bundles – Differential Geometry*, Marcel Dekker, Pure and Applied Mathematics, v. 16, 1973.